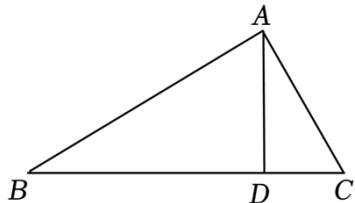


28.1.1 正弦

基础篇

一、单选题：

1. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ，下列结论正确的是（ ）



- A. $\sin C = \frac{CD}{AC}$ B. $\sin C = \frac{AD}{DC}$ C. $\sin C = \frac{AB}{BC}$ D. $\sin C = \frac{AD}{AB}$

【答案】C

【分析】根据垂直定义可得 $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ ，然后在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，利用锐角三角函数的定义即可判断 A，B，再在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，利用锐角三角函数的定义即可判断 C，最后利用同角的余角相等可得

$\angle C = \angle BAD$ ，从而在 $\text{Rt}\triangle BAD$ 中，利用锐角三角函数的定义即可求出 $\sin \angle BAD = \frac{BD}{AB}$ ，即可判断 D.

【详解】解： $\because AD \perp BC$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中 $\sin C = \frac{AD}{AC}$ ，

故 A、B 不符合题意；

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\sin C = \frac{AB}{BC}$ ，

故 C 符合题意；

$\because \angle B + \angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle B + \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle C = \angle BAD$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BAD$ 中， $\sin \angle BAD = \frac{BD}{AB}$ ，

$\therefore \sin C = \sin \angle BAD = \frac{BD}{AB}$ ，

故 D 不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查了解直角三角形，熟练掌握锐角三角函数的定义是解题的关键.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 则下列等式成立的是 ()

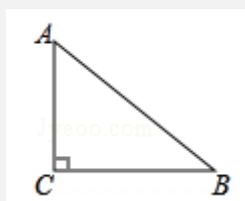
- A. $\sin A = \frac{AC}{AB}$ B. $\sin A = \frac{BC}{AB}$ C. $\sin A = \frac{AC}{BC}$ D. $\sin A = \frac{BC}{AC}$

【答案】B

【详解】分析: 根据题意画出图形, 进而分析得出答案.

详解: 如图所示: $\sin A = \frac{BC}{AB}$.

故选 B.



点睛: 本题主要考查了锐角三角函数的定义, 正确记忆边角关系是解题的关键.

3. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AB=7$, $BC=5$, 则 $\sin A =$ ()

- A. $\frac{5}{7}$ B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ D. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

【答案】A

【分析】根据正弦定义解答, 正弦定义是在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A$ 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的正弦.

【详解】解: $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AB=7$, $BC=5$,

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{7},$$

故选 A.

【点睛】本题主要考查了锐角三角函数中的正弦, 解决问题的关键是熟练掌握正弦的定义.

4. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 若 $\triangle ABC$ 的三边都缩小5倍, 则 $\sin A$ 的值 ()

- A. 放大5倍 B. 缩小5倍 C. 不变 D. 无法确定

【答案】C

【分析】直接利用锐角的正弦的定义求解.

【详解】解: $\because \angle C=90^\circ$,

$\therefore \sin A = \angle A$ 的对边与斜边的比,

$\because \triangle ABC$ 的三边都缩小5倍,

$\therefore \angle A$ 的对边与斜边的比不变,

$\therefore \sin A$ 的值不变.

故选: C.

【点睛】本题考查了锐角三角函数的定义: 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$. 锐角 A 的对边 a 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的正弦, 记作 $\sin A$.

5. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 如果 $\angle A$ 的正弦值是 $\frac{1}{4}$, 那么下列各式正确的是 ()

- A. $AB=4BC$ B. $AB=4AC$ C. $AC=4BC$ D. $BC=4AC$

【答案】A

【分析】根据锐角的正弦三角函数的定义, 即可得到答案.

【详解】 $\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A$ 的正弦值是 $\frac{1}{4}$,

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore AB = 4BC,$$

故选 A.

【点睛】本题主要考查三角函数的定义, 掌握锐角的正弦三角函数的定义, 是解题的关键.

6. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$. 若 $AC=2BC$, 则 $\sin A$ 的值是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. 2

【答案】C

【分析】设 $BC=x$, 可得 $AC=2x$, $Rt\triangle ABC$ 中利用勾股定理算出 $AB=\sqrt{5}x$, 然后利用三角函数在直角三角形中的定义, 可算出 $\sin A$ 的值.

【详解】解: 由 $AC=2BC$, 设 $BC=x$, 则 $AC=2x$,

$\because Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$,

$\therefore$ 根据勾股定理, 得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(2x)^2 + x^2} = \sqrt{5}x$.

$$\text{因此, } \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{\sqrt{5}x} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故选: C.

