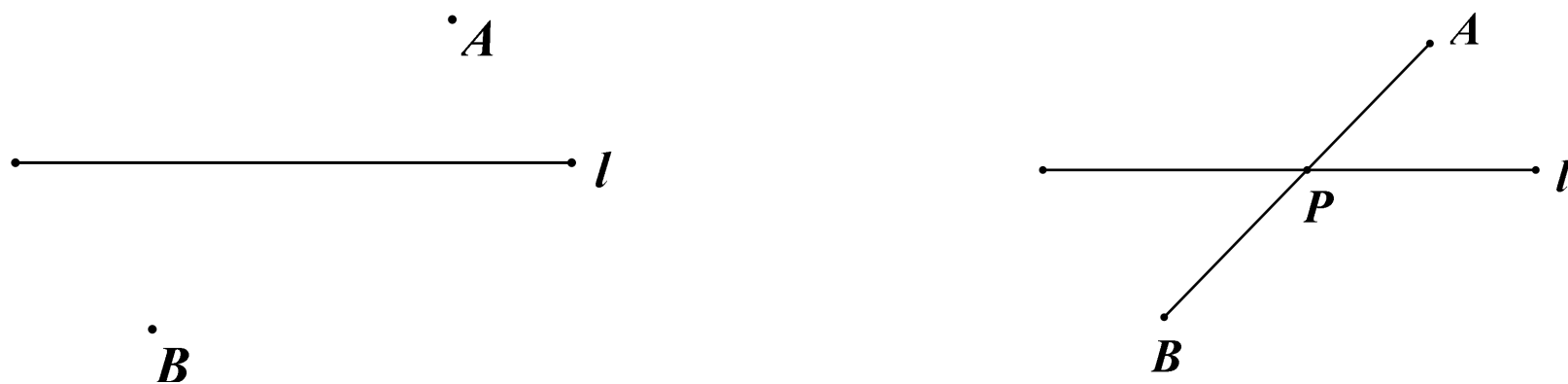


专题 8 将军饮马模型

解题策略

模型 1：当两定点 A、B 在直线 l 异侧时，在直线 l 上找一点 P，使 $PA + PB$ 最小。



连接 AB 交直线 l 于点 P，点 P 即为所求作的点。PA + PB 的最小值为 AB。

模型 2：当两定点 A、B 在直线 l 同侧时，在直线 l 上找一点 P，使得 $PA + PB$ 最小。



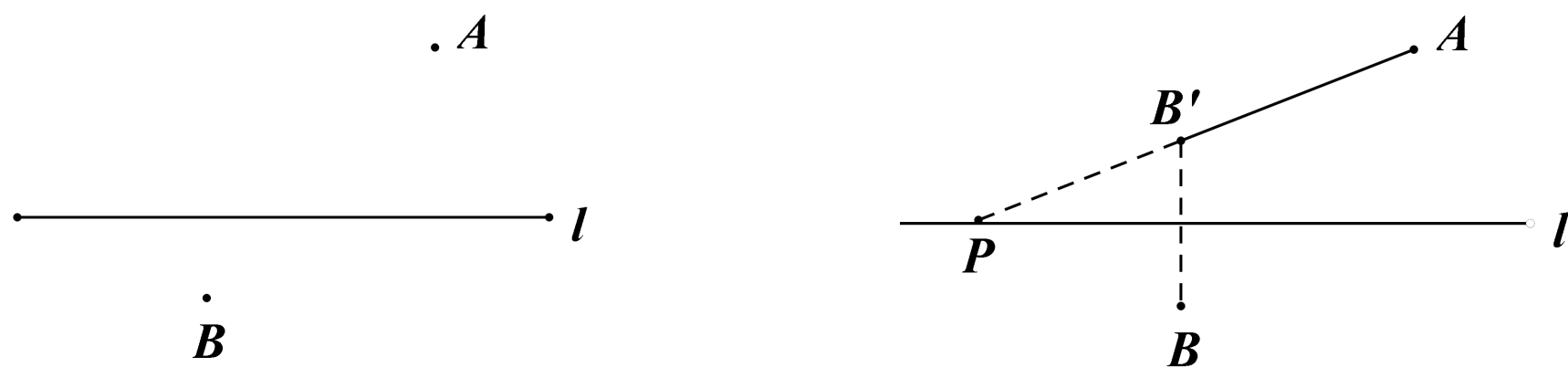
作点 B 关于直线 l 的对称点 B'，连接 AB' 交直线 l 于点 P，点 P 即为所求作的点。PA + PB 的最小值为 AB'。

模型 3：当两定点 A、B 在直线 l 同侧时，在直线 l 上找一点 P，使得 $|PA - PB|$ 最大。



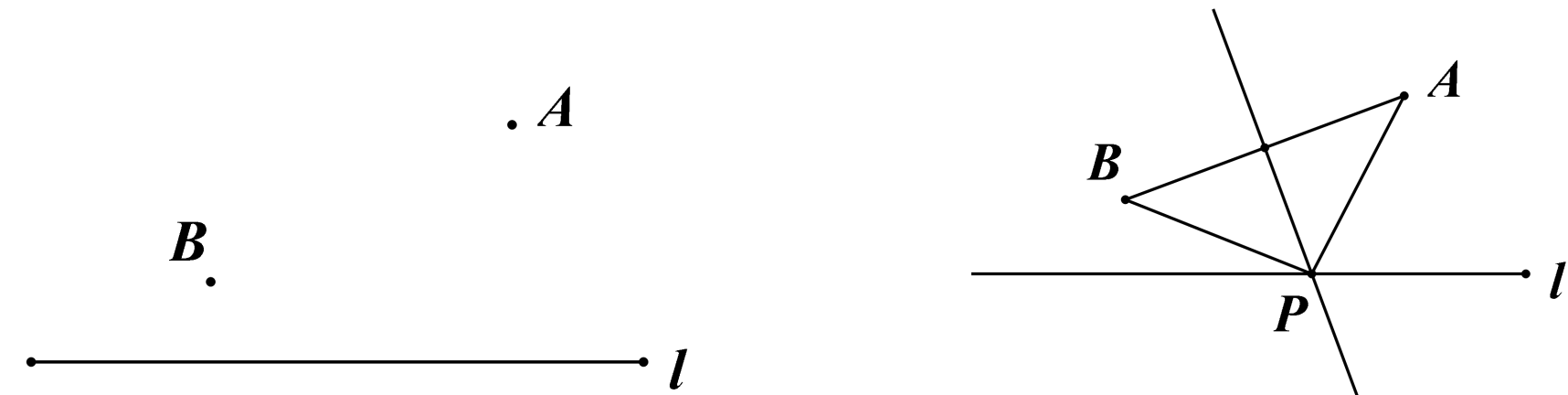
连接 AB 并延长交直线 l 于点 P，点 P 即为所求作的点， $|PA - PB|$ 的最大值为 AB。

