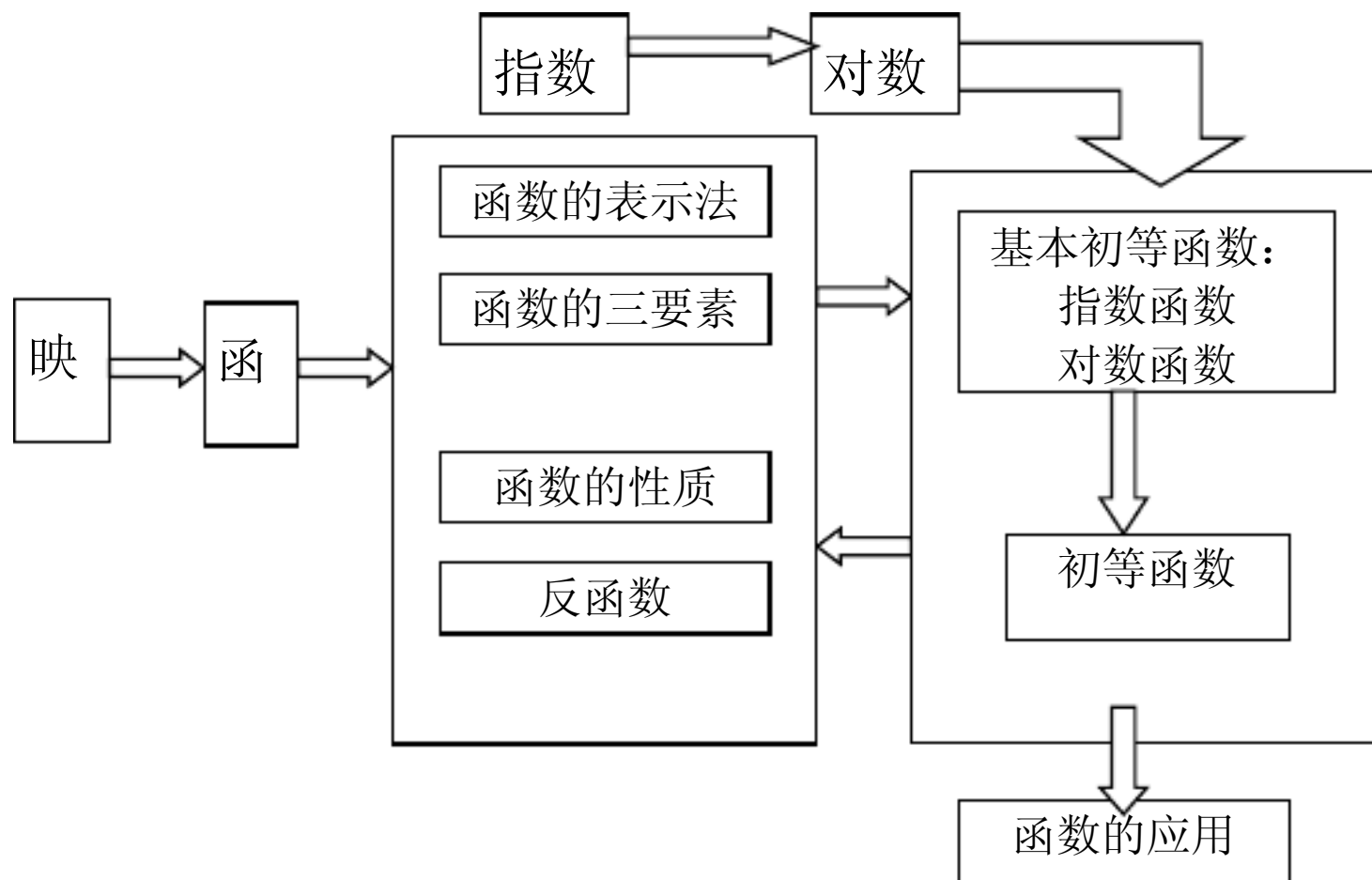


高三数学第二轮专题复习—函数讲义与练习

一、本章知识结构：



二、高考要求

- (1) 了解映射的概念，理解函数的概念。
- (2) 了解函数的单调性和奇偶性的概念，掌握判断一些简单函数的单调性和奇偶性的方法，并能利用函数的性质简化函数图像的绘制过程。
- (3) 了解反函数的概念及互为反函数的函数图像间关系，会求一些简单函数的反函数。
- (4) 理解分数指数的概念，掌握有理指数幂的运算性质，掌握指数函数的概念、图像和性质。
- (5) 理解对数的概念，掌握对数的运算性质，掌握对数函数的概念、图像和性质。
- (6) 能够运用函数的性质、指数函数和对数函数的性质解决某些简单的实际问题。

三、热点分析

函数是高考数学的重点内容之一，函数的观点和思想方法贯穿整个高中数学的全过程，包括解决几何问题。在近几年的高考试卷中，选择题、填空题、解答题三种题型中每年都有函数试题，而且常考常新。以基本函数为背景的应用题和综合题是高考命题的新趋势。

考试热点：①考查函数的表示法、定义域、值域、单调性、奇偶性、反函数和函数的图像。②函数与方程、不等式、数列是相互关联的概念，通过对实际问题的抽象分析，建立相应的函数模型并用来解决问题，是考试的热点。