【点睛】本题已知直角三角形的两条直角边的关系, 求角 A 的正弦之值. 着重考查了勾股定理、三角函数的定义等知识, 属于基础题.

7. 已知 $Rt\triangle ABC \sim Rt\triangle A'B'C'$, $\angle C = \angle C' = 90^\circ$, 且 $AB = 2A'B'$, 则 $\sin A$

与 $\sin A'$ 的关系为 ()

- A. $\sin A = 2\sin A'$ B. $\sin A = \sin A'$ C. $2\sin A = \sin A'$ D. 不确定

【答案】B

【分析】根据 $Rt\triangle ABC \sim Rt\triangle A'B'C'$ ，可得 $\angle A = \angle A'$ ，再根据三角函数值只与角的大小有关即可求解。

【详解】解： $\because Rt\triangle ABC \sim Rt\triangle A'B'C'$ ，

$$\therefore \angle A = \angle A'，$$

$$\therefore \sin A = \sin A'.$$

故选：B

【点睛】本题主要考查了相似三角形的性质，锐角三角函数，熟练掌握相关知识点是解题的关键。

8. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\sin A = \frac{3}{5}$ ，则 $BC : AC$ 等于()

- A. $3 : 4$ B. $4 : 3$ C. $3 : 5$ D. $4 : 5$

【答案】A

【详解】

$$\because \sin A = \frac{3}{5}，\text{设 } a=3x，\text{则 } c=5x，$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2，$$

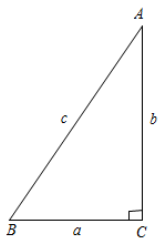
$$\therefore b=4x，$$

$$\therefore BC : AC = a : b = 3x : 4x = 3 : 4.$$

故选 A.

二、填空题：

9. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ 。(1) 斜边 = _____；(2) $\angle B$ 的对边 = _____；(3) $\angle B$ 的邻边 = _____；(4) $\frac{\angle B \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$ 。



【答案】 c b a $\frac{b}{c}$

【分析】根据各边名称定义写出每边的代号即可。

【详解】(1) 直角三角形的斜边为最长边 c

(2) $\angle B$ 的对边是 $\angle B$ 正对的边 b

(3) $\angle B$ 的邻边是 a ,

(4) $\angle B$ 的对边比斜边即等于 $b \div c = \frac{b}{c}$

故答案为① c ② b ③ a ④ $\frac{b}{c}$

【点睛】本题考查直角三角形各边名称，熟记这些名称是解题关键.

10. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $BC=6$, $AB=10$, $\sin A =$ _____.

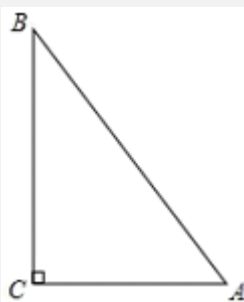
【答案】 $\frac{3}{5}$

【分析】运用三角函数定义求解.

【详解】 $\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $BC=6$, $AB=10$,

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

故答案为: $\frac{3}{5}$.



【点睛】本题考查了锐角三角函数的定义.

正弦: 我们把锐角 A 的对边 a 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的正弦, 记作 $\sin A$. 即 $\sin A = \text{对边} : \text{斜边}$.

11. 已知 $x = \sin \alpha$ (α 为锐角), 满足方程 $3x^2 - 5x + 2 = 0$, 则 $\sin \alpha =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【分析】先用因式分解法解一元二次方程, 再根据锐角三角函数的正弦值取值范围, 筛选 x 的值代入即可解题.

【详解】 $3x^2 - 5x + 2 = 0$

$$(3x - 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 1$$

$\because x = \sin \alpha$ (α 为锐角),

$$\therefore 0 < \sin \alpha < 1$$

$$\therefore \sin \alpha = x = \frac{2}{3}$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

【点睛】本题考查因式分解法解一元二次方程，涉及正弦等知识，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键.

12. $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 2.5$, $\sin A = \frac{5}{13}$, 则 $AB =$ ____.

【答案】6.5

【分析】直接利用锐角三角函数关系进而得出 AB 的值.

【详解】解: $\because Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 2.5$, $\sin A = \frac{5}{13}$,

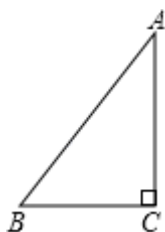
$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{2.5}{AB} = \frac{5}{13},$$

$$\therefore AB = 6.5.$$

故答案为 6.5.

【点睛】锐角三角形正弦 ($\sin$) 等于对边比斜边; $\sin A = \frac{a}{c}$, 正确掌握边角关系是解题关键.

13. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $\sin B = \frac{4}{5}$, $AB = 15$, 则 AC 的值是 ____.



【答案】12

【分析】由 $\sin B = \frac{AC}{AB}$ 得 $AC = AB \sin B$, 据此可得.

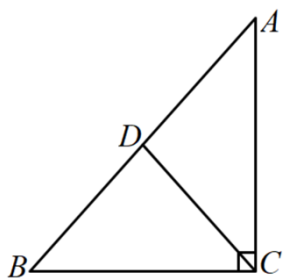
【详解】解: 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\therefore \sin B = \frac{AC}{AB}$,

$$\therefore AC = AB \sin B = 15 \times \frac{4}{5} = 12,$$

故答案为: 12.

【点睛】此题主要考查三角函数的应用, 解题的关键是熟知正弦函数的定义.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 为 AB 边的中点, 连接 CD , 若 $BC = 4$, $CD = 3$, 则 $\sin \angle DCA$ 的值为 ____.



【答案】 $\frac{2}{3}$

【分析】由题意可知 CD 为直角三角形 ABC 斜边 AB 上的中线即可求出 AB ，再利用锐角三角函数即可求出 $\sin \angle DCA$ 的值。

【详解】解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，点 D 为 AB 边的中点， $CD = 3$ ，

$\therefore AB = 2CD = 2 \times 3 = 6$ ， $CD = AD$ ，

$\therefore \angle A = \angle DCA$ ，

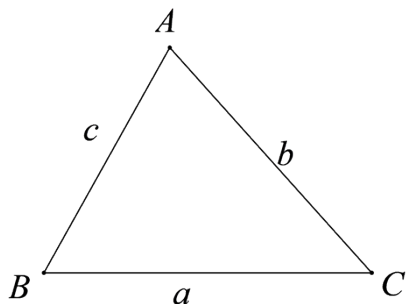
$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\sin \angle DCA = \sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，

故答案为： $\frac{2}{3}$ 。

【点睛】本题考查解直角三角形，熟练掌握直角三角形斜边上中线的特点以及锐角三角函数在直角三角形中的应用是解题关键。

三、解答题：

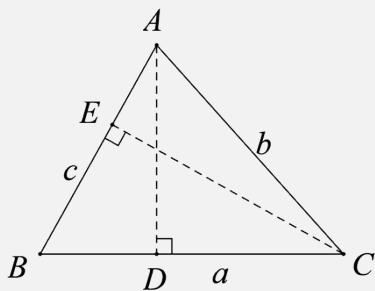
15. 如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，探究 $\frac{a}{\sin A}$ ， $\frac{b}{\sin B}$ ， $\frac{c}{\sin C}$ 之间的关系。（提示：分别作 AB 和 BC 边上的高。）



【答案】 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 。

【分析】分别作 $AD \perp BC$ ， $CE \perp AB$ ，垂足分别为 D, E ，根据正弦的定义，在 4 个直角三角形中分别表示出 CE, AD ，进而将等式变形，即可求得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 。

【详解】解：如图，分别作 $AD \perp BC, CE \perp AB$ ，垂足分别为 D, E ，



$$\therefore \text{在 } Rt\triangle ABD \text{ 中, } \sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{c},$$

$$\therefore AD = c \cdot \sin B,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ADC \text{ 中, } \sin C = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{b},$$

$$\therefore AD = b \cdot \sin C,$$

$$\therefore c \cdot \sin B = b \cdot \sin C,$$

$$\therefore \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B},$$

$$\text{在 } Rt\triangle AEC \text{ 中, } \sin A = \frac{EC}{b},$$

$$\therefore EC = \sin A \cdot b,$$

$$\text{在 } Rt\triangle BEC \text{ 中, } \sin B = \frac{EC}{a},$$

$$\therefore EC = \sin B \cdot a,$$

$$\therefore \sin A \cdot b = \sin B \cdot a,$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

【点睛】本题考查了正弦的定义，添加辅助线构造直角三角形是解题的关键。

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别是 a, b, c ，关于 x 的方程 $a(1-x^2) + 2bx + c(1+x^2) = 0$ 有两个相等实根，且 $3c = a + 3b$

