

吉林省吉林市第一中学 2023-2024 学年高二下学期 7 月期末考

试数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 已知集合 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $M = \{-2, 2\}$, $N = \{x | -1 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{N}\}$, 则 $(\complement_U M) \cap N = (\quad)$

- A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $[-1, 1]$ C. $\{0, 1\}$ D. $[0, 1]$

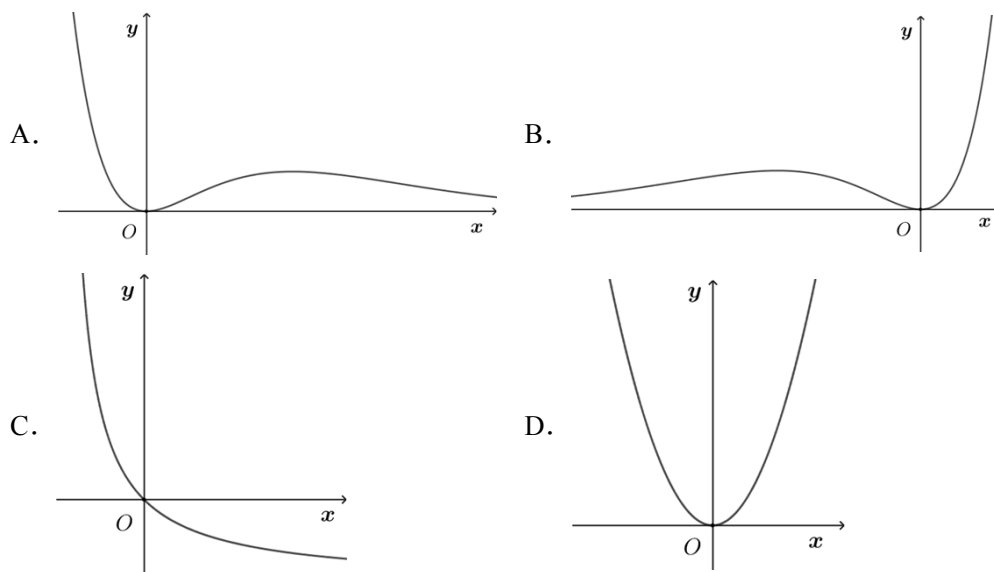
2. 已知复数 $z = 2 + i$, 则 $\frac{i^{2025}}{\bar{z}} = (\quad)$

- A. $\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$ B. $-\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$ C. $\frac{1}{5} + \frac{2i}{5}$ D. $-\frac{1}{5} + \frac{2i}{5}$

3. 若“ $\forall x \in [0, 2]$, $2^{x-1} + 2^{-x} - m < 0$ ”为假命题, 则 m 的取值范围为 $(\quad)$

- A. $(-\infty, \sqrt{2}]$ B. $[\sqrt{2}, +\infty)$ C. $(-\infty, \frac{9}{4}]$ D. $[\frac{9}{4}, +\infty)$

4. 函数 $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ 的图象大致为 $(\quad)$



5. 设 n 为正整数, $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中存在常数项, 则 n 的最小值为 $(\quad)$

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

6. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 - 2x$ 存在单调递减区间, 则实数 a 的取值范围是 $(\quad)$

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, +\infty)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

7. 已知圆 O 的半径为 2, 弦 MN 的长为 $2\sqrt{3}$, 若 $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$, 则 $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OP} =$ ()

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

8. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x$, $g(x) = \begin{cases} 2x+2, & x < 0 \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(g(x)) - m = 0$

有两个不等实根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1$ 的最大值是 ()

- A. $\ln 2$ B. $\ln 2 + \frac{1}{2}$ C. $3 - \ln 2$ D. $\ln 2 + 1$

二、多选题

9. 下列说法正确的是 ()

- A. 当 $x > 1$ 时, $x + \frac{4}{x-1}$ 的最小值是 5
- B. 在 $\triangle ABC$ 中, 命题 $p: A > B$, 命题 $q: \sin A > \sin B$, 则命题 p 是命题 q 的充分不必要条件
- C. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (2, 2)$, 则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
- D. 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 函数 $f(x-1)$ 为偶函数, 则 $f(2) = 0$

10. 下列说法中, 正确的是 ()

- A. 若随机变量 $X: N(2, \sigma^2)$, 且 $P(X > 6) = 0.4$, 则 $P(-2 < X < 2) = 0.1$
- B. 一组数据 6, 7, 7, 9, 13, 14, 16, 17, 21 的第 70 百分位数为 15
- C. 在一元线性回归模型分析中, 决定系数 R^2 用来刻画模型的拟合效果, 若 R^2 值越小, 则模型的拟合效果越好
- D. 设随机事件 A, B , 已知 A 事件发生的概率为 0.3, 在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率为 0.4, 在事件 A 不发生的条件下事件 B 发生的概率为 0.2, 则事件 B 发生的概率为 0.26

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) + f(x+3) = f(2024)$, $f(-x) = f(x+2)$, 且

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, 则 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 4 B. $f(2) = 0$
- C. 函数 $f(x-1)$ 是奇函数 D. $\sum_{k=1}^{2024} k \cdot f\left(k - \frac{1}{2}\right) = -2024$

三、填空题

12. 若 $\vec{OA} = (6, 5)$, $\vec{OB} = (3, 1)$, 则与向量 $\vec{BA}$ 同向的单位向量是_____.

