# 专题 06 锐角三角函数

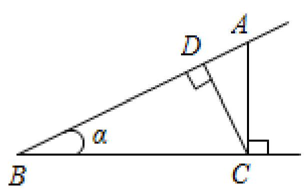
| | |
|---|---|
| 重点 | 锐角三角函数的概念，特殊角的三角函数值，利用计算器求锐角三角函数值 |
| 难点 | 锐角三角函数之间的关系 |
| 易错 | 混淆特殊角的三角函数值 |

## 重难点精讲

### 一、锐角三角函数概念

熟记锐角三角函数的概念，可以简记为“正弦等于对比斜，余弦等于邻比斜，正切等于对比邻”.

【例 1】如图，点 $A$ 为 $\angle\alpha$ 边上的任意一点，作 $AC\perp BC$ 于点 $C$，$CD\perp AB$ 于点 $D$，下列用线段比表示出 $\sin\alpha$ 的值，正确的是（　）




A. $\dfrac{BD}{BC}$　　B. $\dfrac{AD}{AC}$　　C. $\dfrac{AD}{DC}$　　D. $\dfrac{CD}{AC}$

【答案】B

【详解】Q $AC\perp BC$，$CD\perp AB$，

$\therefore \angle BAC+\alpha=\angle BAC+\angle ACD=90^\circ$，

$\therefore \angle ACD=\alpha$，

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{AD}{AC}$；

故正确的是 B 选项;

故选：B.

【例 2】已知在 Rt△$ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\sin A=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\tan B$ 的值等于（　）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

【详解】解：$\because \sin A=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{BC}{AB}$，

$\therefore$可设 $BC=2\sqrt{5}, AB=5$，

则 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore \tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$，

故选：D.

## 二、锐角三角函数之间的关系

同一锐角的三角函数之间的关系：

（1）$\sin^2 A+\cos^2 A=1$；

（2）$\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A$.

【例 1】已知$\alpha$为锐角，且$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，那么$\alpha$的正切值为（　）

A．$\frac{5}{12}$　　B．$\frac{12}{5}$　　C．$\frac{5}{13}$　　D．$\frac{12}{13}$

【答案】A

【详解】$\because \sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha$为锐角，

$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin\alpha^2}=\frac{12}{13}$，

$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{5}{12}$.

故选：A.

【例 2】在 Rt△$ABC$ 中，∠$C$＝90°，若 sin$A$＝$\frac{2}{3}$，则 cos$A$＝（　　）

A．$\frac{\sqrt{13}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{13}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】C

【详解】解：由题意得：$\sin^2A+\cos^2A=1$，

$\therefore \cos^2 A=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$，

$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

故选 C.

## 三、30°，45°，60°角的三角函数值及有关计算

熟记特殊角的锐角三角函数值是进行锐角三角函数计算的关键.

【例 1】在 Rt△$ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=60°$，则$\cos A$的值为（　）.

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

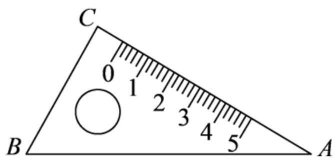
【答案】A

【详解】解：$\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=60°$，

$\therefore \cos A=\cos 60°=\frac{1}{2}$，

故选：A

【例 2】如图，在一块直角三角板 $ABC$ 中，$\angle A=30°$，则 $\sin A$ 的值是（　）




A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\sqrt{3}$

【答案】B

【详解】解：$\because \angle A=30°$，

$\therefore \sin A=\sin 30°=\frac{1}{2}$．

故选：B．

## 四、利用计算器求锐角三角函数值或锐角

化简形如的式子时，先转化为|a|的形式，再根据 a 的符号去绝对值．

【例 1】若用我们数学课本上采用的科学计算器计算 $\tan 35°12'$，按键顺序正确的是（　　）

A．$\boxed{\tan}\ 35\ \boxed{\bullet}\ 12\ \boxed{=}$　　B．$\boxed{\tan}\ 35\ \boxed{\text{DMS}}\ 12\ \boxed{=}$

C．$\boxed{\text{2ndF}}\boxed{\tan}\ 35\ \boxed{\text{DMS}}\ 12\ \boxed{=}$　　D．$\boxed{\tan}\ 35\ \boxed{\text{DMS}}\ 12\ \boxed{\text{DMS}}\boxed{=}$

【答案】D

【详解】解：科学计算器计算 $\tan 35°12'$，按键顺序是 $\boxed{\tan}\ 35\ \boxed{\text{DMS}}\ 12\ \boxed{\text{DMS}}\boxed{=}$

