

专题 10 导数解答题分类练

一、曲线的切线问题

1. (2023 届河南省开封市通许县高三冲刺卷) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

(1) 若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = x - 1$ 相切, 求实数 a 的值;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - x + 1$ 有且只有一个零点, 求实数 a 的取值范围.

【解析】(1) 设直线 $y = x - 1$ 与函数 $f(x)$ 的图象相切于点 (x_0, y_0) ,

因为 $f'(x) = e^x - 2ax$,

$$\text{所以} \begin{cases} e^{x_0} - 2ax_0 = 1 & \text{①} \\ y_0 = x_0 - 1 & \text{②} \\ y_0 = e^{x_0} - ax_0^2 & \text{③} \end{cases}, \text{由②③可得 } e^{x_0} - ax_0^2 = x_0 - 1 \text{ ④, 易知 } x_0 \neq 0.$$

由①得 $a = \frac{e^{x_0} - 1}{2x_0}$, 代入④可得 $e^{x_0} - \frac{e^{x_0} - 1}{2x_0} \cdot x_0^2 = x_0 - 1$,

即 $2e^{x_0} - x_0 e^{x_0} + x_0 = 2x_0 - 2$, 即 $(2 - x_0)e^{x_0} = x_0 - 2$, 解得 $x_0 = 2$.

$$\text{故 } a = \frac{e^2 - 1}{2 \times 2} = \frac{e^2 - 1}{4}.$$

(2) 令 $g(x) = f(x) - x + 1 = 0$, 可得 $e^x - ax^2 - x + 1 = 0$,

由题意可得 $e^x - ax^2 - x + 1 = 0$ 只有一个根.

易知 $x = 0$ 不是方程 $e^x - ax^2 - x + 1 = 0$ 的根, 所以 $x \neq 0$,

所以由 $e^x - ax^2 - x + 1 = 0$, 可得 $a = \frac{e^x - x + 1}{x^2}$.

设 $h(x) = \frac{e^x - x + 1}{x^2}$, 则 $y = a$ 与 $h(x) = \frac{e^x - x + 1}{x^2}$ 的图象只有一个交点.

$$h'(x) = \frac{(e^x - 1)x^2 - 2x(e^x - x + 1)}{x^4} = \frac{(e^x + 1)(x - 2)}{x^3},$$

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 单调递增;

当 $x \in (0, 2)$ 时, $h'(x) < 0$, 函数 $h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 单调递增.

设 $t(x) = e^x - x + 1$, 则 $t'(x) = e^x - 1$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $t'(x) < 0$, 函数 $t(x)$ 单调递减;

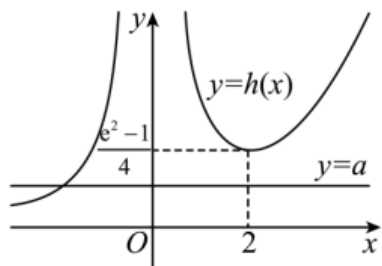
当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $t'(x) > 0$, 函数 $t(x)$ 单调递增.

所以 $t(x) \geq t(0) = 2$.

所以 $h(x) = \frac{e^x - x + 1}{x^2} > 0$.

又 $h(2) = \frac{e^2 - 2 + 1}{2^2} = \frac{e^2 - 1}{4}$, $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$,

画出函数 $h(x)$ 的图象如图所示:



由图可知, 若 $y = a$ 与 $h(x) = \frac{e^x - x + 1}{x^2}$ 的图象只有一个交点,

则 $0 < a < \frac{e^2 - 1}{4}$.

所以实数 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{e^2 - 1}{4}\right)$.

2. (2024 届福建省莆田哲理中学高三上学期月考) 已知函数 $f(x) = me^x - x$, $m \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $m = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 试讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

【解析】(1) 因为 $m = 2$,

所以 $f(x) = 2e^x - x$, 则 $f(0) = 2$, 切点为 $(0, 2)$

又因为 $f'(x) = 2e^x - 1$

所以 $f'(0) = 2 - 1 = 1$, 即 $k = 1$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程是 $y - 2 = 1(x - 0)$,

即 $y = x + 2$.

