04 第四节

直线与圆、圆与圆的位置关系

考纲点击	考情关注
1.能根据给定直线、圆的方程判断直线与圆的位置关系；能根据给定两个圆的方程判断两圆的位置关系. 2．能用直线和圆的方程解决一些简单问题. 3．初步了解用代数方法处理几何问题的思想.	高考中主要考查方程中有参数的直线与圆的位置关系的判断，利用相切、相交的条件求参数的范围，利用相切、相交求切线长或弦长．难度不是太大，多以选择、填空题为主，有时也出现解答题，难度中等.

课前自主学习

温故知新

1.直线与圆的位置关系

(1)直线与圆的位置关系有三种：相离、相切、相交.

判断直线与圆的位置关系常见的有两种方法：

①代数法：利用判别式Δ

$$\xrightarrow[\Delta=b^2-4ac]{\text{判别式}}\begin{cases}>0\Leftrightarrow \underline{\text{相交}}\\=0\Leftrightarrow \underline{\text{相切}}\\<0\Leftrightarrow \underline{\text{相离}}\end{cases}$$

②几何法：利用圆心到直线的距离d和圆半径r的大小关系

$d<r$ ⇔相交

$d=r$ ⇔相切

$d>r$ ⇔相离

(2)圆的切线方程

若圆的方程为$x^2+y^2=r^2$，点$P(x_0，y_0)$在圆上，则过P点且与圆$x^2+y^2=r^2$相切的切线方程为$x_0x+y_0y=r^2$.

注：点P必须在圆$x^2+y^2=r^2$上.

2. **圆与圆的位置关系**

圆与圆的位置关系可分为五种：相离、外切、相交、内切、内含.

判断圆与圆的位置关系常用几何法：

设两圆圆心分别为O_1、O_2，半径为r_1、$r_2(r_1 \neq r_2)$，

则$|O_1O_2|>r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 相离；$|O_1O_2|=r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外切；$|r_1-r_2|<|O_1O_2|<r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 相交；$|O_1O_2|=|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内切；$0<|O_1O_2|<|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内含.

课前自主学习

基础自测

1.直线$\sqrt{3}x-y+m=0$与圆$x^2+y^2-2x-2=0$相切，则实数m等于(　　)

A.$\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$　　B．$-\sqrt{3}$或$3\sqrt{3}$

C．$-3\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$　　D．$-3\sqrt{3}$或$3\sqrt{3}$

2.过原点且倾斜角为60°的直线被圆$x^2+y^2-4y=0$所截得的弦长为(　　)

A.$\sqrt{3}$　　B．2

C.$\sqrt{6}$　　D．$2\sqrt{3}$

3．圆C_1：$x^2+y^2+2x+2y-2=0$与圆C_2：$x^2+y^2-4x-2y+1=0$的公切线有且仅有(　　)

A．1条　　B．2条

C．3条　　D．4条

4．已知两圆$x^2+y^2=10$和$(x-1)^2+(y-3)^2=20$相交于A，B两点，则直线AB的方程是________．

5．若不等式$\sqrt{9-x^2}\leq k(x+2)-\sqrt{2}$的解集为区间$[a，b]$，若$b-a=2$，则$k=$________．

基础自测答案

1．答案：C

解析：将圆 $x^2+y^2-2x-2=0$ 化为标准方程得$(x-1)^2+y^2=3$，直线与圆相切说明圆心到直线的距离等于半径，则有$\frac{|\sqrt{3}\times 1+m|}{\sqrt{3+1}}=\sqrt{3}$，即$|\sqrt{3}+m|=2\sqrt{3}$.

$\therefore m=-3\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$.

2．答案：D

解析：过原点且倾斜角为 60°的直线方程为$\sqrt{3}x-y=0$，

圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 的圆心(0,2)到直线的距离为

$$d=\frac{|\sqrt{3}\times 0-2|}{\sqrt{3+1}}=1,$$

因此弦长为 $2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{4-1}=2\sqrt{3}$.