模型 4：当两定点 A、B 在直线 l 异侧时，在直线 l 上找一点 P，使得 $|PA - PB|$ 最大。



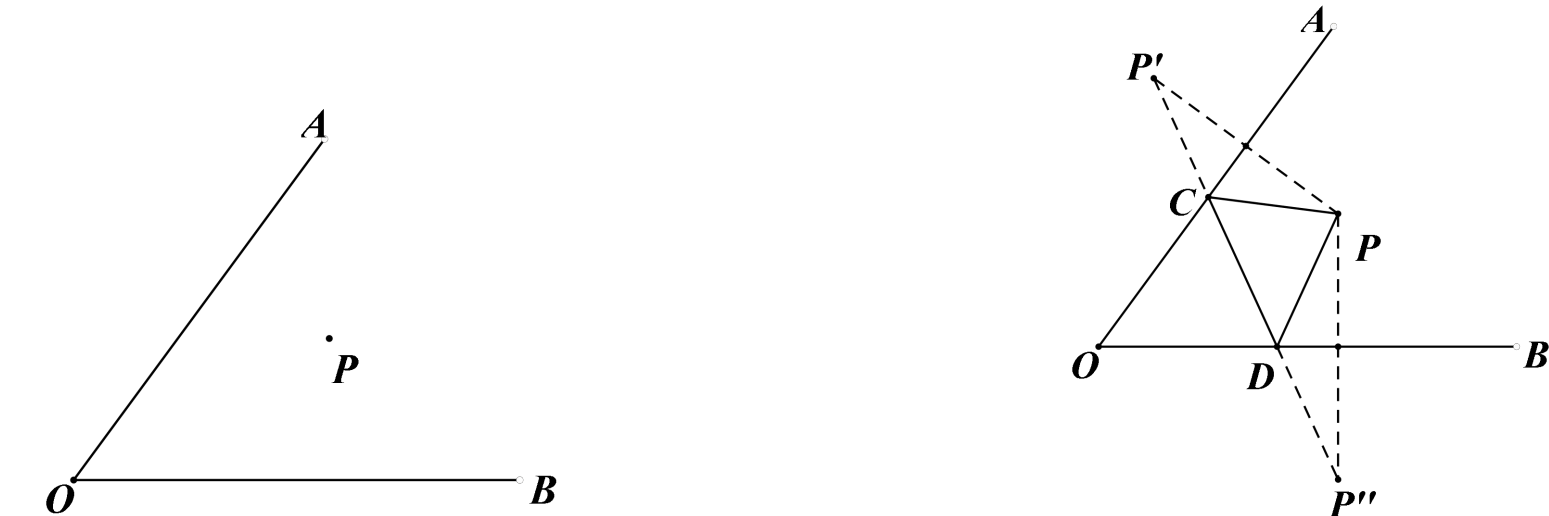
作点 B 关于直线 l 的对称点 B'，连接 AB' 并延长交直线 l 于点 P，点 P 即为所求作的点。 $|PA - PB|$ 的最大值为 AB'。

模型 5：当两定点 A、B 在直线 l 同侧时，在直线 l 上找一点 P，使得 $|PA - PB|$ 最小。



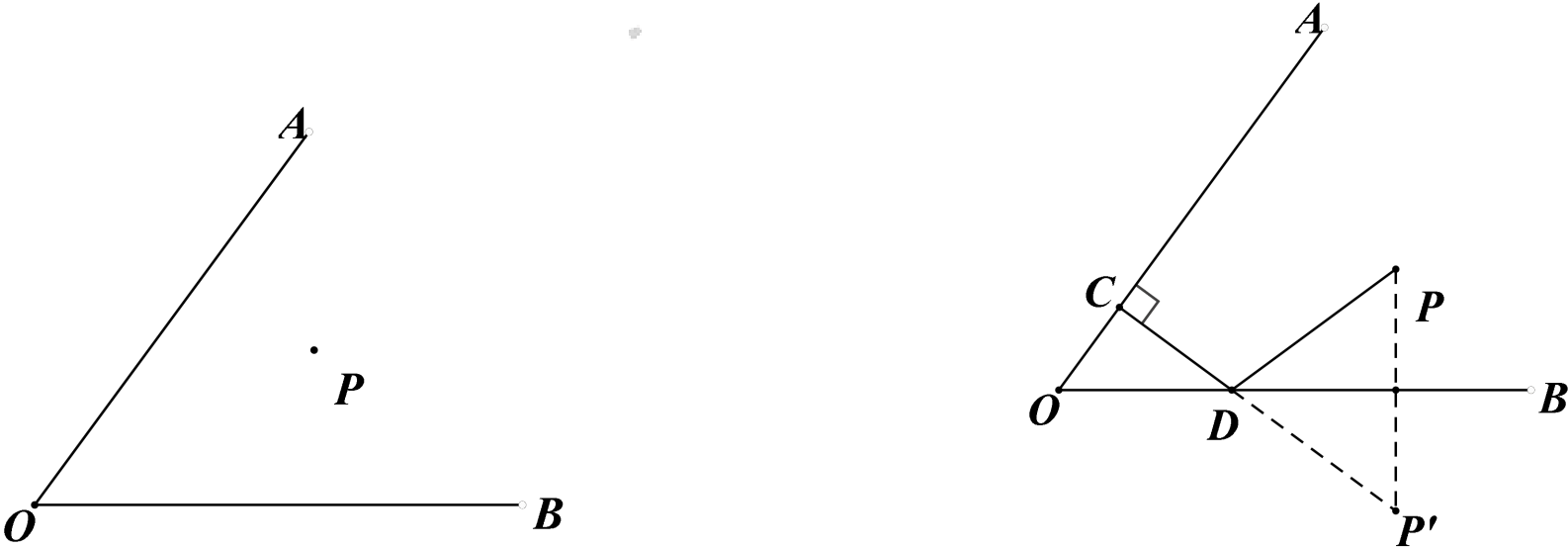
连接 AB，作 AB 的垂直平分线交直线 l 于点 P，点 P 即为所求作的点。 $|PA - PB|$ 的最小值为 0