(1) 试判断 $\triangle ABC$ 的形状；

(2) 求 $\sin A + \sin B$ 的值。

【答案】(1) $\triangle ABC$ 为直角三角形；(2) $\frac{7}{5}$ 。

【分析】(1) 先把方程整理为一般式，再根据判别式的意义得到 $\Delta = 4b^2 - 4(c-a)(c+a) = 0$ ，则

$a^2 + b^2 = c^2$ ，然后根据勾股定理的逆定理判断三角形形状；

(2) 由于 $a^2 + b^2 = c^2$ ， $3c = a + 3b$ ，消去 a 得 $(3c - 3b)^2 + b^2 = c^2$ ，变形为 $(4c - 5b)(c - b) = 0$ ，则 $b = \frac{4}{5}c$ ， $a = \frac{3}{5}c$ ，根据正弦的定义得 $\sin A = \frac{a}{c}$ ， $\sin B = \frac{b}{c}$ ，所以 $\sin A + \sin B = \frac{a+b}{c}$ ，然后把 $b = \frac{4}{5}c$ ， $a = \frac{3}{5}c$ 代入计算即可。

【详解】解：(1) 方程整理为 $(c - a)x^2 + 2bx + a + c = 0$ ，

根据题意得 $\Delta = 4b^2 - 4(c - a)(a + c) = 0$ ，

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形；

$$(2) \because a^2 + b^2 = c^2, 3c = a + 3b$$

$$\therefore (3c - 3b)^2 + b^2 = c^2,$$

$$\therefore (4c - 5b)(c - b) = 0,$$

$$\therefore 4c = 5b, \text{ 即 } b = \frac{4}{5}c,$$

$$\therefore a = 3c - 3b = \frac{3}{5}c$$

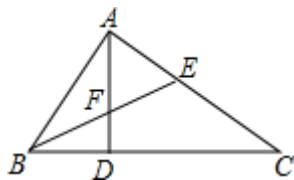
$$\therefore \sin A = \frac{a}{c}, \sin B = \frac{b}{c},$$

$$\therefore \sin A + \sin B = \frac{a+b}{c} = \frac{\frac{3}{5}c + \frac{4}{5}c}{c} = \frac{7}{5}.$$

【点睛】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ：当 $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根。也考查了勾股定理的逆定理和锐角三角函数的定义。

17. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， AD 是斜边 BC 上的高， $\angle B$ 的平分线 BE 交 AC 于 E ，交 AD 于 F 。求证：

$$\frac{BF}{BE} = \frac{AB}{BC}.$$



【答案】见解析。

【分析】首先得出利用已知得出 $\triangle BDF \sim \triangle ABE$ ，进而得出 $\angle BAD = \angle C$ ，则 $\sin \angle C = \sin \angle BAD = \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$ ，

即可得出答案.

【详解】证明： $\because \angle B$ 的平分线 BE 交 AC 于 E ,

$$\therefore \angle ABE = \angle EBC,$$

$$\because \angle BDF = \angle BAE,$$

$$\therefore \triangle BDF \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{BF}{BE},$$

$$\because \angle BAD + \angle DAC = 90^\circ, \angle C + \angle DAC = 90^\circ,$$

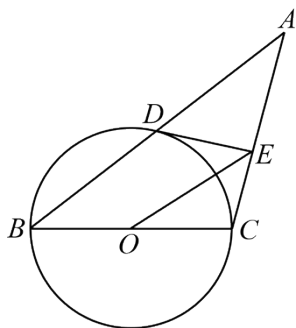
$$\therefore \angle BAD = \angle C,$$

$$\therefore \sin \angle C = \sin \angle BAD = \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB},$$

$$\therefore \frac{BF}{BE} = \frac{AB}{BC}.$$

【点睛】考查了相似三角形的判定与性质以及锐角三角函数关系等知识，根据已知得出 $\sin \angle C = \sin \angle BAD$ 是解题关键.

18. 如图， $\triangle ABC$ 中， $CA = CB$ ，以 BC 为直径的 $\odot O$ 与底边 AB 交于点 D ，过 D 点作 $\odot O$ 的切线 DE ，交 AC 于点 E .



(1) 证明： $DE \perp AC$;

(2) 连接 OE ，当 $\sin \angle ABC = \frac{3}{5}$ ， $S_{\triangle OCE} = 6$ 时，求 $\odot O$ 的半径.

【答案】(1) 见解析

(2) $\frac{25}{6}$

【分析】(1) 连接 OD ，根据 DE 是 $\odot O$ 的切线，可得 $\angle ODE = 90^\circ$ ，由 $AC = BC$ ，可得 $\angle OBD = \angle A$ ，进而可得 $\angle A = \angle ODB$ ，可得 $OD \parallel AC$ ，即可证明结论；

(2) 连接 CD ，证明 $\angle CDE = \angle ABC$ ，由 $\sin \angle ABC = \frac{CD}{BC} = \frac{3}{5}$ 得 $\sin \angle CDE = \frac{CE}{CD} = \frac{3}{5}$ ，设 $CE = 3x$ ， $CD = 5x$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/397103034040006120>