3．答案：B

解析：$\odot C_1$：$(x+1)^2+(y+1)^2=4$，

圆心 $C_1(-1,-1)$，半径 $r_1=2$.

$\odot C_2$：$(x-2)^2+(y-1)^2=4$，圆心 $C_2(2,1)$，半径 $r_2=2$.

$\therefore |C_1C_2|=\sqrt{13}$，$\therefore 0<|C_1C_2|<r_1+r_2=4$，

∴两圆相交，有两条公切线.

4．答案：$x+3y=0$

解析：由 $x^2+y^2=10$，①　$(x-1)^2+(y-3)^2=20$.②

①②相减得 $2x-1+6y-9=10-20$，即 $x+3y=0$.

5．答案：$\sqrt{2}$

解析：由数形结合知，直线 $y=k(x+2)-\sqrt{2}$在半圆 $y=\sqrt{9-x^2}$之上必须 $b=3$，所以 $a=1$，则直线 $y=k(x+2)-\sqrt{2}$过点$(1,2\sqrt{2})$，则 $k=\sqrt{2}$.

课堂互动讲练

题型一　圆的切线问题■

例1　已知圆C：$x^2+y^2+2x-4y+3=0$.

(1)若圆C的切线在x轴和y轴上的截距相等，求此切线的方程；

(2)从圆C外一点$P(x_1，y_1)$向该圆引一条切线，切点为M，O为坐标原点，且有$|PM|=|PO|$，求使得$|PM|$取得最小值时点P的坐标.

[思路分析]

(1) 按截距是否为 0 分为两类 → 设圆的切线方程 → 建立关于待定字母的关系式 → 得方程

(2) P 点坐标 → $|PO|=|PM|$ 得 P 所在直线的方程 l → $|PM|$ 最小即 $|OP|$ 最小，求直线 OP 的方程 → 联立方程组求 P 点坐标

[听课记录]　(1)将圆 C 配方得$(x+1)^2+(y-2)^2=2$.

①当直线在两坐标轴上的截距为零时，设直线方程为 $y=kx$，

由$\frac{|k+2|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$，解得 $k=2\pm\sqrt{6}$，得 $y=(2\pm\sqrt{6})x$.

②当直线在两坐标轴上的截距不为零时，设直线方程为 $x+y-a=0(a\neq 0)$.

由$\frac{|-1+2-a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，得$|a-1|=2$，即 $a=-1$，或 $a=3$.

∴直线方程为 $x+y+1=0$，或 $x+y-3=0$.

综上，圆的切线方程为 $y=(2+\sqrt{6})x$，或 $y=(2-\sqrt{6})x$，或 $x+y+1=0$，或 $x+y-3=0$.

(2)由 $|PO|=|PM|$，得 $x_1^2+y_1^2=(x_1+1)^2+(y_1-2)^2-2\Rightarrow 2x_1-4y_1+3=0$.

即点P在直线l：$2x-4y+3=0$上.

当$|PM|$取最小值时，即$|OP|$取得最小值，直线$OP\perp l$，

∴直线OP的方程为$2x+y=0$.

解方程组$\begin{cases}2x+y=0,\\2x-4y+3=0,\end{cases}$

得点 P 坐标为$\left(-\frac{3}{10},\ \frac{3}{5}\right)$.

方法突破

①过点P作圆的切线有三种类型：

当P在圆外时，有2条切线；

当P在圆上时，有1条切线；

当P在圆内时，不存在.

②利用待定系数法设圆的切线方程时，一定要注意各种直线方程的存在性，有时要进行恰当分类.

③切线长的求法：

过圆C外一点P作圆C的切线，切点为M，半径为R，则$|PM|=\sqrt{|PC|^2-R^2}$.

[互动训练1]　已知圆的方程$(x-1)^2+y^2=9$，求过点$(-2,4)$的圆的切线方程.

解：∵圆方程$(x-1)^2+y^2=3^2$，

∴圆心$C(1,0)$，半径$r=3$.

①当过点$(-2,4)$的圆的切线斜率存在时，

设过点$(-2,4)$的圆的切线为$y-4=k(x+2)$，

即$kx-y+2k+4=0$，

则$\frac{|k+2k+4|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，

解得$k=-\frac{7}{24}$.

