山东省潍坊市昌邑市2024-2025学年高三上学期11月期中考试

数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合 $A=\{x\,|\,(x-1)(x+2)=0\}$，$B=\{x\,|\,-3<2x-1<3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{-2,1\}$　　B．$(-2,1)$　　C．$\{1\}$　　D．$(-1,2)$

2．命题“所有能被3整除的整数都是质数”的否定是（　　）

A．存在一个能被3整除的整数不是质数

B．所有能被3整除的整数都不是质数

C．存在一个能被3整除的整数是质数

D．不能被3整除的整数不是质数

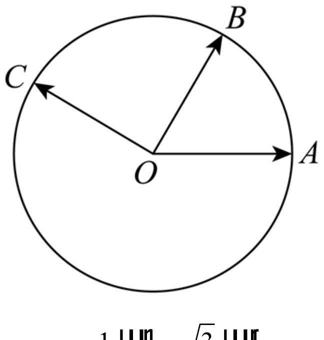
3．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $2S_3=S_2+3S_1,a_5=1$，则 $\{a_n\}$ 的公差等于（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

4．为净化水质，向一个游泳池加入某种化学药品，加药后池水中该药品浓度 C 随时间 t 的变化关系为 $Ct^2-20t+4C=0$，则 C 的最大值为（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．5

5．如图，A,B,C 是圆 O 上的三点，且 $\angle AOB=60°,\angle BOC=90°$，则 $\overrightarrow{OA}=$（　　）



A．$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC}$　　B．$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC}$

C．$\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

6．已知一个圆锥的底面圆半径为1，其侧面展开图是一个圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形，则该圆锥的体积为（　　）

A．$2\sqrt{2}\pi$　　B．$\frac{2\pi}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

7．已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f\left(x\right)$满足$f\left(x-y+1\right)-f\left(x+y+1\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)$，且$f\left(1\right)=2$，则$f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)=$（　）

A．2　　B．0　　C．-2　　D．-4

8．已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(0<\omega<3,\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{2}\right)$，甲、乙、丙、丁四位同学各说出了这个函数的一条结论：

甲：函数$f\left(x\right)$的图象关于$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$对称；

乙：函数$f\left(x\right)$在$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增；

丙：函数$f\left(x\right)$在区间$\left(0,\pi\right)$上有3个零点；

丁：函数$f\left(x\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位之后与$f\left(x\right)$的图象关于x轴对称.

若这四位同学中恰有一人的结论错误，则该同学是（　）

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

二、多选题

9．已知直线m,n是平面α外两条不同的直线，则下列命题正确的是（　）

A．若$m//\alpha,n//\alpha$，则$m//n$

B．若$m//n,n//\alpha$，则$m//\alpha$

C．若$m//n,m\perp\alpha$，则$n\perp\alpha$

D．若$m//\alpha,n\perp\alpha$，则$m\perp n$

10．已知$0<a<b<3$，则（　）

A．$(a+1)^{b}>1$　　B．$\log_{a}\left(b+1\right)>1$

C．$\cos\left(\pi+a\right)<\cos\left(\pi+b\right)$　　D．$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)<\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$

11．设函数$f\left(x\right)=\frac{\cos\pi x}{x^{2}-ax+2}$，则（　）

A．存在实数a，使得$f\left(x\right)$为偶函数

B．函数$f\left(x\right)$的图象关于$x=\frac{a}{2}\left(a\in\mathbf{Z}\right)$对称

C．当 $a=2$ 时，$\left|f\left(\frac{1}{2}-x\right)\right|<4|x|$

D．当 $a=4$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(2,3\right)$ 上单调递增

三、填空题

12．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}\right|=1$，$\vec{b}=\left(1,1\right)$，$\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则 $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=$________.

13．已知点 $P\left(\frac{\pi}{8},0\right)$ 在函数 $f\left(x\right)=\sin\omega x-\frac{\sqrt{2}}{2}(0<\omega<3)$ 的图象上，则曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 P 处的切线方程为________.