③考查运用函数的思想来观察问题、分析问题和解决问题，渗透数形结合和分类讨论的基本数学思想。

四、复习建议

1. 认真落实本章的每个知识点，注意揭示概念的数学本质

①函数的表示方法除解析法外还有列表法、图象法，函数的实质是客观世界中量的变化的依存关系；

②中学数学中的“正、反比例函数，一次、二次函数，指数、对数函数，三角函数”称为基本初等函数，其余的函数的解析式都是由这些基本初等函数的解析式形成的。要把基本初等函数的图象和性质联系起来，并且理解记忆；

③掌握函数单调性和奇偶性的一般判定方法，并能联系其相应的函数的图象特征，加强对函数单调性和奇偶性应用的训练；

- ④注意函数图象的变换：平移变换、伸缩变换、对称变换等；
 ⑤掌握复合函数的定义域、值域、单调性、奇偶性；
 ⑥理解掌握反函数的概念，会求反函数，弄清互为反函数的两个函数的定义域、值域、单调性的关联及其图像间的对称关系。

2. 以函数知识为依托，渗透基本数学思想和方法

- ①数形结合的思想，即要利用函数的图象解决问题；
 ②建模方法，要能在实际问题中引进变量，建立函数模型，进而提高解决应用题的能力，培养函数的应用意识。

3. 深刻理解函数的概念，加强与各章知识的横向联系

要与时俱进地认识本章内容的“双基”，准确、深刻地理解函数的概念，才能正确、灵活地加以运用，养成自觉地运用函数观点思考和处理问题的习惯；高考 X 围没有的内容例如指数不等式（方程）、对数不等式（方程）等不再作深入研究；导数可用来证明函数的单调性，求函数的最大值和最小值，并启发学生建构更加完整的函数知识结构。

所谓函数思想，实质上是将问题放到动态背景上去考虑，利用函数观点可以从较高的角度处理式、方程、不等式、数列、曲线等问题。

五、典型例题

【例1】 设 $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ ，则 $f^{-1}(0) = \underline{1}$ 。

解：由 $4^x - 2^{x+1} = 0$ ，解得 $x = f^{-1}(0) = 1$

【例2】 已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x (x \geq 0)$ 和定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $g(x)$ ，当 $x > 0$ 时， $g(x) = f(x)$ ，试求 $g(x)$ 的反函数。

解：
$$g(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & (x \geq 0) \\ -2^x & (x < 0) \end{cases} \quad g^{-1}(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x & (0 < x \leq 1) \\ \log_2 (-x) & (-1 \leq x < 0) \end{cases}$$

【例3】 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{bx + c} (a, b, c \in \mathbb{Z})$ 是奇函数，又 $f(1) = 2, f(2) = 3$ ，求 a, b, c 的整数值。

解：由 $f(-x) = -f(x)$ ，又由 $\frac{f(1)}{f(2)} = \frac{2}{3} = 1 - a$ ，从而可得 $a = b = 1; c = 0$

【例4】 (1) 已知 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ，求 $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

(2) $f(x) = x^2 - 2x - 2$ ， $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ 上的最小值为 $g(t)$ ；试写出 $s = g(t)$ 的解析式。

解：(1) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ， $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \neq 0, x \neq -1)$

(2) $g(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 1) \\ t^2 - 1 & (t \geq 1) \end{cases}$

【例5】 已知函数 $f(x) = x^2 + mx + 2m - 4 (0 \leq x \leq 2)$ ，且 $m > 0$ ，若 $f(x)$ 的最

大值为 n ，求 $n = g(m)$ 的表达式。

$$\text{解: } f(x) = x^2 - mx + 2m - 4 = x^2 - mx + \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{4} + 2m - 4 = \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + 2m - 4$$

$\because 0 \leq x \leq 2$, 而 $m \geq 0$,

$\therefore \frac{m}{2} \geq 0$, 开口向下的二次函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上是单调减函数

$$\therefore f(x)_{\text{最大值}} = f(0) = 2m - 4$$

$$\text{故 } n = g(m) = 2m - 4 \quad (m \geq 0)$$

【例6】 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，且在区间 $(-\infty, 0)$ 上递增，若

$f(3a^2 - 2a - 1) \leq f(2a^2 - a - 1)$ 成立，求 a 的取值范围。

解：

$\because f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是偶函数。在 $(-\infty, 0)$ 上递增，则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减

$$\text{又 } 3a^2 - 2a - 1 \leq 3a^2 - \frac{2}{3}a - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 1 - 3a - \frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3} \leq 0$$

(也可用 $\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ & 0 \end{smallmatrix}$ 断定 $3a^2 - 2a - 1 \leq 0$)

$$2a^2 - a - 1 \leq 2a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = 1 - 2a - \frac{1}{4}a^2 - \frac{7}{8} \leq 0$$

$$\text{而 } f(3a^2 - 2a - 1) \leq f(2a^2 - a - 1)$$

$$\therefore 3a^2 - 2a - 1 \geq 2a^2 - a - 1 \Rightarrow a^2 - 3a \geq 0 \Rightarrow 3 \leq a \leq 0$$