(2) 因为 $f(x) = me^x - x$, $m \in \mathbb{R}$,

所以 $f'(x) = me^x - 1$,

当 $m \leq 0$ 时, $f'(x) = me^x - 1 < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减;

当 $m > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\ln m$,

当 $x < -\ln m$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > -\ln m$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln m)$ 上单调递减, 在 $(-\ln m, +\infty)$ 上单调递增,

综上, 当 $m \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减;

当 $m > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln m)$ 上单调递减, 在 $(-\ln m, +\infty)$ 上单调递增

3. (2024 届重庆市第一中学高三上学期开学考) 已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^3 + 2x$.

(1) 设 $a = 0$, 经过点 $(0, -1)$ 作函数 $y = f(x)$ 图像的切线, 求切线的方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 有极大值, 无最大值, 求实数 a 的取值范围.

【解析】(1) $a = 0$ 时 $f(x) = x \ln x + 2x$, $f'(x) = \ln x + 3$,

设切点为 $(x_0, x_0 \ln x_0 + 2x_0)$, 则切线斜率为 $k = f'(x_0) = \ln x_0 + 3$,

切线方程: $y - (x_0 \ln x_0 + 2x_0) = (\ln x_0 + 3)(x - x_0)$,

将点 $(0, -1)$ 代入得: $-1 - (x_0 \ln x_0 + 2x_0) = (\ln x_0 + 3)(-x_0) \Rightarrow x_0 = 1$,

此时斜率 $k = 3$, 所以切线方程为 $y = 3x - 1$.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 3 + \ln x - 3ax^2$, 令 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - 6ax$

(1) 当 $a \leq 0$ 时 $g'(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

注意到 $x \rightarrow 0$ 时, $f'(x) \rightarrow -\infty$, 注意到 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f'(x) \rightarrow +\infty$,

故存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 在 $x \in (0, x_0)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 在 $x \in (x_0, +\infty)$ 时,

$f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 函数 $f(x)$ 有极小值, 无极大值, 不符合题意.

(2) 当 $a > 0$ 时, 令 $g'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(0, \sqrt{\frac{1}{6a}}\right)$, 令 $g'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(\sqrt{\frac{1}{6a}}, +\infty\right)$,

所以 $f'(x)$ 在 $\left(0, \sqrt{\frac{1}{6a}}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\sqrt{\frac{1}{6a}}, +\infty\right)$ 单调递减.

当 $x \rightarrow 0$ 时 $f'(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f'(x) \rightarrow -\infty$, $f'\left(\sqrt{\frac{1}{6a}}\right) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\ln 6a$,

所以 $f'(x)_{\max} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\ln 6a$,

若 $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\ln 6a \leq 0$, 则 $f'(x) \leq 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 无极值和最值.

若 $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\ln 6a > 0$, 即 $a < \frac{e^5}{6}$, 此时存在 $0 < x_1 < \sqrt{\frac{1}{6a}} < x_2$, 使得 $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$,

且在 $(0, x_1), (x_2, +\infty)$ 有 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 在 (x_1, x_2) 有 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 此时 $f(x_2)$ 为 $f(x)$ 的极大值.

注意到 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) \rightarrow 0$, 要使 $f(x)$ 无最大值, 则还应满足 $f(x_2) < 0$,

即 $x_2 \ln x_2 - ax_2^3 + 2x_2 < 0$ (*), 同时 $f'(x_2) = 0 \Rightarrow 3 + \ln x_2 - 3ax_2^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{3 + \ln x_2}{3x_2^2}$,

带入 (*) 整理得 $2\ln x_2 + 3 < 0 \Rightarrow x_2 < e^{-\frac{3}{2}}$.

由于 $x_2 > \sqrt{\frac{1}{6a}}$, 且 $f'(x)$ 在 $\left(\sqrt{\frac{1}{6a}}, +\infty\right)$ 单调递减, 故 $f'(x_2) > f'\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) \Leftrightarrow f'\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) < 0$,

即 $\frac{3}{2} - 3ae^{-3} < 0 \Rightarrow a > \frac{e^3}{2}$,

综上实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{e^3}{2}, \frac{e^5}{6}\right)$.