13. 已知命题 P : 函数 $f(x) = x^{-m^2+m}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 命题 q : $m < a$, 若 P 是 q 的充分不必要条件, 则 a 的取值范围是_____.

14. 甲、乙、丙、丁四位同学参加跳台滑雪、越野滑雪、单板滑雪三个项目的比赛, 每人只能参加一个项目, 每个项目至少一个人参加, 且甲、乙两人不能参加同一项目的比赛, 则四人参加比赛的不同方案一共有_____种; 如果符合以上条件的各种方案出现的概率相等, 定义事件 A 为丙和丁参加的项目不同, 事件 B 为甲和乙恰好有一人参加跳台滑雪, 则 $P(B|A) =$ _____.

四、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 对应的边分别是 a, b, c , 且 $b \cos C + c \cos B = 3a \cos A$.

(1) 求 $\cos A$;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积是 $\sqrt{2}$, $a = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

16. 2021 年某公司为了提升一项产品的竞争力和市场占有率, 对该项产品进行了科技创新和市场开发, 经过一段时间的运营后, 统计得到 x, y 之间的五组数据如下表:

x	1	2	3	4	5
y	9	11	14	26	20

其中, x (单位: 百万元) 是科技创新和市场开发的总投入, y (单位: 百万元) 是科技创新和市场开发后的收益.

(1) 求相关系数 r 的大小 (精确到 0.01), 并判断科技创新和市场开发后的收益 y 与科技创新和市场开发的总投入 x 的线性相关程度;

(2) 该公司对该产品的满意程度进行了调研, 在调研 100 名男女消费者中, 得到的数据如下表:

	满意	不满意	总计
男	45	10	55

女	25	20	45
总计	70	30	100

是否有 99% 的把握认为消费者满意程度与性别有关？

(3) 对 (2) 中调研的 45 名女消费者，按照其满意程度进行分层抽样，从中抽出 9 名女消费者到公司进行现场考察，再从这 9 名女消费者中随机抽取 4 人进行深度调研，设这 4 人中选择“满意”的人数为 X ，求 X 的分布列及数学期望。

参考公式：① $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$ ；

② $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$ 。

临界值表：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

参考数据： $\sqrt{485} \approx 22$ 。

17. 已知函数 $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ 。

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $\left(a, a + \frac{1}{2}\right)$ 上存在极值，求正实数 a 的取值范围；

(2) 若当 $x \geq 1$ 时，不等式 $f(x) \geq \frac{k}{x+1}$ 恒成立，求实数 k 的取值范围。

18. 某网络 APP 在平台开展了一项有奖闯关活动，并对每一关根据难度进行赋分，竞猜活动共五关，规定：上一关不通过则不进入下一关，本关第一次未通过有再挑战一次的机会，两次均未通过，则闯关失败，且各关能否通过相互独立，已知甲、乙、丙三人都参加了该项活动。

(1) 若甲第一关通过的概率为 $\frac{3}{4}$ ，第二关通过的概率为 $\frac{2}{3}$ ，求甲可以进入第三关的概率；

(2) 已知该闯关活动累计得分服从正态分布，且满分为 450 分，现要根据得分给共 2500 名参加者中得分前 400 名发放奖励，

① 假设该闯关活动平均分数为 171 分，351 分以上共有 57 人，已知甲的得分为 270

分，问甲能否获得奖励，请说明理由；

②丙得知他的分数为430分，而乙告诉丙：“这次闯关活动平均分数为201分，351分以上共有57人”，请结合统计学知识帮助丙辨别乙所说信息的真伪.

附：若随机变量 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ；

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ； $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

19. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a}{2}x^2 + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 设函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 ,

(i) 求实数 a 的取值范围；

(ii) 若 x_1, x_2 满足 $|\ln x_1 - \ln x_2| \geq \frac{\ln 2}{2}$ ，求实数 a 的最大值.

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	C	A	B	B	B	B	ACD	AD
题号	11									
答案	AB									

1. C

【分析】

由已知求解 $\complement_U M$ ，化简集合 N 后再由交集运算得答案.

【详解】

$$\because \text{集合 } U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \quad M = \{-2, 2\},$$

$$\therefore \complement_U M = \{-1, 0, 1\}, \quad \text{又 } N = \{x | -1 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\},$$

$$\therefore (\complement_U M) \cap N = \{0, 1\}.$$

故选: C.

2. D

【分析】先求共轭复数 $\bar{z} = 2 - i$ ，再根据复数代数形式的除法运算化简复数即可.

【详解】因为 $z = 2 + i$ ，所以 $\bar{z} = 2 - i$ ，

$$\text{所以 } \frac{i^{2025}}{\bar{z}} = \frac{i}{2-i} = \frac{i(2+i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2i+i^2}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

故选: D.