模型 6：点 P 在 $\angle AOB$ 内部，在 OB 边上找点 D，OA 边上找点 C，使得 $\triangle PCD$ 周长最小。



分别作点 P 关于 OA、OB 的对称点 P'、P''，连接 P' P'' 交 OA、OB 于点 C、D，点 C、D 即为所求。 $\triangle PCD$ 周长的最小值为 $P' P''$

模型 7：点 P 在 $\angle AOB$ 内部，在 OB 边上找点 D，OA 边上找点 C，使得 $PD + CD$ 最小。



作点 P 关于 OB 的对称点 P'，过 P' 作 $P' \perp OA$ 交 OB， $PD + CD$ 的最小值为 $P' C$

经典例题

【例 1】. (2022 湖南师大附中博才实验中学九年级开学考试) 如果有一条直线经过三角形的某个顶点, 将三角形分成两个三角形, 其中一个三角形与原三角形相似, 则称该直线为三角形的“自相似分割线”. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=1$, $\angle BAC=108^\circ$, DE 垂直平分 AB , 且交 BC 于点 D , 连接 AD .

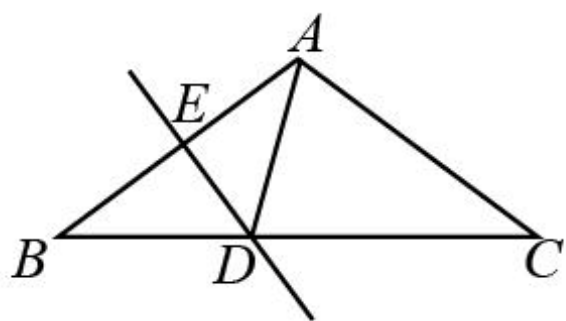


图1

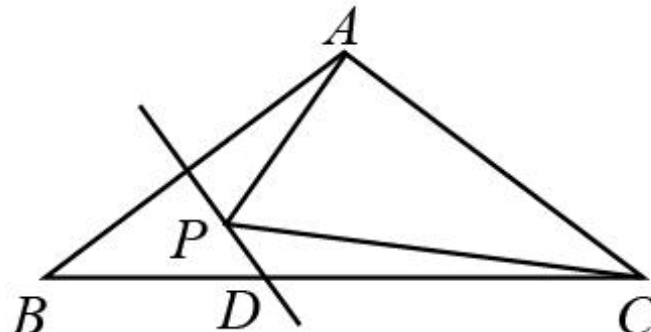


图2

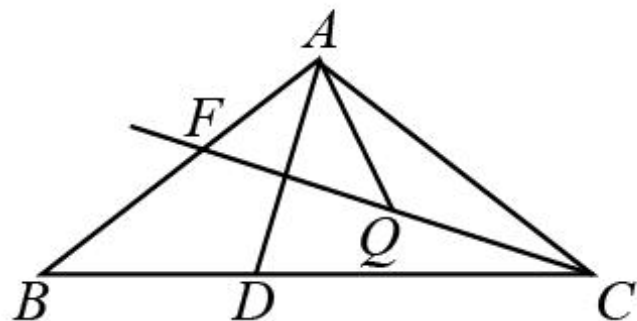
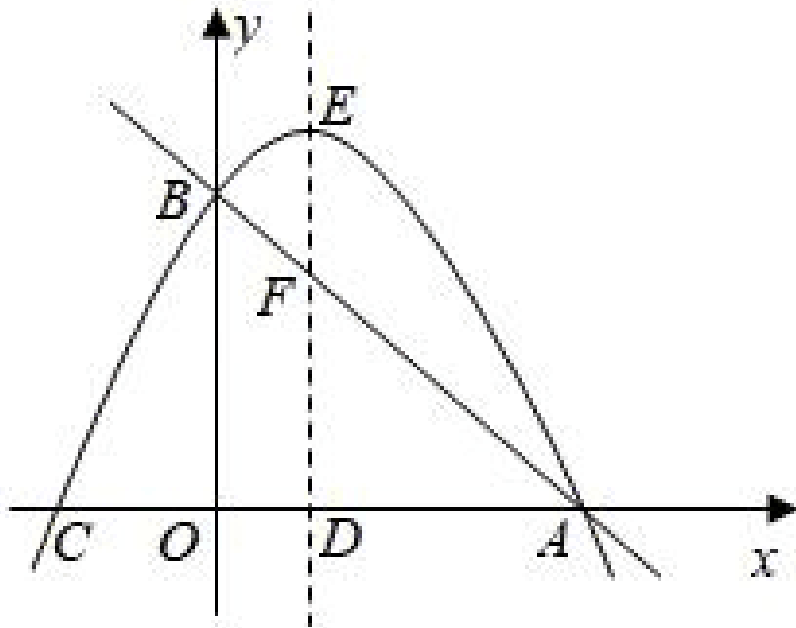