故 $a = 3, 0$ 为所求。

【例7】 比较 $m^a = m^a$ 与 $m^b = m^b$ ($a > b > 0, m > 0$ 且 $m \neq 1$) 的大小。

解：作差比较大小：

$$u = m^a - m^b = m^b \left(\frac{m^a}{m^b} - 1 \right) = m^b \left(m^{\frac{a-b}{b}} - 1 \right) = m^b \left(m^{\frac{a-b}{b}} - \frac{1}{m^{\frac{a-b}{b}}} \right)$$

$$= m^b \cdot \frac{m^{a-b} - 1}{m^{a-b}} = m^b \cdot \frac{m^{a-b} - 1}{m^{a-b}}$$

当 $m > 1$ 或 $0 < m < 1$ 。都有 $u > 0$

故 $m^a > m^b$ 。

【例8】 设 $f(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ 。(1) 证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数；

(2) 求 $f^{-1}(x)$ 及其

定义域

$$\text{解: (1) } f(x) = \frac{10^x - \frac{1}{10^x}}{10^x + \frac{1}{10^x}} = \frac{10^{2x} - 1}{10^{2x} + 1}$$

任取 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{10^{2x_1} - 1}{10^{2x_1} + 1} - \frac{10^{2x_2} - 1}{10^{2x_2} + 1} = \frac{2(10^{2x_1} - 10^{2x_2})}{(10^{2x_1} + 1)(10^{2x_2} + 1)}$$

$y = 10^2$ 是增函数,

$$10^{2x_1} - 10^{2x_2} < 0$$

$$\text{即 } 10^{2x_1} - 1 < 0, 10^{2x_2} - 1 < 0$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} < 0$$

$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数

$$(2) y = f(x) = \frac{10^{2x} - 1}{10^{2x} + 1}; \text{ 定义域 } \mathbb{R}, \text{ 值域 } (-1, 1)$$

$$\text{反解: } x = \frac{10^{2y} - 1}{10^{2y} + 1}$$

$$x(10^{2y} + 1) = 10^{2y} - 1$$

$$x \cdot 10^{2y} + x = 10^{2y} - 1$$

$$x - 1 \cdot 10^{2y} = x - 1$$

$$10^{2y} = \frac{x - 1}{x + 1}$$

$$10^{2y} - \frac{1 - x}{1 + x} = 0$$

$$2y = \lg \frac{1 - x}{1 + x} = 1 - x - 1$$

$$f^{-1}(x) = y = \frac{1}{2} \lg \frac{1 - x}{1 + x} = 1 - x - 1$$

【例9】 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对任意实数 m, n , 总有

$$f(m+n) = f(m) + f(n), \text{ 且当 } x > 0 \text{ 时, } 0 < f(x) < 1.$$

(1) 试求 $f(0)$ 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 的单调性并证明你的结论;

() 设 $A = \{x, y \mid f(x^2) + f(y^2) = f(1)\}$, $B = \{x, y \mid f(ax + y) = \sqrt{2}, a \in \mathbb{R}\}$, 若

A B , 试确定 a 的取值 X 围.

(4) 试举出一个满足条件的函数 $f(x)$.

解: (1) 在 $f(m+n) = f(m) + f(n)$ 中, 令 $m=1, n=0$. 得:

$$f(1) = f(1) + f(0) .$$

因为 $f(1) \neq 0$, 所以, $f(0) = 1$.

(2) 要判断 $f(x)$ 的单调性, 可任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 且设 $x_1 < x_2$.

在已知条件 $f(m+n) = f(m) + f(n)$ 中, 若取 $m = x_2, n = x_1$, 则已知条件可化为: $f(x_2 + x_1) = f(x_2) + f(x_1)$.

由于 $x_2 - x_1 > 0$, 所以 $1 - f(x_2 - x_1) > 0$.

为比较 $f(x_2)$ 、 $f(x_1)$ 的大小, 只需考虑 $f(x_1)$ 的正负即可.

在 $f(m+n) = f(m) + f(n)$ 中, 令 $m = x, n = -x$, 则得 $f(x) + f(-x) = 1$.

$\because x > 0$ 时, $0 < f(x) < 1$,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{f(-x)} > 1 > 0$.

又 $f(0) = 1$, 所以, 综上, 可知, 对于任意 $x_1 \in \mathbb{R}$, 均有 $f(x_1) > 0$.

$\therefore f(x_2) = f(x_1) + f(x_2 - x_1) > f(x_1) + 1 > 0$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增.

(3) 首先利用 $f(x)$ 的单调性, 将有关函数值的不等式转化为不含 f 的式子.

$f(x^2) + f(y^2) = f(1)$ 即 $x^2 + y^2 = 1$,

$f(ax + y\sqrt{2}) = 1 = f(0)$, 即 $ax + y\sqrt{2} = 0$.

由 A B , 所以, 直线 $ax + y\sqrt{2} = 0$ 与圆面 $x^2 + y^2 = 1$ 无公共点. 所以,

$$\frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{a^2 + 1}} > 1 .$$

解得: $-1 < a < 1$.

(4) 如 $f(x) = \frac{1}{2}x$.