故选：D．

【例 2】用我们数学课本上采用的科学计算器求 $\cos 8°5'$ 的值，按键顺序正确的是（　）．

A．$\boxed{\text{2ndF}}\boxed{\cos}\boxed{8}\boxed{5}\boxed{=}$　　B．$\boxed{\cos}\boxed{8}\boxed{\text{DMS}}\boxed{5}\boxed{=}$

C．$\boxed{\text{2ndF}}\boxed{\cos}\boxed{8}\boxed{\text{DMS}}\boxed{5}\boxed{=}$　　D．$\boxed{\text{DMS}}\boxed{\cos}\boxed{8}\boxed{\text{2ndF}}\boxed{5}\boxed{=}$

【答案】B

【详解】解：采用科学计算器计算$\cos 8°5'$，按键顺序正确的是 B 选项中的顺序.

故选：B.

## 五、对概念本质理解不透

锐角三角函数值的本质是一个比值，它的大小只与锐角 A 的大小（即度数）有关，与所在的直角三角形的边的长度无关，即只要锐角 A 确定，其三角函数值也随之确定.

【例 1】在 $Rt\triangle ABC$ 中，如果各边长度都扩大为原来的$3$倍，则锐角$\angle A$的余弦值

A．扩大为原来的 3 倍　　　　B．没有变化

C．缩小为原来的$\dfrac{1}{3}$　　　　D．不能确定

【错解】A

【错因分析】误认为直角三角形各边的长度都扩大为原来的 3 倍，则$\angle A$ 的正弦值也扩大为原来的 3 倍.

【解析】设原来三角形的各边分别为 $a$，$b$，$c$，

则 $\cos A=\dfrac{b}{c}$，

若把各边扩大为原来的 3 倍，

则各边为 $3a$，$3b$，$3c$，

那么 $\cos A=\dfrac{3b}{3c}=\dfrac{b}{c}$，

所以余弦值不变.

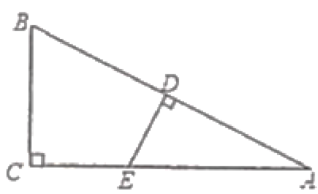
故选 B.

【正解】B

## 典型例题

### 一、单选题

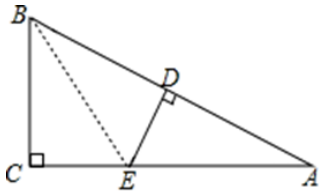
1．如图，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°$，点 $D$ 是 $AB$ 的中点，$DE\perp AB$ 交 $AC$ 于点 $E$，$DE=CE=\sqrt{3}$，则 $AB$ 的长为（　）



A． 3　　　　　　　B． $3\sqrt{3}$　　　　　　　C． 6　　　　　　　D． $6\sqrt{3}$

【答案】C

【详解】解：连接 BE，




∵D 是 AB 的中点，

∴$BD=AD=\frac{1}{2}AB$

∵∠C=∠BDE=90°，

在 Rt△BCE 和 Rt△BDE 中，

∵$\begin{cases}DE=CE\\BE=BE\end{cases}$，

∴△BCD≌△BDE，

∴$BC=BD=\frac{1}{2}AB$.

∴∠A=30°.

∴$\tan A=\frac{DE}{AD}$

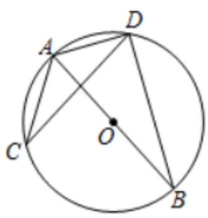
即 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{AD}$，

∴AD=3，

∴AB=2AD=6.

故选 C.

2．如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 和点 D 是⊙O 上位于直径 AB 两侧的点，连接 AC，AD，BD，CD，若⊙O 的半径是 13，BD＝24，则 sin∠ACD 的值是（　　）




A． $\frac{12}{13}$　　　　　　　B． $\frac{12}{5}$　　　　　　　C． $\frac{5}{12}$　　　　　　　D． $\frac{5}{13}$

【答案】D

【详解】∵AB 是直径，

∴∠ADB＝90°，

∵⊙O 的半径是 13，

∴AB＝2×13＝26，

由勾股定理得：AD＝10，

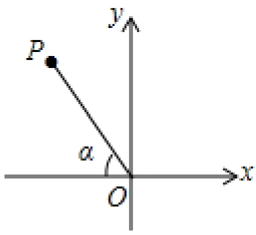
∴sin∠B＝$\frac{AD}{AB}=\frac{10}{26}=\frac{5}{13}$