图3

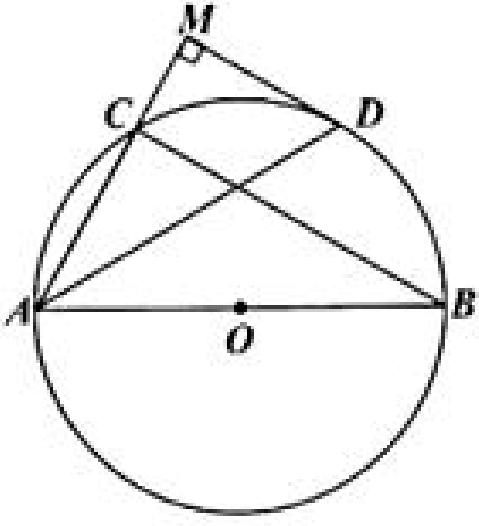
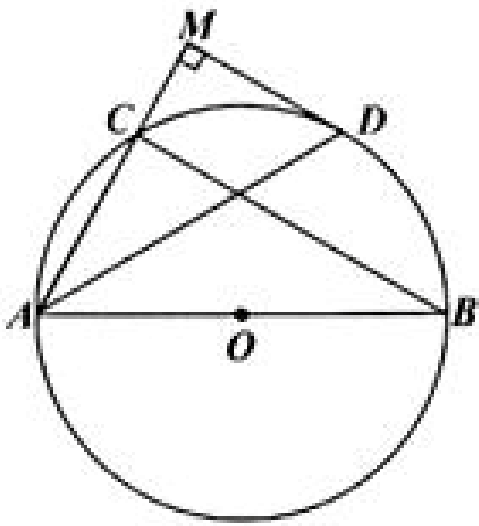
- (1) 证明直线 AD 是 $\triangle ABC$ 的自相似分割线;
- (2) 如图 2, 点 P 为直线 DE 上一点, 当点 P 运动到什么位置时, $PA+PC$ 的值最小? 求此时 $PA+PC$ 的长度.
- (3) 如图 3, 射线 CF 平分 $\angle ACB$, 点 Q 为射线 CF 上一点, 当 $AQ + \frac{\sqrt{5}-1}{4}CQ$ 取最小值时, 求 $\angle QAC$ 的正弦值.

【例 2】.（2021 四川南充 一·模）如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 A（4， 0）、B（0， 4）、C． 其对称轴 l 交 x 轴于点 D， 交直线 AB 于点 F， 交抛物线于点 E．

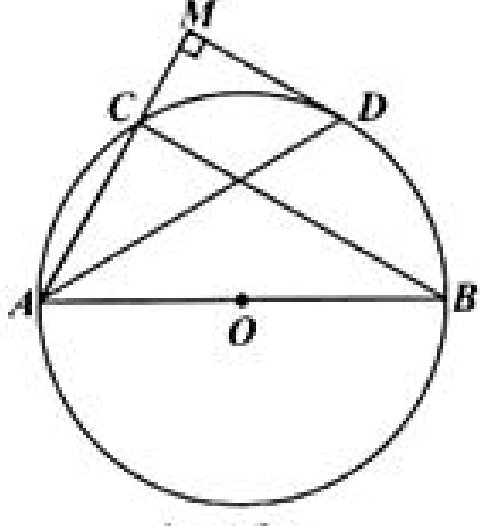


- (1)求抛物线的解析式；
- (2)点 P 为直线 l 上的动点，求 $\triangle PBC$ 周长的最小值；
- (3)点 N 为直线 AB 上的一点（点 N 不与点 F 重合），在抛物线上是否存在一点 M，使以点 E、F、N、M 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，直接写出点 M 的坐标，若不存在，说明理由．

【例 3】（2022 浙江衢州 模拟预测）如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， AB 为直径，弦 AD 平分 $\angle BAC$ ，过点 D 作射线 AC 的垂线，垂足为 M ，点 E 为线段 AB 上的动点.



备用图 1



备用图 2

- (1)求证： MD 是 $\odot O$ 的切线；
- (2)若 $\angle B = 30^\circ$ ， $AB = 8$ ，在点 E 运动过程中， $EC + EM$ 是否存在最小值？若存在，请求出最小值；若不存在，说明理由；
- (3)若点 E 恰好运动到 $\angle ACB$ 的角平分线上，连接 CE 并延长，交 $\odot O$ 于点 F ，交 AD 于点 P ，连接 AF ， $CP = 3$ ， $EF = 4$ ，求 AF 的长.

【例 4】(2022 重庆巴蜀中学七年级期末) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = BC$, 在 $\text{Rt}\triangle CEH$ 中, $\angle CEH = 45^\circ$, $\angle ECH = 90^\circ$, 连接 AE .