六、专题练习

一、选择题

1. 已知四个函数：① $y=10^x$ ② $y=\log_{0.1} x$ ③ $y=\lg(-x)$ ④ $y=0.1^x$ ，则图象关于原点成中心对称的是：(C)

A. 仅为③和④ B. 仅为①和④ C. 仅为③和② D. 仅为②和④

2. 设 $f(x)=\log_2(x+1)$ ， $f^{-1}(1)=$ 。(1)

3. . 已知，定义在实数集 R 上的函数 $f(x)$ 满足：(1) $f(-x)=f(x)$ ；(2) $f(4+x)=f(x)$ ；若当 x

$[0, 2]$ 时， $f(x)=x^2+1$ ，则当 $x \in [-6, -4]$ 时， $f(x)$ 等于 (D)

(A) x^2+1 (B) $(x+2)^2+1$

(C) $(x+2)^2-1$ (D) $(x+1)^2-1$

4. . 已知 $f(x)=2x+1$ ，则 $f^{-1}(2)$ 的值是 (A)

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) 5

5. 已知函数 $f(x)=x^3+a$ 且 $f(-1)=0$ ，则 $f^{-1}(1)$ 的值是 (A)

(A) 0 (B) 2 (C) 1 (D) -1

6. 函数 $y=\sqrt{x-1}$ ($x \geq 0$) 的反函数是 (A)

(A) $y=(x-1)^2(x-1)$ (B) $y=(x-1)^2(x+1)$

(C) $y=x^2-1(x-1)$ (D) $y=x^2-1(x+1)$

7. 函数 $f(x)$ 的反函数为 $g(x)$ ，则下面命题成立的是 (A)

(A) 若 $f(x)$ 为奇函数且单调递增，则 $g(x)$ 也是奇函数且单调递增。

(B) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像关于直线 $x+y=0$ 对称。

(C) 当 $f(x)$ 是偶函数时， $g(x)$ 也是偶函数。

(D) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像与直线一定相交于一点。

8. 若函数 $y=f(x)$ 的图像经过点 $(0, 1)$ ，则函数 $y=f(x+4)$ 的反函数的图像必经过点 (A)

(A) $(1, -4)$ (B) $(4, 1)$ (C) $(-4, 1)$ (D) $(1, 4)$

9. 若函数 $f(x)=x^2+2a-1$ 在区间 $[-2, 4]$ 上是

减函数，则实数 a 的取值范围是 (B)

A. $a \leq 3$

B. $a \leq 3$

C. $a \leq 3$

D. $a \leq 5$

10. 将函数 $y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}$ 的图象向右平移 2 个单位后，再向上平移 3 个单位，所得函数

的解析式为 (C)

$$A. y = \frac{1}{2}x^5 - 2x - 1$$

$$B. y = \frac{1}{2}x^5 - 2x - 5$$

$$C. y = \frac{1}{2}x^5 - 2x - 1$$

$$D. y = \frac{1}{2}x^5 - 2x - 1$$

11. 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 中, $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有

$f(x+1) = f(2-x)$, 设 $m = f(a^{\log_a 3})$, $n = f(\log_a \frac{1}{\sqrt{a}})$, 则 (B)

$$A. m < n$$

$$B. m > n$$

$$C. m = n$$

D. m, n 的大小关系不确定

12. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 3)$ 的值域为 (B)

$$A. [3, +\infty)$$

$$B. (-\infty, 3]$$

$$C. [8, +\infty)$$

$$D. \mathbb{R}$$

13. 已知 $y = \log_a 2 - ax$ 在 $[0, 1]$ 上是 x 的减函数, 则 a 的取值范围是 (B)

$$A. (0, 1)$$

$$B. (1, 2)$$

$$C. (0, 2)$$

$$D. [2, +\infty)$$

二、填空题

1. 函数 $y = x^{\frac{3}{4}} - 1 - |x|^{\frac{1}{2}}$ 的定义域是 $(0, 1)$

2. 函数 $y = \log_{0.3} x^2 - 2x$ 的单调递增区间是 $[1, 2]$

3. 函数 $y = \sqrt{\log_{0.1} x - 2}$ 的定义域是 $[2, 1]$

三、解答题

1. 集合 $A = \{(x, y) | y = x^2 - mx - 2\}$, $B = \{(x, y) | x - y - 1 = 0 \text{ 且 } 0 \leq x \leq 2\}$. 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围。

解: 由 $x^2 - mx - 2 = x - 1$ 得 $x^2 - (m+1)x - 1 = 0$ $x \in [0, 2]$,

由题设知上述方程在 $[0, 2]$ 内必有解。

所以: (1) 若在 $[0, 2]$ 只有一个解, 则 $f(0)f(2) \leq 0$ $m \geq \frac{3}{2}$

$$f(2) = 0$$

(2) 若在 $[0, 2]$ 只有二个解, 则 $0 < \frac{m+1}{2} \leq 2$ $\frac{3}{2} < m < 1$

由(1)(2)知: $m < 1$

2. 设两个方程 $x^2 + ax + b = 0$ 和 $x^2 + bx + a = 0$ 有一公共根, 问:

(1) a 与 b 之间有什么关系; (2) 当 $a \in [-1, 0]$, $b \in [-1, 0]$ 时, 求 $a^2 + b^2$ 的最大值与最小值。