4. (2024 届江苏省南通市高三上学期质量监测) 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ($a > 0$) 的极小值为 -2 , 其导函数 $f'(x)$ 的图象经过 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 两点.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 恰有三条过点 $P(1, m)$ 的切线, 求实数 m 的取值范围.

【解析】(1) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$,

因为 $a > 0$ ，且 $f'(x)$ 的图象经过 $A(-1,0)$ ， $B(1,0)$ 两点.

所以当 $x \in (-\infty, -1)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增；

当 $x \in (-1, 1)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；

当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，所以 $f(1) = a + b + c = -2$ ，

又因为 $f'(-1) = 0$ ， $f'(1) = 0$ ，所以 $3a - 2b + c = 0$ ， $3a + 2b + c = 0$ ，

$$\text{解方程组} \begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = -2 \end{cases} \text{得 } a = 1, \quad b = 0, \quad c = -3,$$

所以 $f(x) = x^3 - 3x$.

(2) 设切点为 (x_0, y_0) ，则 $y_0 = x_0^3 - 3x_0$ ，

因为 $f'(x) = 3x^2 - 3$ ，所以 $f'(x_0) = 3x_0^2 - 3$ ，

所以切线方程为 $y - (x_0^3 - 3x_0) = (3x_0^2 - 3)(x - x_0)$ ，

将 $P(1, m)$ 代入上式，得 $2x_0^3 - 3x_0^2 + m + 3 = 0$.

因为曲线 $y = f(x)$ 恰有三条过点 $P(1, m)$ 的切线，所以方程 $2x^3 - 3x^2 + m + 3 = 0$ 有三个不同实数解.

记 $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + m + 3$ ，则导函数 $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$ ，

令 $g'(x) = 0$ ，得 $x = 0$ 或 1 .

列表：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

所以 $g(x)$ 的极大值为 $g(0) = m + 3$ ， $g(x)$ 的极小值为 $g(1) = m + 2$ ，

所以 $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}$, 解得 $-3 < m < -2$. 故 m 的取值范围是 $(-3, -2)$.

5. (2024 届上海市华东师范大学第二附属中学高三上学期质量调研) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为开区间 I , 若存在 $x_0 \in I$, 使得 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的切线 l 与 $y = f(x)$ 的图象只有唯一的公共点, 则称切线 l 是 $y = f(x)$ 的一条“ L 切线”.

(1) 判断函数 $y = \ln x$ 是否存在“ L 切线”, 若存在, 请写出一条“ L 切线”的方程, 若不存在, 请说明理由;

(2) 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + 1 (x \in (0, c))$, 若对任意正实数 c , 函数 $y = f(x)$ 都存在“ L 切线”, 求实数 a 的取值范围;

(3) 已知实数 $b > 0$, 函数 $g(x) = e^{2x} - be^x + 6x (x \in \mathbf{R})$, 求证: 函数 $y = g(x)$ 存在无穷多条“ L 切线”, 且至少一条“ L 切线”的切点的横坐标不超过 $\ln \frac{b}{2}$.

【解析】(1) 记 $f(x) = \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x}$

取 $x_0 = 1$, $f'(1) = 1$, 切线方程为 $y = x - 1$.

与函数 $y = \ln x$ 联立, 得 $\ln x - x + 1 = 0$.

记 $g(x) = \ln x - x + 1$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1$,

当 $x \in (0, 1)$ 时 $g'(x) > 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时 $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上严格增, 在 $(1, +\infty)$ 上严格减, $g(x)_{\max} = g(1) = 0$,

故函数 $g(x) = \ln x - x + 1$ 只有一个零点 $x = 1$, 故 $y = x - 1$ 是一条“ L 切线”.