14．已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=1$，且对于任意 $n\geq 2$，都存在 $k\in\left\{1,2,\cdots,n-1\right\}$，使得 $a_n=a_k+4$，则 a_4 的所有可能取值构成的集合 $M=$_____；若 $\left\{a_n\right\}$ 的各项均不相等，把半径为 a_1,a_2,a_3（单位：cm）的三个小球放入一个正方体容器（容器壁厚度忽略不计），则该正方体容器的棱长最小值为_____cm.

四、解答题

15．记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\sqrt{3}a\sin C-c=c\cos A$.

(1)求 A；

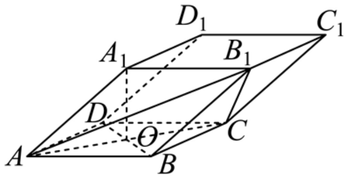
(2)若 $a=\sqrt{21},b+c=6$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

16．已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1+\frac{a_2}{2^2-1}+\frac{a_3}{2^3-1}+\cdots+\frac{a_n}{2^n-1}=2^n-1$.

(1)求 S_n；

(2)设 $b_n=\frac{3S_n+64}{2^n}$，若数列 $\left\{b_n\right\}$ 的最小项为 b_m，求 m.

17．如图，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AB=2$，$AC\cap BD=O$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD$.



(1)证明：$AA_1 \perp BD$；

(2)若 $AA_1 = 2A_1O = 2$，$\angle BAD = \dfrac{\pi}{3}$，点 P 在平面 AB_1C 内，且 $BP \perp$ 平面 AB_1C，求 BP 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.

18．已知函数 $f\left(x\right) = ax^2 - \ln\left(x+1\right) + x\left(a \in \mathbf{R}\right)$.

(1)当 $a \geq 0$ 时，讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

(2) $g\left(x\right) = f\left(x\right) + \left(x+1\right)\mathrm{e}^x - 2x - 1$.

（i）当 $a = 0$ 时，求 $g\left(x\right)$ 的最小值；

（ii）若 $g\left(x\right) \geq 0$ 在 $\left[0, +\infty\right)$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

19．已知 $f\left(x\right)$ 为定义域 M 内的连续函数，$f'\left(x\right)$ 为其导函数，常数 $a \in M$，若各项不相等的数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_n \in M$，$a_1 > a$，$f'\left(a_{n+1}\right) = \dfrac{f\left(a_n\right) - f\left(a\right)}{a_n - a}$，则称 $\left\{a_n\right\}$ 为 $f\left(x\right)$ 的“拉格朗日数列”，简记为“$L\left(a\right) -$ 数列”.

(1)若函数 $g\left(x\right) = \ln x$，数列 $\left\{b_n\right\}$ 是 $g\left(x\right)$ 的“$L\left(1\right) -$ 数列”，且 $b_1 = \mathrm{e}$.

（i）求 b_2，b_3；

（ii）证明：$\left\{b_n\right\}$ 是递减数列；

(2)正项数列 $\left\{c_n\right\}$ 是函数 $h\left(x\right) = x^3 + 6\sin x$ 的“$L\left(c\right) -$ 数列”，已知 $c_{n+1} \in \left(c, c_n\right)$，记 $\left\{c_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明：$c > 0$ 时，$S_n + c_n \geq \left(n-1\right)c + 2c_1$.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	B	D	A	D	C	C	BCD	AC
题号	11									
答案	ACD									

1．C

【分析】分别求出集合A，B，再利用交集定义求解即可.

【详解】$A=\{x\mid(x-1)(x+2)=0\}=\{1,-2\}$，

$B=\{x\mid -3<2x-1<3\}=\{x\mid -1<x<2\}$，

$\therefore A\cap B=\{1\}$.

故选：C.