解: (1) 两方程相减得: $(a-b)x = a-b$, 显然 $a \neq b$, 否则两方程为同一方程。所以 $x = 1$, 代入方程得: $a + b + 1 = 0$ 且 $a \neq b$

$$(2) a^2 - b^2 = a^2 - (a-1)^2 = 2(a - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2};$$

所当 $a = 0$ 或 $a = 1$ 时, $(a^2 - b^2)_{\max} = 1$;

而当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $b = \frac{3}{2} \in [1, 0]$, 所以无最小值。

3. 当 $1 < a < 2$ 时, 比较 $\log_a x$ 与 $2\log_{2a} x$ 的大小。

$$\text{解: } \log_a x - 2\log_{2a} x = \frac{\lg x}{\lg a} - \frac{2\lg x}{\lg 2a} = \frac{\lg x \lg 2 - \lg a}{\lg a \lg 2a}$$

$$1 < a < 2, \lg 2 > \lg a, \lg a > 0, \lg 2a > 0$$

当 $0 < x < 1$ 时, $\lg x < 0, \log_a x - 2\log_{2a} x < 0, \log_a x < 2\log_{2a} x$

当 $x = 1$ 时, $\lg x = 0, \log_a x - 2\log_{2a} x = 0, \log_a x = 2\log_{2a} x$

当 $x > 1$ 时, $\lg x > 0, \log_a x - 2\log_{2a} x > 0, \log_a x > 2\log_{2a} x$

4. x 为何值时, 不等式 $\log_m x^2 = \log_m 3x - 2$ 成立。

$$\text{解: 当 } m = 1 \text{ 时, } \begin{cases} x^2 = 0 \\ 3x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$$

$$\text{当 } 0 < m < 1 \text{ 时, } \begin{cases} x^2 = 0 \\ 3x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3} < x < 1 \text{ 或 } x > 2$$

故 $m = 1$ 时, $1 < x < 2$

$0 < m < 1$ 时, $\frac{2}{3} < x < 1$ 或 $x > 2$ 为所求。

$$5. \text{ 已知函数 } f(x) = \frac{1 - \ln(x-1)}{x}, (x > 0)$$

(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数还是减函数? 证明你的结论;

(2) 若当 $x > 0$ 时, $f(x) > \frac{k}{x-1}$ 恒成立, 求正整数 k 的最大值.

$$\text{解: (1) } f(x) = \frac{1}{x^2} \left[\frac{x}{x-1} - 1 - \ln(x-1) \right] = \frac{1}{x^2} \left[\frac{1}{x-1} - \ln(x-1) \right]$$

$$x > 0, x^2 > 0, \frac{1}{x-1} > 0, \ln(x-1) < 0. \therefore f(x) > 0.$$

因此函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

(2) (方法1) 当 $x > 0$ 时, $f(x) > \frac{k}{x-1}$ 恒成立, 令 $x = 1$ 有 $k < 2[1 - \ln 2]$

又 k 为正整数. k 的最大值不大于 3.7'

下面证明当 $k = 3$ 时, $f(x) > \frac{k}{x-1} (x > 0)$ 恒成立.

即证当 $x > 0$ 时, $(x-1)\ln(x-1) > 1 - 2x > 0$ 恒成立.

令 $g(x) = (x-1)\ln(x-1) - 1 - 2x$, 则 $g(x) = \ln(x-1) - 1$,

当 $x = e-1$ 时, $g(x) = 0$; 当 $0 < x < e-1$ 时, $g(x) < 0$.

当 $x = e-1$ 时, $g(x)$ 取得最小值 $g(e-1) = 3 - e < 0$.

当 $x = 0$ 时, $(x-1)\ln(x-1) - 1 - 2x = 0$ 恒成立.

因此正整数 k 的最大值为 3.

(2) (方法 2) 当 $x = 0$ 时, $f(x) = \frac{k}{x-1}$ 恒成立,

即 $h(x) = \frac{(x-1)[\ln(x-1)]}{x} \geq k$ 对 $x = 0$ 恒成立.

即 $h(x) \geq 0$ 的最小值大于 k .

$h(x) = \frac{x-1-\ln(x-1)}{x^2}$, 记 $\varphi(x) = x-1-\ln(x-1) \quad (x > 0)$

$\varphi(x) = \frac{x}{x-1} > 0$, $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续递增,

又 $\varphi(2) = 1 - \ln 3 < 0$, $\varphi(3) = 2 - 2\ln 2 > 0$,

$\varphi(x) = 0$ 存在唯一实根 a , 且满足: $a \in (2, 3)$, $a-1 = \ln(a-1)$.

由 $x = a$ 时, $\varphi(x) = 0$, $h(x) = 0$; $0 < x < a$ 时, $\varphi(x) < 0$, $h(x) < 0$ 知:

$h(x) \geq 0$ 的最小值为 $h(a) = \frac{(a-1)[\ln(a-1)]}{a} = a-1 \quad (3, 4)$.

因此正整数 k 的最大值为 3.

第 2 讲

一、典型例题

【例1】 关于 x 的不等式 $2 \cdot 3^{2x} - 3^{x+a^2} - a - 3 > 0$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时恒成立, 则

实数 a 的取值范围为.

解: 设 $t = 3^x$, 则 $t \in [1, 3]$, 原不等式可化为 $a^2 - a - 3 > -2t^2 + t$, $t \in [1, 3]$.