(2) $f(x) = x^3 + ax^2 + 1 (x \in (0, c))$

设点 $P(x_0, y_0)$ 在函数 $y = f(x)$ 的图像上,

点 P 处的切线为 $l: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, 与 $y = f(x)$ 联立

得 $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$\Leftrightarrow (x^3 + ax^2 - x_0^3 - ax_0^2) = (3x_0^2 + 2ax_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)(x^2 + x_0x + x_0^2 + ax + ax_0) = (3x_0^2 + 2ax_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)(x^2 + x_0x - 2x_0^2 + ax - ax_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2(x+2x_0+a)=0 \quad (*)$$

由题意得直线 l 为“ L 切线”，故方程 $(*)$ 在 $(0, c)$ 上有且仅有一解 x_0

$$\text{则 } x_0 = -2x_0 - a \in (0, c) \text{ 或 } \begin{cases} x_0 \in (0, c) \\ -2x_0 - a \notin (0, c) \end{cases}$$

若 $a \geq 0$ ，则 $x_0 \in (0, c)$ 是方程 $(*)$ 的唯一解（此时有无数条“ L 切线”切点横坐标为 $(0, c)$ 上的任意值）。

$$\text{若 } a < 0, \text{ 则 } \begin{cases} c \geq -\frac{a}{3} \\ x_0 = -\frac{a}{3} \end{cases} \quad \left(\text{此时只有一条“} L \text{ 切线”，切点的横坐标为 } -\frac{a}{3} \right)$$

$$\text{或 } \begin{cases} 0 < c < -\frac{a}{3} \\ x_0 \in (0, c) \end{cases} \quad \left(\text{此时有无数条“} L \text{ 切线”，切点横坐标为 } (0, c) \text{ 上的任意值} \right)$$

综上， $a \in \mathbb{R}$ 。

（3）证明： $g'(x) = 2e^{2x} - be^x + 6$ ，将点 $P(x_0, g(x_0))$ 处的切线 l 的方程与 $y = g(x)$ 联立得

$$g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0),$$

记 $h(x) = g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)$ ，则直线 l 为“ L 切线” $\Leftrightarrow$ 函数 $h(x)$ 有且仅有一个零点 x_0

（此时，一个 x_0 对应一条“ L 切线”），显然 x_0 是 $h(x)$ 的零点，

故只要 $h(x)$ 没其他零点。

$$\text{此时 } h'(x) = g'(x) - g'(x_0) = 2(e^x - e^{x_0})\left(e^x + e^{x_0} - \frac{b}{2}\right),$$

$$\text{当 } e^{x_0} - \frac{b}{2} \geq 0 \text{ 即 } x_0 \geq \ln \frac{b}{2}, \quad e^x + e^{x_0} - \frac{b}{2} > 0 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{此时当 } x < x_0 \text{ 时, } h'(x) < 0, \text{ 当 } x > x_0 \text{ 时, } h'(x) > 0,$$

故此时 x_0 为 $h(x)$ 唯一的极小值点（也是最小值点），而 $h(x_0) = 0$ ，

故 $h(x)$ 无其他零点，故直线 l 为“ L 切线”，因 x_0 的任意性，

故函数 $y = g(x)$ 存在无穷多条“ L 切线”，有一条“ L 切线”的切点的横坐标为 $\ln \frac{b}{2}$ 。

二、含参函数的单调性问题

6. （2024 届山东省泰安市肥城市高三上学期 9 月月考）已知函数 $f(x) = \frac{m}{x} + \ln x, m \in \mathbb{R}$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $m > 0$ 时, $mf(x) \geq 2m - 1$.

【解析】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 可得 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2} = \frac{x-m}{x^2}$.

当 $m \leq 0$ 时, 可知 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $m > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = m$,

可得 $x \in (0, m)$ 时, 有 $f'(x) < 0$, $x \in (m, +\infty)$ 时, 有 $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, m)$ 上单调递减, $f(x)$ 在 $(m, +\infty)$ 上单调递增.

综上所述: 当 $m \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $m > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, m)$ 上单调递减, 在 $(m, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 证明: 当 $m > 0$ 时, 要证 $mf(x) \geq 2m - 1$ 成立,

只需证 $f(x) \geq \frac{2m-1}{m} = 2 - \frac{1}{m}$ 成立,

只需证 $f(x)_{\min} \geq 2 - \frac{1}{m}$ 即可.