3. C

【分析】转化为命题的否定为真命题，再分离参数，设新函数求出其最大值即可得到答案.

【详解】由题意得该命题的否定为真命题，

即“ $\exists x \in [0, 2], 2^{x-1} + 2^{-x} - m \geq 0$ ”为真命题，

$$2^{x-1} + 2^{-x} - m \geq 0 \text{ 即 } m \leq 2^{x-1} + 2^{-x},$$

令 $t = 2^x$ ，因为 $x \in [0, 2]$ ，则 $t \in [1, 4]$ ，

则存在 $t \in [1, 4]$ ，使得 $m \leq \frac{1}{2}t + \frac{1}{t}$ 成立，

$$\text{令 } f(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{t}, \text{ 令 } \frac{t}{2} = \frac{1}{t}, \text{ 则 } t = \sqrt{2} \text{ (负舍)},$$

则根据对勾函数的性质知 $f(t)$ 在 $[1, \sqrt{2})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{2}, 4]$ 上单调递增，

且 $f(1) = \frac{3}{2}$, $f(4) = \frac{9}{4}$, 则 $f(t)_{\max} = f(4) = \frac{9}{4}$, 则 $m \leq \frac{9}{4}$.

故选: C.

4. A

【分析】对 $f(x)$ 求导, 讨论 x 的范围判断 $f'(x)$ 的符号确定 $f(x)$ 的单调性, 即可确定大致图象.

【详解】由解析式知: $f'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}$,

$\therefore 0 < x < 2$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; $x < 0$ 或 $x > 2$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减;

结合各选项易知: A 符合要求.

故选: A

5. B

【分析】写出二项式展开式的通项, 令 x 的指数为 0, 进而可得结果.

【详解】 $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_n^r (2x^2)^{n-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = 2^{n-r} C_n^r \cdot x^{2n-3r}$,

令 $2n-3r=0$ 得 $n = \frac{3}{2}r$, 因为 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以当 $r=2$ 时, n 有最小值 3,

故选: B

6. B

【分析】先得到 $f(x)$ 的定义域, 由题意得到 $f'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解, 参变分离后得到

$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} < a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解, 利用配方求出 $y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \geq -1$, 得到实数 a 的取值范围.

【详解】 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 - 2x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

由题意得 $f'(x) = \frac{1}{x} - ax - 2 < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解,

即 $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} < a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解,

其中 $y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 - 1 \geq -1$,

故 $a > -1$, 故实数 a 的取值范围是 $(-1, +\infty)$.

故选: B

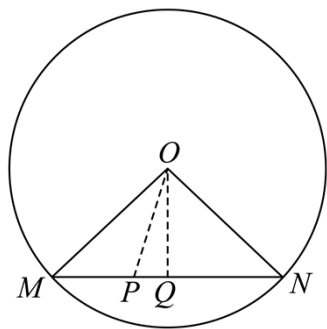
7. B

【分析】根据题意作出图形, 可求出 $\overset{\curvearrowright}{MO}$ 与 $\overset{\curvearrowright}{OP}$

的夹角，再利用平面向量的数量积，从而求解.

【详解】如图，设 MN 的中点为 Q ，连接 OQ ，则 $OQ \perp MN$. 由 $|\vec{NO}| = |\vec{MO}| = 2$ ，
 $|\vec{MN}| = 2\sqrt{3}$ ，得 $|MQ| = \sqrt{3}$ ， $|OQ| = 1$ ，所以 $\angle OMQ = \frac{\pi}{6}$ ， $|\vec{MP}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，所以 $|PQ| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，
 所以 $\angle POQ = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $\angle POM = \frac{\pi}{6}$ ， $|\vec{OP}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，
 所以 $\vec{MO} \cdot \vec{OP} = -\vec{OM} \cdot \vec{OP} = -|\vec{OM}| |\vec{OP}| \cos \frac{\pi}{6} = -2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -2$.

故选：B.



8. B

【分析】先利用导函数得出函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增，将关于 x 的方程 $f(g(x)) - m = 0$ 有两个不等实根转化为关于 x 的方程 $t = g(x)$ 有两个不等实根；再数形结合得出 $t \in [0, 2)$ ，
 $x_2 - x_1 = \ln(t+1) - \frac{1}{2}(t-2)$ ；最后构造函数 $\varphi(t) = \ln(t+1) - \frac{1}{2}(t-2)$ ， $t \in [0, 2)$ ，并利用导数求出该函数的最大值即可.

【详解】由 $f(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x$ 可得：

函数 $f(x)$ 的定义域为 R ， $f'(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x \geq 2 + 2\cos x \geq 0$ ，

所以函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

令 $t = g(x)$.

因为关于 x 的方程 $f(g(x)) - m = 0$ 有两个不等实根 x_1, x_2 ， $x_1 < x_2$ ，

则关于 x 的方程 $t = g(x)$ 有两个不等实根 x_1, x_2 ， $x_1 < x_2$.

作出函数 $y = g(x)$ 的图象，如图所示：

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/397143015120006151>