2．A

【分析】全称量词命题的否定是一个存在量词命题，根据全称命题的否定方法，可得到结论

【详解】命题“所有能被3整除的整数都是质数”的否定是“存在一个能被3整除的数不是质数”.

故选：A.

3．B

【分析】本题考查等差数列基本量的计算，根据等差数列的性质，列出通项以及前n项和，解出数列的公差$d=-1$.

【详解】根据等差数列的定义和题目条件，有：$a_5=a_1+4d=1$，

$2(3a_1+3d)=2a_1+d+3a_1$，

整理得$\begin{cases}a_1+4d=1\\6a_1+6d=5a_1+d\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a_1=5\\d=-1\end{cases}$.

故选：B

4．D

【分析】利用基本不等式可求C的最大值.

【详解】由题设$t>0$，从而$C=\frac{20t}{t^2+4}\leq\frac{20t}{4t}=5$，当且仅当$t=2$时等号成立，

故C的最大值为5.

故选：D.

5．A

【分析】设$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$，则利用数量积可求$\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【详解】设圆的半径为R，

设$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OB}^2+\mu\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}$，

而$\angle AOB=60°,\angle BOC=90°$，故$\frac{1}{2}R^2=\lambda R^2$即$\lambda=\frac{1}{2}$，

又$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}^2$，而$\angle AOC=150°$，

故$-\frac{\sqrt{3}}{2}R^2=\mu R^2$，故$\mu=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故$\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC}$，

故选：A.

6．D

【分析】先根据扇形的弧长公式求出圆锥的母线长，进而求出高，再根据圆锥的体积公式求解即可.

【详解】设圆锥的母线长为l，高为h，

则$\frac{2\pi}{3}l=2\pi$，解得$l=3$，

所以$h=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，

所以圆锥的体积$V=\frac{1}{3}\pi\times1^2\times2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$.

故选：D.

7．C

【分析】分别对x、y赋值，结合已知条件分别求出$f(3)$、$f(2)$、$f(4)$的值，即可得解.

【详解】令$x=y=1$可得$f(1)-f(3)=f(1)\cdot f(1)$，即$2-f(3)=2^2$，解得$f(3)=-2$，

令$x=1$，$y=0$可得$f(1)f(0)=f(2)-f(2)=0$，则$f(0)=0$，

令$x=0$，$y=1$可得$f(0)-f(2)=f(0)f(1)=0$，则$f(2)=f(0)=0$，

令$x=2$，$y=1$可得$f(2)-f(4)=f(2)f(1)=0$，可得$f(4)=f(2)=0$，

因此，$f(2)+f(3)+f(4)=-2$.

故选：C.

8．C

【分析】对每位同学的结论进行推敲，求出对应的ω的取值范围或值，再对比四个结论，可得出结果.

【详解】设函数$f(x)$的最小正周期为T.

对于甲：因为函数$f(x)$的图象关于$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$对称，则$\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$；

对于乙：因为函数$f(x)$在$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增，

则$\frac{T}{2}\geq\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$，可得$T\geq\pi$，又$\omega>0$

所以，$\omega=\frac{2\pi}{T}\leq 2$，又因为$0<\omega<3$，则$0<\omega\leq 2$；

对于丙：因为函数$f(x)$在区间$(0,\pi)$上有3个零点，则$T<\pi<2T$，可得$\frac{\pi}{2}<T<\pi$，

所以，$\omega=\frac{2\pi}{T}\in(2,4)$，由于$0<\omega<3$，则$2<\omega<3$；

对于丁：因为函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位之后与$f(x)$的图象关于x轴对称.

则$\frac{(2n+1)T}{2}=\frac{2n+1}{\omega}=\frac{\pi}{2}(n\in\mathbf{N})$，即$\omega=4n+2(n\in\mathbf{N})$，

因为$0<\omega<3$，所以，$\omega=2$满足条件，

故丙的结论错误，此时，$\omega=2$，则$\varphi=k\pi-\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

因为$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，故$\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以，$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

且当$-\frac{5\pi}{12}\leq x\leq\frac{\pi}{12}$时，$-\frac{\pi}{2}\leq 2x+\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{2}$，即函数$f(x)$在$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增，

乙同学的结论正确.