等价于 $a^2 - a - 3$ 大于 $f(t) = -2t^2 + t$ 在 $[1, 3]$ 上的最大值.

答案: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

【例2】 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, $g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象关于

直线 $x = 1$ 对称, 而当 $x \in [2, 3]$ 时, $g(x) = x^2 - 4x + c$ (c 为常数)。

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 对于任意 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 且 $x_1 < x_2$, 求证: $|f(x_2) - f(x_1)| \leq 2|x_2 - x_1|$;

(3) 对于任意 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 且 $x_1 < x_2$, 求证: $|f(x_2) - f(x_1)| \leq 1$.

解: (1) 设 $g(x)$ 上点 $Q(x_0, y_0)$ 与 $f(x)$ 上点 $P(x, y)$ 对应,

$\therefore y_0 = y, x_0 = 2 - x$; $\because (x_0, y_0)$ 在 $g(x)$ 图象上

$\therefore y = (2 - x)^2 - 4(2 - x) + c = 4 - 4x + x^2 - 8 + 4x + c = x^2 - 4 + c$

$\because g(x)$ 定义域为 $x \in [2, 3]$, 而 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,

所以, 上述解析式是 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上的解析式

$\because f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, $\therefore f(0)=0, \therefore c=-4$

所以, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $-x \in [-1, 0]$, $f(x) = -f(-x) = -x^2$

所以 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0] \\ -x^2, & x \in (0, 1] \end{cases}$

(2) 当 $x \in [0, 1]$ 时, $|f(x_2) - f(x_1)| = |x_2^2 - x_1^2| = |(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)|$

$\because x_1, x_2 \in [0, 1], x_1 < x_2, \therefore 0 < x_1 + x_2 < 2$, 所以 $|f(x_2) - f(x_1)| \leq 2|x_2 - x_1|$

(3) $\because x_1, x_2 \in [0, 1], \therefore 0 \leq x_2^2 \leq 1, 0 \leq x_1^2 \leq 1$

$\therefore 1 - x_2^2 \leq 1 - x_1^2 \leq 1, \therefore |x_2^2 - x_1^2| \leq 1$

即 $|f(x_2) - f(x_1)| \leq 1$

【例3】 已知函数 $f(x) = \log_a x \sqrt{x^2 - 2}$ ($a > 0, a \neq 1$)

(1) 求反函数 $f^{-1}(x)$, 并求出其定义域。

(2) 设 $P(n) = \frac{\sqrt{2}}{2} f^{-1}(n \log_a \sqrt{2})$, 如果 $P(n) < \frac{3^n - 3^{-n}}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$), 求 a 的取值范围。

解: (1) 设 $y = f(x) = \log_a \log_a (x \sqrt{x^2 - 2}) (x \sqrt{x^2 - 2})$

$\therefore a^y = x + \sqrt{x^2 - 2} \quad a^y - x = \sqrt{x^2 - 2}$

两端平方整理得: $a^{2y} - 2xa^y + 2 = 0 \quad x = \frac{a^{2y} - 2}{2a^y} = \frac{a^y - 2a^{-y}}{2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{a^x - 2a^{-x}}{2} \because a > 1$ 时, $f(x) = \log_a x \sqrt{x^2 - 2}$ 值域为 $\log_a \sqrt{2}$,

0<a<1 时, f(x) 的值域为 $[\log_a \sqrt{2}, 1]$

∴ f⁻¹(x) 的定义域为: a>1 时, x∈ $[\log_a \sqrt{2}, 1]$, 0<a<1 时, x∈ $[1, \log_a \sqrt{2}]$

$$(2) P(n) = \frac{\sqrt{2}}{2} f^{-1}(n - \log_a \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a^n - \frac{\sqrt{2}}{2} a^{-n} \right) = \frac{1}{2} (a^n - a^{-n})$$

$$\text{由 } Pn = \frac{3^n - 3^{-n}}{2} = \frac{a^n - a^{-n}}{2} = \frac{3^n - 3^{-n}}{2} \Rightarrow a^n - a^{-n} = 3^n - 3^{-n}$$

$$\text{即 } a^n + a^{-n} - (3^n + 3^{-n}) = \frac{(a^n - 3^n)(3a^n - 1)}{3^n a^n} < 0$$

$$\because (3a)^n > 0 \therefore (a^n - 3^n)(3a^n - 1) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < a < 3;$$

又 ∵ n∈N, ∴ n+log_a√2 > log_a√2 a>1

$$\text{即 } \frac{1}{3} < a < 3$$

【例4】 设函数 f(x) 的定义域关于原点对称, 且满足 ①

$$f(x_1 - x_2) = \frac{f(x_1)f(x_2) - 1}{f(x_1) - f(x_2)} \quad \text{②存在正常数 } a, \text{ 使 } f(a) = 1, \text{ 求证: (1) } f(x) \text{ 为奇函数;}$$