因为 $m > 0$, 由 (1) 知, $f(x)_{\min} = f(m) = 1 + \ln m$.

令 $g(m) = 1 + \ln m - \left(2 - \frac{1}{m}\right) = \ln m + \frac{1}{m} - 1$,

则 $g'(m) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} = \frac{m-1}{m^2}$,

可得 $m \in (0, 1)$ 时, 有 $g'(m) < 0$; $m \in (1, +\infty)$ 时, 有 $g'(m) > 0$,

所以 $g(m)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

可知 $g(m)_{\min} = g(1) = 0$, 则有 $g(m) \geq 0$, 所以有 $1 + \ln m \geq 2 - \frac{1}{m}$,

所以当 $m > 0$ 时, $mf(x) \geq 2m - 1$ 成立.

7. (2024 届江西省丰城厚一学校高三上学期 9 月月考) 已知函数 $f(x) = -2m \ln x - x^2 + 2(m+1)x$, $m > 0$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $m > 1$ 时, $\exists x \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x) > 3m - m^2 + 1$.

【解析】(1) 函数 $f(x) = -2m \ln x - x^2 + 2(m+1)x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{求导得 } f'(x) = -\frac{2m}{x} - 2x + 2(m+1) = -\frac{2(x-1)(x-m)}{x}, \quad m > 0,$$

当 $m=1$ 时, 恒有 $f'(x) \leq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $m > 1$ 时, 由 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$ 或 $x > m$, $f(x)$ 单调递减, 由 $f'(x) > 0$, 得 $1 < x < m$, $f(x)$ 单调递增;

当 $0 < m < 1$ 时, 由 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < m$ 或 $x > 1$, $f(x)$ 单调递减, 由 $f'(x) > 0$, 得 $m < x < 1$, $f(x)$ 单调递增;

所以当 $0 < m < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, m), (1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(m, 1)$ 上单调递增;

当 $m=1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $m > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1), (m, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(1, m)$ 上单调递增.

(2) 由 (1) 知, 当 $m > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(1, m)$ 上单调递增, 在 $(m, +\infty)$ 上单调递减,

则当 $x=m$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(m) = -2m \ln m + m^2 + 2m$,

于是当 $m > 1$ 时, $\exists x \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x) > 3m - m^2 + 1$ 成立, 当且仅当 $m > 1$ 时, $f(m) > 3m - m^2 + 1$ 成立,

即当 $m > 1$ 时, $-2m \ln m + 2m^2 - m - 1 > 0$ 成立, 令函数 $g(m) = -2m \ln m + 2m^2 - m - 1, m > 1$, 求导得

$$g'(m) = -2 \ln m + 4m - 3,$$

$$\text{令 } h(m) = -2 \ln m + 4m - 3, m > 1, \text{ 求导得 } h'(m) = -\frac{2}{m} + 4 > 0,$$

于是函数 $h(m)$, 即 $g'(m)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $g'(m) > g'(1) = 1 > 0$,

因此函数 $g(m)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $g(m) > g(1) = 0$, 即当 $m > 1$ 时, $f(m) > 3m - m^2 + 1$ 成立,

所以当 $m > 1$ 时, $\exists x \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x) > 3m - m^2 + 1$.

8. (2024 届四川省仁寿第一中学校高三上学期 9 月月考) 已知 a 为实常数, 函数 $f(x) = e^x - ax - 1$ (其中 e 为自然对数的底数)

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a \leq 1$, 函数 $f(x)$ 有两个零点, 求实数 a 的取值范围.