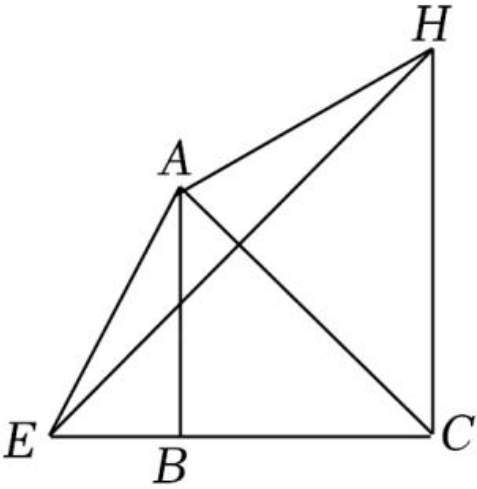


图1

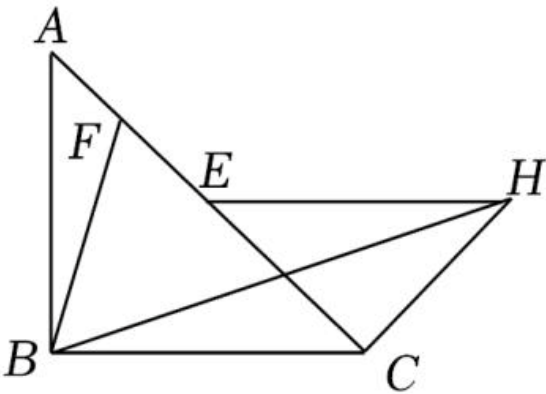


图2

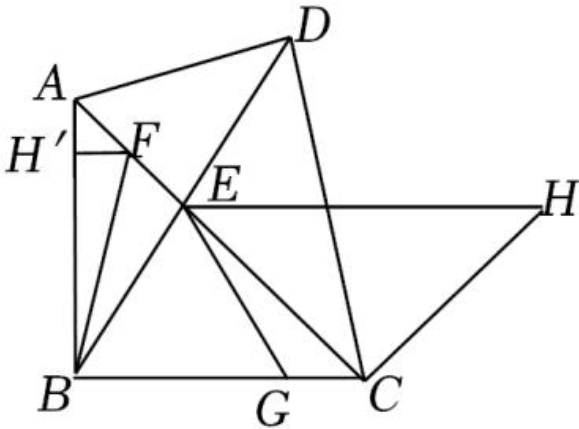
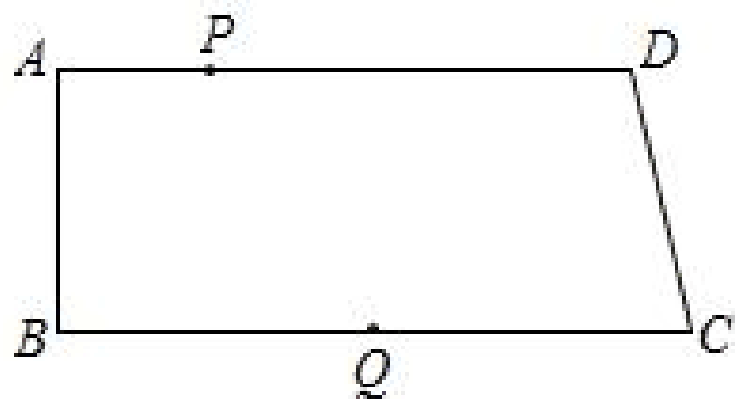


图3

- (1)如图 1, 若点 E 在 CB 延长线上, 连接 AH , 且 $AH = 6$, 求 AE 的长;
- (2)如图 2, 若点 E 在 AC 上, F 为 AE 的中点, 连接 BF 、 BH , 当 $BH = 2BF$, $\angle EHB + \frac{1}{2}\angle HBF = 45^\circ$ 时, 求证:
 $AE = CE$;
- (3)如图 3, 若点 E 在线段 AC 上运动, 取 AE 的中点 F , 作 $FH' \parallel BC$ 交 AB 于 H' , 连接 BE 并延长到 D , 使得 $BE = DE$, 连接 AD 、 CD ; 在线段 BC 上取一点 G , 使得 $CG = AF$, 并连接 EG ; 若点 E 在线段 AC 上运动的过程中, 当 ACD 的周长取得最小值时, $\triangle AED$ 的面积为 25 , 请直接写出 $GE + BH'$ 的值.

【例 5】（2022 江苏 九年级课时练习）如图，四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ， $BC = 20$ ， $AD = 18$ ，点 Q 为 BC 中点，动点 P 在线段 AD 边上以每秒 2 个单位的速度由点 A 向点 D 运动，设动点 P 的运动时间为 t 秒.



- (1) 当 t 为何值时，四边形 $PBQD$ 是平行四边形，请说明理由？
- (2) 在 AD 边上是否存在一点 R ，使得 B 、 Q 、 R 、 P 四点为顶点的四边形是菱形？若存在，请直接写出 t 的值；若不存在，请说明理由.
- (3) 在线段 PD 上有一点 M ，且 $PM = 10$ ，当点 P 从点 A 向右运动_____秒时，四边形 $BCMP$ 的周长最小，其最小值为_____.

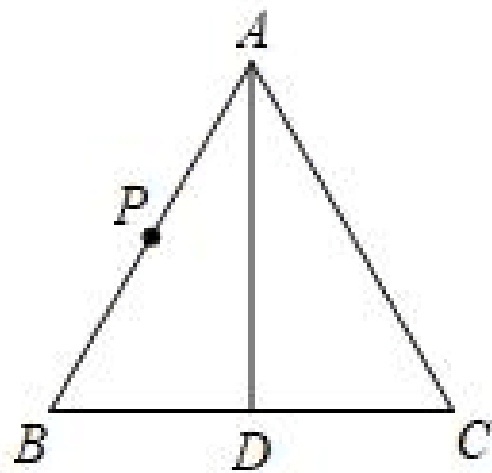
培优训练

一、解答题

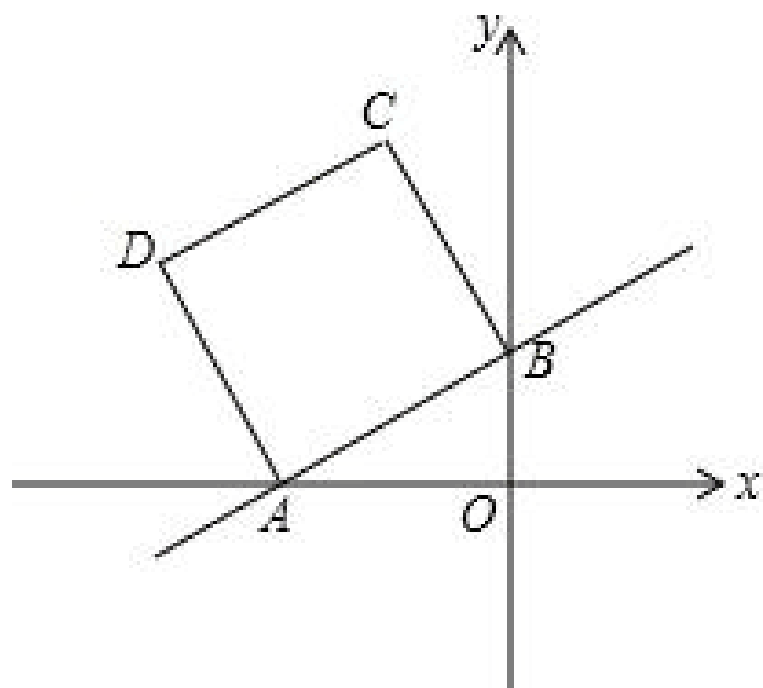
1. (2022 江苏 八年级专题练习) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 是 $\triangle ABC$ 底边 BC 上的中线, 点 P 为线段 AB 上一点.