(2) f(x) 为周期函数, 且一个周期为 4a。

证明: (1) 令 x = x₁ - x₂

$$\text{则 } f(-x) = f(x_2 - x_1) = \frac{f(x_2)f(x_1) - 1}{f(x_2) - f(x_1)} = -\frac{f(x_1)f(x_2) - 1}{f(x_1) - f(x_2)}$$

$$= -f(x_1 - x_2) = -f(x), \therefore f(x) \text{ 为奇函数。}$$

$$(2) \because f(x+a) = f[x - (-a)] = \frac{f(-a)f(x) - 1}{f(-a) - f(x)} = \frac{f(a)f(x) - 1}{f(a) - f(x)} = \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1}$$

$$\therefore f(x+2a) = \frac{f(x-a) - 1}{f(x-a) + 1} = \frac{\frac{f(x) - 1}{f(x) + 1} - 1}{\frac{f(x) - 1}{f(x) + 1} + 1} = \frac{1}{f(x)}$$

$$\therefore f(x+4a) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = f(x)$$

∴ f(x) 是以 4a 为周期的周期函数。

【例5】 已知函数 $f(x) = \log_m \frac{x-3}{x+3}$

(1) 若 f(x) 的定义域为 (α, β), (β > α > 0), 判断 f(x) 在定义域上的增减性, 并加以说明;

(2) 当 $0 < m < 1$ 时, 使 $f(x)$ 的值域为 $\log_m m - \beta - 1, \log_m m - \alpha - 1$ 的定义域区间为 α, β ($\beta > \alpha > 0$) 是否存在? 请说明理由.

解: (1) $\frac{x-3}{x+3} = 0 \quad x < -3 \text{ 或 } x > 3.$

$\because f(x)$ 定义域为 $\alpha, \beta, \therefore \alpha > 3$

设 $\beta \geq x_1 > x_2 \geq \alpha$, 有 $\frac{x_1-3}{x_1+3} - \frac{x_2-3}{x_2+3} = \frac{6(x_1-x_2)}{(x_1+3)(x_2+3)} > 0$

当 $0 < m < 1$ 时, $f(x)$ 为减函数, 当 $m > 1$ 时, $f(x)$ 为增函数.

(2) 若 $f(x)$ 在 α, β 上的值域为 $\log_m m - \beta - 1, \log_m m - \alpha - 1$

$\because 0 < m < 1, f(x)$ 为减函数.

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \log_m \frac{\beta-3}{\beta+3} = \log_m m - \beta - 1 \\ \therefore f(\alpha) &= \log_m \frac{\alpha-3}{\alpha+3} = \log_m m - \alpha - 1 \end{aligned}$$

$$\text{即 } \begin{cases} m^{\beta-2} = (2m-1)\beta-3(m-1) = 0 \\ m^{\alpha-2} = (2m-1)\alpha-3(m-1) = 0 \end{cases}, \text{ 又 } \beta > \alpha > 3$$

即 α, β 为方程 $mx^2 + (2m-1)x - 3(m-1) = 0$ 的大于 3 的两个根

$$\begin{aligned} \Delta &= (2m-1)^2 + 12(m-1) > 0 \\ \therefore \frac{2m-1}{2m} &> 3 \quad \therefore 0 < m < \frac{2\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

故当 $0 < m < \frac{2\sqrt{3}}{4}$ 时, 满足题意条件的 m 存在.

【例6】 已知函数 $f(x) = x^2 - (m+1)x + m$ ($m \in \mathbb{R}$)

(1) 若 $\tan A, \tan B$ 是方程 $f(x) + 4 = 0$ 的两个实根, A, B 是锐角三角形 ABC 的两个内角.

求证: $m \geq 5$;

(2) 对任意实数 α , 恒有 $f(2 + \cos \alpha) \leq 0$, 证明 $m \geq 3$;

(3) 在(2)的条件下, 若函数 $f(\sin \alpha)$ 的最大值是 8, 求 m .

解: (1) 证明: $f(x) + 4 = 0$ 即 $x^2 - (m+1)x + m + 4 = 0$. 依题意:

$$\begin{aligned} (m-1)^2 - 4(m+4) &> 0 \\ \tan A + \tan B &= m+1 > 0 \quad \text{又 } A, B \text{ 锐角为三角形内两内角} \\ \tan A \tan B &= m+4 > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < A+B < \pi$$

$$\therefore \tan(A+B) < 0, \text{ 即 } \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{\frac{m-1}{m-3}}{0} < 0$$

$$\begin{aligned} m^2 - 2m - 15 &\leq 0 \\ m - 1 &\geq 0 \\ \therefore m - 4 &\geq 0 \quad \therefore m \geq 5 \\ \frac{m-1}{m-3} &\leq 0 \end{aligned}$$

(2) 证明: $\because f(x) = (x-1)(x-m)$

又 $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, $\therefore 1 \leq 2 + \cos \alpha \leq 3$, 恒有 $f(2 + \cos \alpha) \leq 0$

即 $1 \leq x \leq 3$ 时, 恒有 $f(x) \leq 0$ 即 $(x-1)(x-m) \leq 0$

$\therefore m \geq x$ 但 $x_{\max} = 3$, $\therefore m \geq x_{\max} = 3$

$$(3) \text{ 解: } \because f(\sin \alpha) = \sin^2 \alpha - (m+1)\sin \alpha + m = (\sin \alpha - \frac{m+1}{2})^2 - m - \frac{(m-1)^2}{4}$$

且 $\frac{m+1}{2} \geq 2$, $\therefore$ 当 $\sin \alpha = -1$ 时, $f(\sin \alpha)$ 有最大值 8.