【解析】(1) $f'(x) = e^x - a$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x) < 0$,

$f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减;

综上: $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减;

(2) 由 (1) 得, $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 递增, 不可能有 2 个零点,

当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 递减, 在 $(0, +\infty)$ 递增,

函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(0) = 0$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 只有 1 个零点,

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 递增,

$f(\ln a)$ 为函数 $f(x)$ 的最小值,

令 $k(a) = f(\ln a) = a - a \ln a - 1, 0 < a < 1$,

$k'(a) = 1 - \ln a - 1 = -\ln a$,

当 $0 < a < 1$ 时, $k'(a) > 0$, 故函数 $k(a)$ 在 $(0, 1)$ 递增, 且 $k(1) = 0$,

故 $a \in (0, 1)$ 时, $f(\ln a) < 0$,

令 $m(a) = \ln a - (-\frac{1}{a}) = \ln a + \frac{1}{a}, a \in (0, 1)$,

$m'(a) = \frac{a-1}{a^2} < 0$, $m(a)$ 在 $(0, 1)$ 上递减,

$\therefore m(a) > m(1) > 0$, 即 $a \in (0, 1)$ 时, $-\frac{1}{a} < \ln a < 0$,

由于 $f(-\frac{1}{a}) = e^{-\frac{1}{a}} > 0, f(0) = 0$,

所以, 当 $a \in (0, 1)$ 时, 函数 $f(x)$ 有 2 个零点.

9. (2024 届江苏省淮安市高三上学期第一次调研测试) 已知函数 $f(x) = ax^2 - 2\ln x$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求证: 当 $a > 0$ 时, $f(x) \geq 2 - \frac{1}{a}$.

【解析】(1) 因为 $f(x) = ax^2 - 2\ln x$ ，所以 $f'(x) = 2ax - \frac{2}{x} = \frac{2(ax^2 - 1)}{x}, x > 0$ 。

① 当 $a \leq 0$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减；

② 当 $a > 0$ 时，由 $f'(x) < 0$ 得 $0 < x < \sqrt{\frac{1}{a}}$ ，由 $f'(x) > 0$ 得 $x > \sqrt{\frac{1}{a}}$ ，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \sqrt{\frac{1}{a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{\frac{1}{a}}, +\infty\right)$ 上单调递增。

综上，当 $a \leq 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减；当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 在 $\left(0, \sqrt{\frac{1}{a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{\frac{1}{a}}, +\infty\right)$ 上单调递增。

(2) 当 $a > 0$ 时， $f(x)_{\min} = f\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = \ln a + 1$ ，

要证明 $f(x) \geq 2 - \frac{1}{a}$ ，只要证 $\ln a + 1 \geq 2 - \frac{1}{a}$ ，即证 $\ln a + \frac{1}{a} - 1 \geq 0$ ，

设 $\varphi(a) = \ln a + \frac{1}{a} - 1, a > 0$ ，则 $\varphi'(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{a-1}{a^2}$ ，令 $\varphi'(a) = 0$ 得 $a = 1$ ，列表得

a	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$\varphi'(a)$	-	0	+
$\varphi(a)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $\varphi(a) \geq \varphi(1) = 0$ ，即 $\ln a + \frac{1}{a} - 1 \geq 0$ ，所以 $f(x) \geq 2 - \frac{1}{a}$ 。

10. (2024 届湖南省长沙市长郡中学高三上学期月考) 已知函数 $f(x) = a(\ln x + a) - x$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 证明：当 $a > 0$ 时， $f(x) < 2ae^a$ 。

【解析】(1) 因为 $f(x) = a(\ln x + a) - x$ ，定义域为 $(0, +\infty)$ ，所以 $f'(x) = \frac{a}{x} - 1$ 。

当 $a \leq 0$ 时，由于 $x > 0$ ，所以 $f'(x) < 0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减；

当 $a > 0$ 时， $f'(x) = -\frac{(x-a)}{x}$ ，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x = a$ ，

则当 $x \in (0, a)$ 时， $f'(x) > 0$ ，有 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递增；

当 $x \in (a, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 有 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递减;

综上所述: 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递增, $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 我们先证明引理: $\forall a > 0$, 恒有 $\ln a \leq a - 1$ 且 $a + 1 < e^a$.

引理的证明:

设 $g(a) = a - \ln a - 1$, $h(a) = e^a - a - 1$.

故只需证明 $\forall a > 0$, 恒有 $g(a) \geq 0$, $h(a) > 0$.