故选：C.

【点睛】关键点点睛: 解本题的关键在于对每位同学的结论进行推敲，求出符合条件的ω的范围或值，进而判断.

9．BCD

【分析】根据空间中线线、线面位置关系一一判断即可.

【详解】对于 A:若$m // \alpha, n // \alpha$，则m,n可以平行，相交，异面，A 选项错误；

对于 B: 若$m//n$，$n//\alpha$，此时$m\subset\alpha$或$m//\alpha$，已知直线m是平面α外的直线,故 B 选项正确；

对于 C: 两条平行直线，其中一条与一个平面垂直，则另一条也与该平面垂直，故 C 选项正确；

对于 D: 若$m//\alpha$，则存在$m'\subset\alpha$使得$m//m'$，

又$n\perp\alpha$，所以$n\perp m'$，则$m\perp n$，故 D 选项正确.

故选：BCD.

10．AC

【分析】利用单调性比较大小对选项逐一分析即可.

【详解】对于 A：函数$y=a^x(a>1)$为增函数，且当$x>0$时，$y>1$，

因为$0<a<b<3$，所以$a+1>1$，且$(a+1)^b>1$，故 A 正确；

对于 B：因为$0<a<b<3$，所以$b+1>a$，

当$a>1$时，函数$y=\log_a x$为增函数，

所以$\log_a(b+1)>\log_a a=1$，

当$0<a<1$时，函数$y=\log_a x$为减函数，

所以$\log_a(b+1)<\log_a a=1$，故B 错误；

对于C：$y=\cos x$在$(\pi,2\pi)$上单调递增，又$0<a<b<3$，

所以$\pi+a<\pi+b$，所以$\cos(\pi+a)<\cos(\pi+b)$，故C 正确；

对于D：$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a,\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=\sin b$，

$y=\sin x$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减，当$\frac{\pi}{2}<a<b<3$时，

$\sin a>\sin b$，即$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)>\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$，故D 错误.

故选：AC.

11．ACD

【分析】对于 A，根据偶函数性质可得$f(x)=f(-x)$代入可求解；对于 B，函数关于

$x=\frac{a}{2}(a\in\mathbf{Z})$对称，则$f\left(\frac{a}{2}-x\right)=f\left(\frac{a}{2}+x\right)$特殊值代入即可判断；对于 C，$f\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{\sin\pi x}{x^2+x+\frac{5}{4}}$，构造新的函数$h(x)=x-\sin x,x\geq 0$，对其求导可知$h(x)\geq h(0)$，又因$h(x)$关于原点对称，所以可得$|\sin x|\leq|x|$，对分母可知$x^2+x+\frac{5}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\geq 1$，对不等式进行缩放即可判断；对于 D，将$a=4$代入，可得$f(x)=\frac{\cos\pi x}{x^2-4x+2}=\frac{\cos\pi x}{(x-2)^2-2}$，作差分类讨论$f(x_1)-f(x_2)$的符号，即可得$f(x)=\frac{\cos\pi x}{(x-2)^2-2}$单调性.