∵∠ACD＝∠B，

∴sin∠ACD＝sin∠B＝$\frac{5}{13}$，

故选 D．

3．如图，点 $P$ 在第二象限，$OP$ 与 $x$ 轴负半轴的夹角是 $\alpha$，且 $OP=5, \cos\alpha=\frac{3}{5}$，则 $P$ 点的坐标为（）




A．$(3,4)$　　B．$(-3,4)$　　C．$(-4,3)$　　D．$(-3,5)$

【答案】B

【详解】过点 P 作 PA⊥x 轴于 A，

∵ $OP=5, \cos\alpha=\frac{3}{5}$，

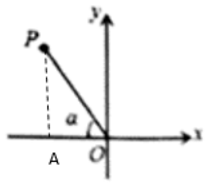
∴ $OA=OP\cdot\cos\alpha=5\times\frac{3}{5}=3$，

∴ $PA=\sqrt{OP^2-OA^2}$ =4，

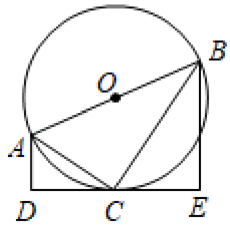
∵点 $P$ 在第二象限，

∴点 P 的坐标是（-3,4）

故选：B.




4．如图，$AB$ 是⊙$O$ 的直径，直线 $DE$ 与⊙$O$ 相切于点 $C$，过 $A$，$B$ 分别作 $AD\perp DE$，$BE\perp DE$，垂足为点 $D$，$E$，连接 $AC$，$BC$，若 $AD=\sqrt{3}$，$CE=3$，则 $\overset{\frown}{AC}$ 的长为（　　）




A．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$　　D．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

【答案】D

【详解】解：连接 $OC$，

∵$AB$ 是⊙$O$ 的直径，

∴$\angle ACB=90°$，

∴$\angle ACD+\angle BCE=90°$，

∵$AD\perp DE$，$BE\perp DE$，

∴$\angle DAC+\angle ACD=90°$，

∴$\angle DAC=\angle ECB$，

∵$\angle ADC=\angle CEB=90°$，

∴$\triangle ADC\backsim\triangle CEB$，

∴$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{CE}$，即 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

∵$\tan\angle ABC=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

∴$\angle ABC=30°$，

∴$AB=2AC$，$\angle AOC=60°$，

∵直线 $DE$ 与⊙$O$ 相切于点 $C$，

∴$\angle ACD=\angle ABC=30°$，

∴$AC=2AD=2\sqrt{3}$，

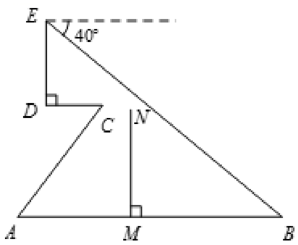
∴$AB=4\sqrt{3}$，

∴⊙$O$ 的半径为 $2\sqrt{3}$，

∴ $\overset{\frown}{AC}$ 的长为：$\dfrac{60\pi\bullet2\sqrt{3}}{180}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$，

故选：$D$．

5．如图，地面上点 A 和点 B 之间有一堵墙 MN（墙的厚度忽略不计），在墙左侧的小明想测量墙角点 M 到点 B 的距离．于是他从点 A 出发沿着坡度为 $i=1$：0.75 的斜坡 AC 走 10 米到点 C，再沿水平方向走 4 米到点 D，最后向上爬 6 米到达瞭望塔 DE 的顶端点 E，测得点 B 的俯角为 40°．已知 AM=8 米，则 BM 大约为（　）米．（参考数据：sin40°≈0.64，cos40°≈0.77，tan40°≈0.84）




A．8.6　　　　　B．10.7　　　　　C．15.4　　　　　D．16.7

【答案】B

【详解】如图，过 E 点作 DF⊥AB 于 F 点，过 C 点作 CG⊥AB 于 G 点，

∵AC=10，坡比为 $i=1$：0.75，

∴CG=8，AG=6，

∴EF=ED+DF=6+8=14，

又∠B=40°，

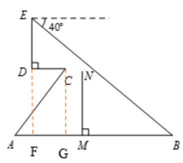
∴BF=$\dfrac{EF}{\tan40°}=\dfrac{14}{0.84}$=16.7，

又 GM=AM-AG=2，

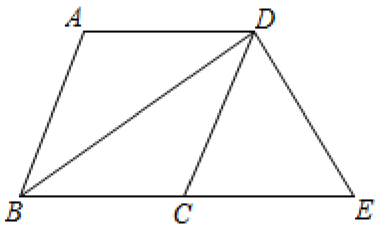
∴AF=AM-FG-GM=2，

∴BM=AB-AM=16.7+2-8=10.7，

故选 B.