由于 $g'(a) = 1 - \frac{1}{a}$, 知当 $a \in (0, 1)$ 时, $g'(a) < 0$; 当 $a \in (1, +\infty)$ 时, $g'(a) > 0$;

则 $g(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(a)_{\min} = g(1) = 0$,

所以 $\forall a > 0$, 恒有 $g(a) \geq 0$.

由于 $h'(a) = e^a - 1$, 知当 $a > 0$, 均有 $e^a - 1 > e^0 - 1 = 0$,

所以恒有 $h'(a) > 0$, 故 $h(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

则 $h(a) > e^0 - 0 - 1 = 0$.

所以 $\forall a > 0$, 恒有 $h(a) > 0$.

综上, 引理得证. 回到原题:

由 (1) 得 $f(x)_{\max} = f(a) = a \ln a + a^2 - a$,

故只需证明: 对 $\forall a > 0$, 恒有 $a \ln a + a^2 - a < 2ae^a$, 即 $\ln a + a - 1 < 2e^a$.

由引理得 $\ln a + a - 1 \leq (a - 1) + a - 1 < 2(a + 1) < 2e^a$. 命题得证.

三、函数零点与方程实根个数问题

11. (2024 届江西省全南中学高三上学期开学考试) 已知函数 $f(x) = xe^x - \frac{m}{2}(x+1)^2 (m \geq 0)$.

(1) 当 $m = 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极小值;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上有且只有一个零点, 求 m 的取值范围.

【解析】(1) 当 $m = 0$ 时, $f(x) = xe^x$, 可得 $f'(x) = (x+1)e^x$,

令 $f'(x)=0$ ，解得 $x=-1$ ，

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；

当 $x \in (-1, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增，

所以函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(-1) = -\frac{1}{e}$ 。

(2) 解：若 $m=0$ 时， $f(x) = xe^x$ ，令 $f(x)=0$ ，解得 $x=0$ ，

当 $x < 0$ 时， $f(x) < 0$ ；当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$ ，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上有且只有一个零点。

若 $m > 0$ 时，由 $f'(x) = (x+1)(e^x - m)$ ，令 $f'(x)=0$ ，解得 $x=-1$ 或 $x = \ln m$ ，

①若 $m = \frac{1}{e}$ 时，此时 $f'(x) \geq 0$ ，可得 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，且 $f(-1) = -\frac{1}{e} < 0$ ， $f(1) = e - \frac{2}{e} > 0$ ，此时函数 $f(x)$

在区间 $(-\infty, 1)$ 上有且只有一个零点；

②若 $m > \frac{1}{e}$ 时，可得 $\ln m > -1$ ，令 $f'(x) > 0$ ，可得 $x < -1$ 或 $x > \ln m$ ，

令 $f'(x) < 0$ ，可得 $\ln m < x < 1$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ ， $(\ln m, +\infty)$ 上单调递增，在 $(-1, \ln m)$ 上单调递减，

又由 $f(-1) < 0$ ， $f(\ln m) < f(-1) < 0$ ，只需讨论 $f(1) = e - 2m$ 的符号，

当 $\frac{1}{e} < m < \frac{e}{2}$ 时， $f(1) > 0$ ，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上有且只有一个零点；

当 $m \geq \frac{e}{2}$ 时， $f(1) \leq 0$ ，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上无零点。

③若 $0 < m < \frac{1}{e}$ ，则 $\ln m < -1$ ，令 $f'(x) > 0$ ，可得 $x > -1$ 或 $x < \ln m$ ，

令 $f'(x) < 0$ ，可得 $1 < x < \ln m$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln m)$ ， $(-1, +\infty)$ 上单调递增，在 $(\ln m, -1)$ 上单调递减，

又由 $f(-1) < 0$ ， $f(1) = e - 2m > 0$ ， $f(\ln m) = -\frac{m}{2} \ln^2 m - \frac{m}{2} < 0$ ，

此时函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上有且只有一个零点，

综上所述， $0 \leq m < \frac{e}{2}$ ，即实数 m 的取值范围为 $[0, \frac{e}{2})$ 。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/398020124117006116>