(1) 在 AD 上找一点 E , 使得 $PE + EB$ 的值最小;

(2) 若点 P 为 AB 的中点, 当 $\angle BPE$ 满足什么条件时, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 并说明理由.



2. (2021 全国 八年级专题练习) 如图所示, 在平面直角坐标系中, 已知一次函数 $y=\frac{1}{2}x+1$ 的图象与 x 轴, y 轴分别交于 A , B 两点, 以 AB 为边在第二象限内作正方形 $ABCD$.



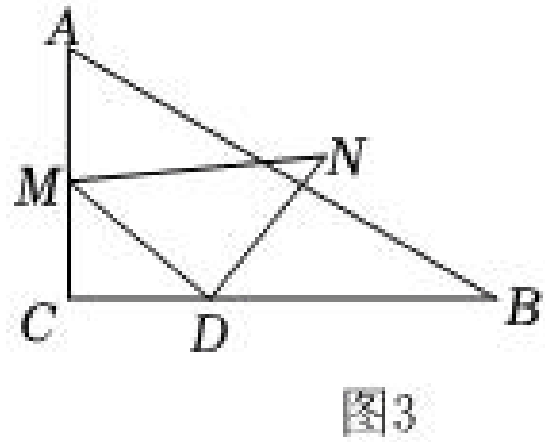
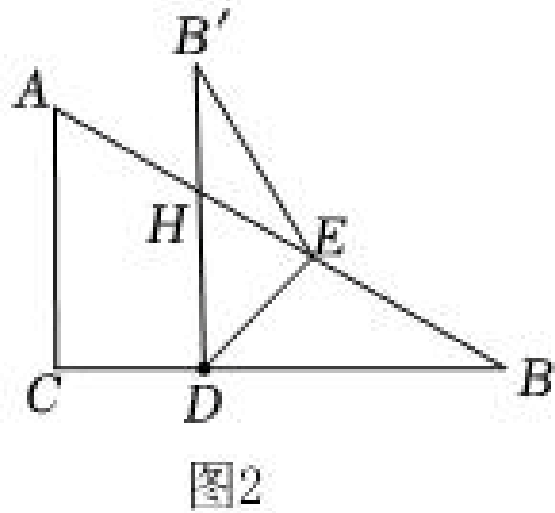
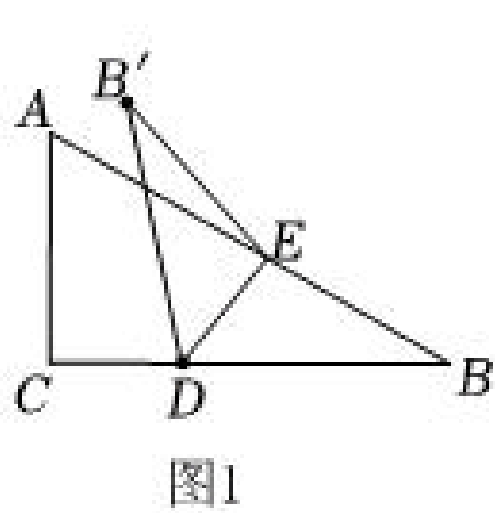
- (1) 求边 AB 的长;
- (2) 求点 C , D 的坐标;
- (3) 在 x 轴上是否存在点 M , 使 $\triangle MDB$ 的周长最小? 若存在, 请求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

3. (2022 江苏 八年级专题练习) 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90^\circ$ ，且 $BC = 9$ ， $\angle B = 30^\circ$ 。

(1) 如图 1、2，若点 D 是 CB 上一点，且 $CD = 3$ ，点 E 是 AB 上的动点，将 $\triangle DBE$ 沿 DE 对折，点 B 的对应点为 B' (点 B' 和点 C 在直线 AB 的异侧)， DB' 与 AB 交于点 H 。

- ①当 $\angle B'EA = 20^\circ$ 时，求 $\angle EDB$ 的度数。
- ②当 $\triangle B'HE$ 是等腰三角形时，求 $\angle DEB$ 的度数。

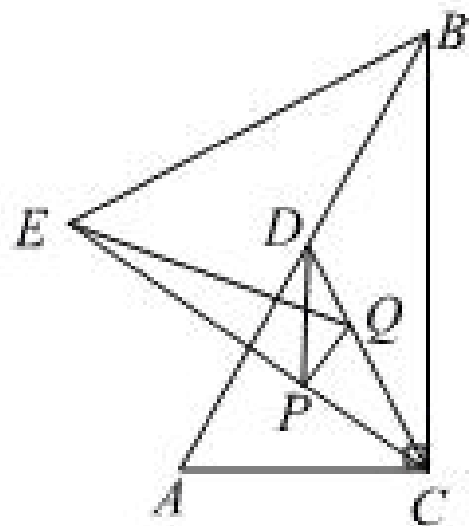
(2) 如图 2，若点 D 是 CB 上一点，且 $CD = 3$ ， M 是线段 AC 上的动点，以 $\angle MDN$ 为直角构造等腰直角 $\triangle DMN$ (D, M, N 三点顺时针方向排列)，在点 M 的运动过程中，直接写出 $CN + NB$ 的最小值。