即 $1 + (m+1) + m = 8$, $\therefore m = 3$

【例7】 已知函数 $f(x) = \log_2(x^2 - 2mx - 2m^2 - \frac{1}{m^2 - 2})$ 的定义域为实数集。

(1) 某某数 m 的所有允许值组成的集合 M ; (2) 求证: 对所有 $m \in M$, 恒有 $f(x) \geq 2$ 。

证明 (1) $\because f(x) = \log_2(x^2 - 2mx - 2m^2 - \frac{1}{m^2 - 2})$ 的定义域为实数集

$$\therefore x^2 - 2mx - 2m^2 - \frac{1}{m^2 - 2} \geq 0 \text{ 恒成立}$$

$$\therefore -2m^2 - 4 - 2m^2 - \frac{1}{m^2 - 2} \geq 0$$

$$\therefore \frac{m^4 - 2m^2 - 1}{m^2 - 2} \geq 0$$

$$\therefore M = \{m \mid m = \sqrt{2} \text{ 或 } m = -\sqrt{2}, m \in \mathbb{R}\}$$

$$(2) \text{ 令 } u(x) = x^2 - 2mx - 2m^2 - \frac{1}{m^2 - 2} = (x - m)^2 - m^2 - \frac{1}{m^2 - 2}$$

$$\therefore u(x)_{\min} = -m^2 - \frac{1}{m^2 - 2} = -m^2 - 2 - \frac{1}{m^2 - 2} = -2 - \frac{1}{m^2 - 2} \geq -4$$

$$\therefore \log_2 u(x) \geq \log_2 4 = 2$$

【例8】 设 $f(x) = \log_a \frac{a(x^2 - 1)}{x(a^2 - 1)}$, ($a > 0, a \neq 1$), 求证: (1) 过函数 $y = f(x)$

图象上任意两点直线的斜率恒大于 0; (2) $f(3) > 3$ 。

解: (1) 令 $t = \log_a x$, 则 $x = a^t$, $f(x) = \frac{a}{a^2 - 1} (a^t - a^{-t})$ ($t \in \mathbb{R}$)

$$\therefore f(x) = \frac{a}{a^2 - 1} (a^x - a^{-x}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\text{设 } x_1 < x_2, f(x_1) - f(x_2) = \frac{a(a^{x_1} - a^{x_2}) \cdot (a^{x_1 + x_2} - 1)}{(a^2 - 1)a^{x_1 + x_2}}$$

(1) $a > 1$ 时, $\dots, f(x_1) < f(x_2)$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增

(2) $0 < a < 1$ 时, $\dots, f(x_1) < f(x_2)$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增

$$\therefore x_1 < x_2 \text{ 时, 恒有 } f(x_1) < f(x_2), \therefore K = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

$$(2) f(3) = \frac{a}{a^2 - 1} (a^3 - a^{-3}) = \frac{a(a^6 - 1)}{a^3(a^2 - 1)} = \frac{a^4 - a^2 - 1}{a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} - 1 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} - 1 = 3$$

$$\therefore a > 0, a \neq 1 \quad \therefore a^2 \neq \frac{1}{a^2} \quad \therefore \text{上述不等式不能取等号, } \therefore f(x) > 3$$

【例9】 已知函数 $f(x) = \lg(a^x - kb^x)$ $k \in \mathbb{R}, a > 1, b > 0$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

问是否存在这样的 a, b , 使 $f(x)$ 恰在 $(1, +\infty)$ 上取正值, 且 $f(3) = \lg 4$, 若存在, 求出 a, b 的值, 若不存在, 说明理由。

解: 由 $a^x - kb^x > 0$, 得 $(\frac{a}{b})^x > k$, $\therefore a > 1 > b > 0, \therefore \frac{a}{b} > 1, \therefore x > \log_{\frac{a}{b}} k$

又 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, $\therefore \log_{\frac{a}{b}} k = 0, k = 1, \therefore f(x) = \lg(a^x - b^x)$

$$\text{设 } 0 < x_1 < x_2, y_1 = y_2 = \lg \frac{a^{x_1} - b^{x_1}}{a^{x_2} - b^{x_2}}, \therefore a > 1 > b > 0, \therefore a^{x_1} < a^{x_2}, -b^{x_1} < -b^{x_2}$$

$$\therefore 0 < a^{x_1} - b^{x_1} < a^{x_2} - b^{x_2}, \therefore 0 < \frac{a^{x_1} - b^{x_1}}{a^{x_2} - b^{x_2}} < 1, \therefore \lg \frac{a^{x_1} - b^{x_1}}{a^{x_2} - b^{x_2}} < 0$$

$\therefore y_1 = y_2 = 0, y_1 < y_2, \therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

$\therefore x \in (1, +\infty)$ 时, 必有 $f(x) > f(1) = \lg(a - b)$

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上取正值, $\therefore \lg(a - b) = 0 \quad a - b = 1 \quad (1)$

$$\text{又 } f(3) = \lg 4 \quad \therefore \lg(a^3 - b^3) = \lg 4, a^3 - b^3 = 4 \quad (2)$$

$$\text{解(1)(2)得: } a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ 即有在 } a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ 满足条件}$$

【例10】 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$ 且 $b \neq 0$)。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/397124024123006162>