【详解】对于 A，若$f(x)$为偶函数，则$f(x)=\frac{\cos\pi x}{x^2-ax+2}=f(-x)=\frac{\cos-\pi x}{x^2+ax+2}$，

可得$x^2-ax+2=x^2+ax+2$，可得$a=0$，故 A 正确；

对于 B，函数关于$x=\frac{a}{2}(a\in\mathbf{Z})$对称，则$f\left(\frac{a}{2}-x\right)=f\left(\frac{a}{2}+x\right)$，不妨设$a=1,x=\frac{1}{2}$，

则$f(0)=\frac{1}{2}$，$f(1)=-\frac{1}{2}$，故 B 错误；

对于 C，$f\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{\sin\pi x}{x^2+x+\frac{5}{4}}$，构造新的函数$h(x)=x-\sin x,x\geq 0$，

对其求导可知$h'(x)=1-\cos x$，$h'(x)\geq 0$，

所以$h(x)=x-\sin x,x\geq 0$单调递增，则$h(x)\geq h(0)$，

又因$h(x)$关于原点对称，所以可得$|\sin x|\leq|x|$，

可得$|\sin\pi x|\leq\pi|x|\leq 4|x|$对分母可知$x^2+x+\frac{5}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\geq 1$，

由于上述的两式不能同时取等，所以$\left|f\left(\frac{1}{2}-x\right)\right|<4|x|$，故 C 正确；

对于 D，将$a=4$代入，可得$f(x)=\frac{\cos\pi x}{x^2-4x+2}=\frac{\cos\pi x}{(x-2)^2-2}$，

设$2<x_1<x_2<3$，$\cos\pi x$在$(2,3)$上单调递减，所以$1>\cos\pi x_1>\cos\pi x_2>-1$

x^2-4x-2在$(2,3)$上单调递增，且恒为负，则$x_1^2-4x_1+2<x_2^2-4x_2+2<0$，

故$\left(x_1^2-4x_1+2\right)\left(x_2^2-4x_2+2\right)>0$

则$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\dfrac{\cos\pi x_1}{x_1^2-4x_1+2}-\dfrac{\cos\pi x_2}{x_2^2-4x_2+2}$

$=\dfrac{\cos\pi x_1\cdot\left(x_2^2-4x_2+2\right)-\cos\pi x_2\cdot\left(x_1^2-4x_1+2\right)}{\left(x_1^2-4x_1+2\right)\left(x_2^2-4x_2+2\right)}$

当$0>\cos\pi x_1>\cos\pi x_2>-1$时，$\cos\pi x_1\cdot\left(x_2^2-4x_2+2\right)-\cos\pi x_2\cdot\left(x_1^2-4x_1+2\right)<0$

故$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$

当$1>\cos\pi x_1>\cos\pi x_2>0$，$\cos\pi x_2\cdot\left(x_1^2-4x_1+2\right)<\cos\pi x_2\cdot\left(x_2^2-4x_2+2\right)$

$\cos\pi x_1\cdot\left(x_1^2-4x_1+2\right)<\cos\pi x_1\cdot\left(x_2^2-4x_2+2\right)$，

$\cos\pi x_1\cdot\left(x_2^2-4x_2+2\right)-\cos\pi x_2\cdot\left(x_1^2-4x_1+2\right)>\cos\pi x_1\cdot\left(x_1^2-4x_1+2\right)-\cos\pi x_2\cdot\left(x_1^2-4x_1+2\right)<0$故

$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$

当$0>\cos\pi x_1>0>\cos\pi x_2>-1$，则$\cos\pi x_1\cdot\left(x_2^2-4x_2+2\right)-\cos\pi x_2\cdot\left(x_1^2-4x_1+2\right)<0$

故$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$

综上所以可得$f\left(x\right)=\dfrac{\cos\pi x}{\left(x-2\right)^2-2}$单调递增，故 D 正确.

故选：ACD

12．$\dfrac{\pi}{4}$

【分析】根据向量垂直，则数量积为 0 得到$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，再利用向量夹角的余弦公式求解即可.

【详解】$\because\ \vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，$\therefore\ \vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\because\ \vec{b}=\left(1,1\right)$，$\therefore\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$，

$\therefore\ \cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because\ \left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\in\left[0,\pi\right]$，$\therefore\ \left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\pi}{4}$.

故答案为：$\dfrac{\pi}{4}$.

13．$\sqrt{2}x-y-\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}=0$