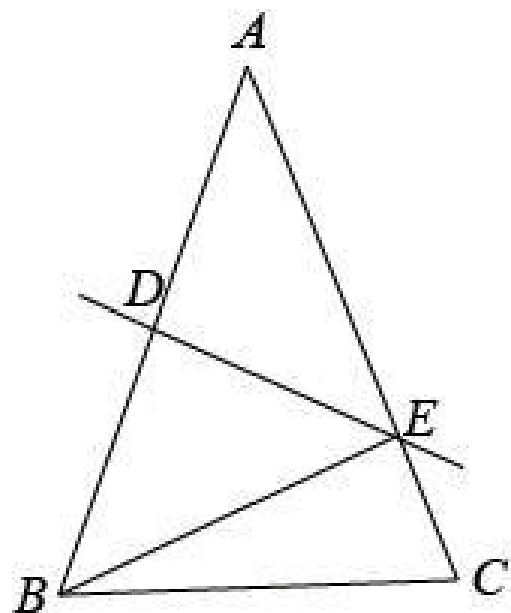
4. (2021 湖北武汉 八年级期中) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC = 2$ ，以 BC 为边向左作等边 $\triangle BCE$ ，点 D 为 AB 中点，连接 CD ，点 P 、 Q 分别为 CE 、 CD 上的动点。

(1) 求证： $\triangle ADC$ 为等边三角形；

(2) 求 $PD+PQ+QE$ 的最小值。



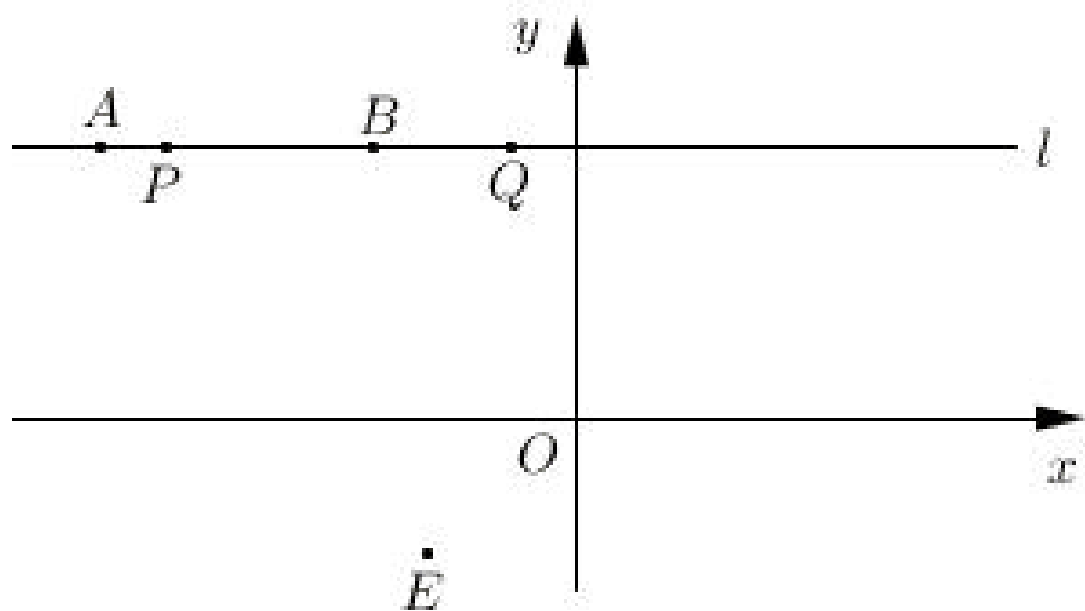
5. (2022 江苏 八年级专题练习) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = AC$, AB 的垂直平分线交 AB 于点 D , 交 AC 于点 E , 连接 BE .



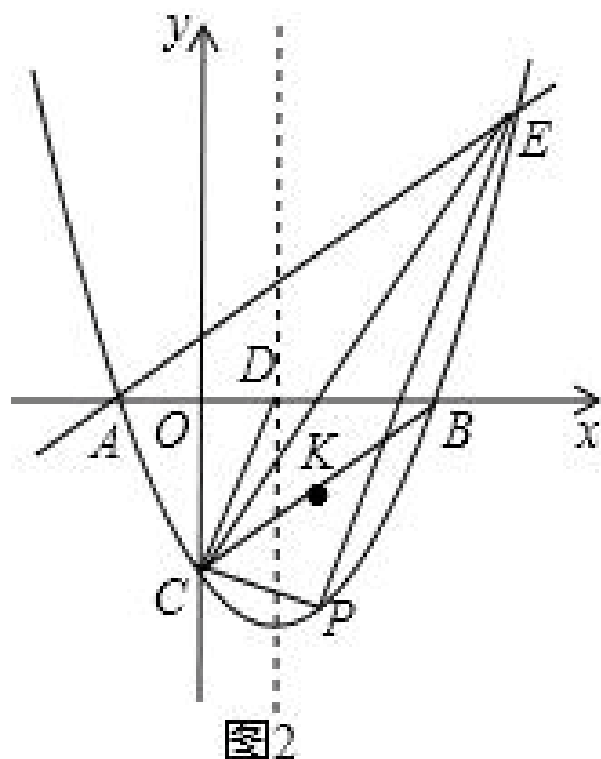
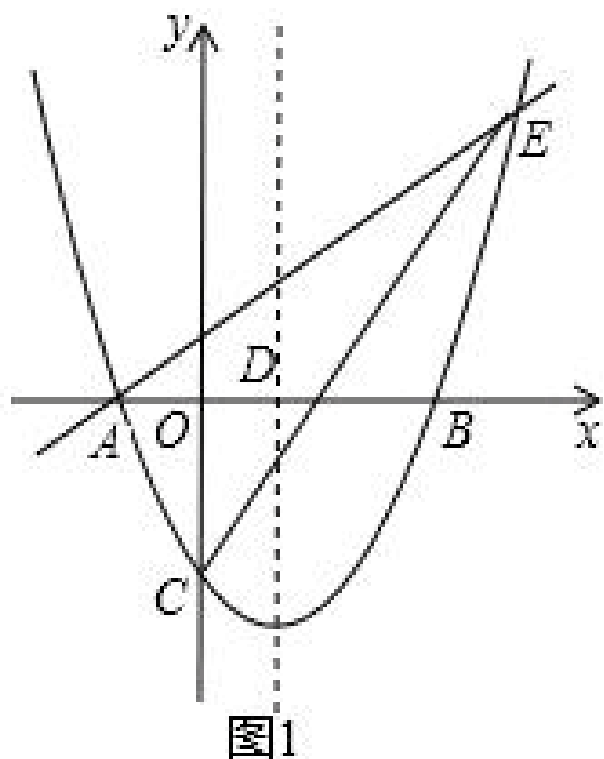
- (1) 若 $\angle ABC = 68^\circ$, 求 $\angle AED$ 的度数;
- (2) 若点 P 为直线 DE 上一点, $AB = 8, BC = 6$, 求 $\triangle PBC$ 周长的最小值.