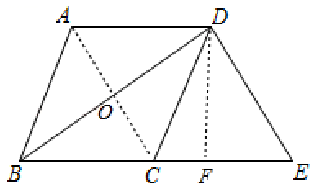

6．如图，面积为 24 的▱$ABCD$ 中，对角线 $BD$ 平分∠$ABC$，过点 $D$ 作 $DE$⊥$BD$ 交 $BC$ 的延长线于点 $E$，$DE$＝6，则 sin∠$DCE$ 的值为（　　）




A．$\frac{24}{25}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{12}{25}$

【答案】A

【详解】解：连接 $AC$，过点 $D$ 作 $DF\perp BE$ 于点 $E$，




∵$BD$ 平分∠$ABC$，

∴∠$ABD$＝∠$DBC$，

∵Y $ABCD$ 中，$AD$∥$BC$，

∴∠$ADB$＝∠$DBC$，

∴∠$ADB$＝∠$ABD$，

∴$AB$＝$BC$，

∴四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AC\perp BD$，$OB$＝$OD$，

∵$DE\perp BD$，

∴$OC$∥$ED$，

∵$DE$＝6，

∴$OC=\frac{1}{2}DE=3$，

∴AC=6，

∵Y $ABCD$ 的面积为 24，

∴$\frac{1}{2}BD\bullet AC=24$，

∴$BD$＝8，

∴$BC=CD=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

设 $CF=x$，则 $BF=5+x$，

由 $BD^2-BF^2=DC^2-CF^2$ 可得：$8^2-(5+x)^2=5^2-x^2$，

解得 $x=\frac{7}{5}$，

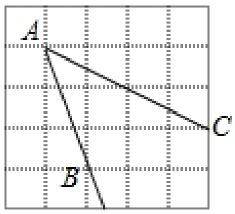
$\therefore DF=\frac{24}{5}$，

$\therefore \sin\angle DCE=\frac{DF}{DC}=\frac{\frac{24}{5}}{5}=\frac{24}{25}$．

故选：$A$．

**二、填空题**

7．将 $\angle BAC$ 放置在 $5\times5$ 的正方形网格中，顶点 $A$、$B$、$C$ 在格点上．则 $\sin\angle BAC$ 的值为______．




【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【详解】解：如图所示：连接 $BC$，

$\because AB=BC=\sqrt{10}$，$AC=2\sqrt{5}$，

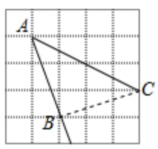
$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$，

$\therefore \angle ABC=90^\circ$，

$\therefore \angle BAC=\angle ACB=45^\circ$，

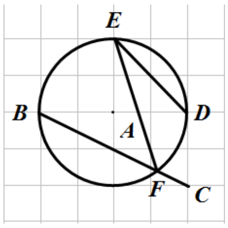
$\therefore \sin\angle BAC=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$．




．

8．如图，边长为 1 的小正方形网格中，点 $A,B,C,D,E$ 均在格点上，半径为 2 的 $\odot A$ 与 $BC$ 交于点 $F$，则 $\tan\angle DEF=$____________．




【答案】$\frac{1}{2}$

【详解】解：$\because \overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{DF}$，

$\therefore \angle DEF=\angle DBF$，

∴在 Rt△$BCD$ 中，

$\therefore \tan\angle DEF=\tan\angle DBC=\dfrac{DC}{BD}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$

**三、解答题**

9．计算：

（1）$2\cos^2 30°-2\sin 60°\cdot\cos 45°$；

（2）$\sqrt{\tan^2 60°+4\tan 60°+4}-\dfrac{2\sqrt{2}\sin 45°}{\tan 60°-\tan 45°}$

【答案】（1）$\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$；（2）$1-2\sqrt{3}$.

【详解】解：（1）原式$=2\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$；

（2）原式$=\sqrt{3-4\sqrt{3}+4}-\dfrac{2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}-1}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

$=2-\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)$

$=1-2\sqrt{3}$.

10．如图，A，$B$，$C$ 是半径为 2 的⊙$O$ 上三个点，$AB$ 为直径，$\angle BAC$ 的平分线交⊙$O$ 于点 $D$，过点 $D$ 作 $AC$ 的垂线，交 $AC$ 的延长线于点 $E$，延长 $ED$ 交 $AB$ 的延长线于点 $F$．