6. (2021 江苏 星海实验中学八年级期中) 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 l 平行于 x 轴, l 上有两点 A 、 B , 且点 A 坐标为 $(-14, 8)$, 点 B 位于 A 点右侧, 两点相距 8 个单位, 动点 P 、 Q 分别从 A 、 B 出发, 沿直线 l 向右运动, 点 P 速度为 2 个单位/秒, 点 Q 速度为 6 个单位/秒, 设运动时间为 t 秒.

- (1) 用含 t 的代数式表示 P 、 Q 的坐标: P (_____), Q (_____);
- (2) 在 P 、 Q 运动过程中, 取线段 PQ 的中点 D , 当 $\triangle OBD$ 为直角三角形时, 求出 t 的值及相应的点 D 的坐标;
- (3) 取满足 (2) 中条件最右侧的 D 点, 若坐标系中存在另一点 E ($\frac{13}{3}, -4$), 请问 x 轴上是否存在一点 F , 使 $FD - FE$ 的值最大, 若存在, 求出最大值; 若不存在, 说明理由.



7. (2021 全国 九年级专题练习) 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 对称轴与 x 轴交于点 D , 点 $E(4, n)$ 在抛物线上.



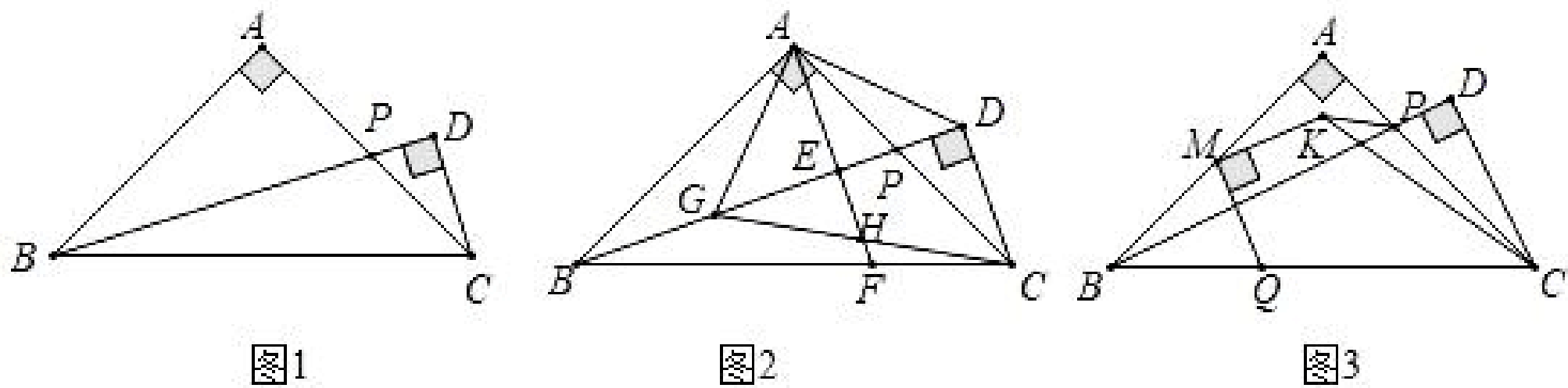
- (1) 求直线 AE 的解析式;
- (2) 点 P 为直线 CE 下方抛物线上的一点, 连接 PC , PE . 当 $\triangle PCE$ 的面积最大时, 连接 CD , CB , 点 K 是线段 CB 的中点, 点 M 是 CP 上的一点, 点 N 是 CD 上的一点, 求 $KM + MN + NK$ 的最小值;
- (3) 点 G 是线段 CE 的中点, 将抛物线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ 沿 x 轴正方向平移得到新抛物线 y' , y' 经过点 D , y' 的顶点为点 F . 在新抛物线 y' 的对称轴上, 是否存在一点 Q , 使得 $\triangle FGQ$ 为等腰三角形? 若存在, 直接写出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

8. (2021 四川省成都市七中育才学校八年级开学考试) 以 BC 为斜边在它的同侧作 $Rt\triangle DBC$ 和 $Rt\triangle ABC$, 其中 $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AB = AC$, AC 、 BD 交于点 P .

- (1) 如图 1, BP 平分 $\angle ABC$, 求证: $BC = AB + AP$;
- (2) 如图 2, 过点 A 作 $AE \perp BP$, 分别交 BP 、 BC 于点 E 、 点 F , 连接 AD , 过 A 作 $AG \perp AD$, 交 BD 于点 G , 连接 CG , 交 AF 于点 H ,

- ①求证: $\triangle ABG \cong \triangle ADC$;
- ②求证: $GH = CH$;

(3) 如图 3, 点 M 为边 AB 的中点, 点 Q 是边 BC 上一动点, 连接 MQ , 将线段 MQ 绕点 M 逆时针旋转 90° 得到线段 MK , 连接 PK 、 CK , 当 $\angle DBC = 15^\circ$, $AP = 2$ 时, 请直接写出 $PK + CK$ 的最小值.



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/397060013055006200>