$\therefore$切线方程为 $y-4=-\frac{7}{24}(x+2)$，

即 $7x+24y-82=0$.

②当过点$(-2,4)$的圆的切线斜率不存在时，则切线方程为 $x=-2$.

$\because$点 C 到直线 $x=-2$ 的距离为 $1-(-2)=3$，

$\therefore x=-2$ 是过$(-2,4)$的圆的切线.

因此，过$(-2,4)$的圆的切线方程为$x+2=0$和$7x+24y-82=0$.

题型二　有关圆的弦长、中点弦问题■

例 2　已知点 $P(0,5)$及圆 C：$x^2+y^2+4x-12y+24=0$.

(1)若直线 l 过 P 且被圆 C 截得的线段长为 $4\sqrt{3}$，求 l 的方程；

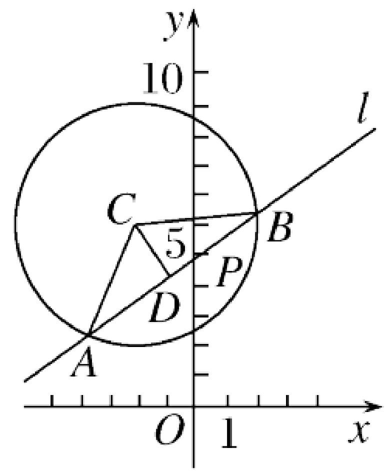
(2)求过 P 点的圆 C 的弦的中点的轨迹方程.

[思路分析]　(1) $\boxed{\text{设直线 } l \text{ 的方程}} \to \boxed{\text{由弦长 } 4\sqrt{3} \text{ 建立待定字母的关系式}}$

$\to \boxed{\text{得 } l \text{ 方程}}$

(2) $\boxed{\text{确定几何关系 } CD \perp PD} \to \boxed{\text{将坐标代入 } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PD} = 0} \to \boxed{\text{得方程}}$

[听课记录]　(1)解法一：如图所示，



$AB=4$，D是AB的中点，$CD\perp AB$，

$AD=2$，$AC=4$，

在Rt△ACD中，可得$CD=2$.

①当直线斜率存在时，设所求直线的斜率为k，则直线的方程为$y-5=kx$，即$kx-y+5=0$.

由点C到直线AB的距离公式得

$\dfrac{|-2k-6+5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2$，解得 $k=\dfrac{3}{4}$.

当 $k=\dfrac{3}{4}$时，直线 l 的方程为 $3x-4y+20=0$.

②当直线 l 的斜率不存在时，也满足题意，此时方程为 $x=0$.

∴所求直线的方程为 $3x-4y+20=0$ 或 $x=0$.

解法二：当直线 l 的斜率存在时，设所求直线的斜率为 k，则直线的方程为 $y-5=kx$，即 $y=kx+5$，

联立直线与圆的方程$\begin{cases} y=kx+5, \\ x^2+y^2+4x-12y+24=0, \end{cases}$

消去 y，得$(1+k^2)x^2+(4-2k)x-11=0$.①

设方程①的两根为 x_1，x_2，

由根与系数的关系得$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2k-4}{1+k^2}, \\ x_1x_2=-\dfrac{11}{1+k^2}. \end{cases}$　　②

由弦长公式得 $\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$

$=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=4\sqrt{3}$，

将②式代入，解得 $k=\dfrac{3}{4}$，

此时直线方程为 $3x-4y+20=0$.

又 k 不存在时也满足题意，此时直线方程为 $x=0$.

∴所求直线的方程为 $x=0$ 或 $3x-4y+20=0$.

(2)设过 P 点的圆 C 的弦的中点为 $D(x，y)$，

则 $CD\perp PD$，即$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PD}=0$，

$(x+2，y-6)\cdot(x，y-5)=0$，化简得所求轨迹方程为 $x^2+y^2+2x-11y+30=0$.

方法突破

①有关圆的弦长的求法：

已知直线的斜率为k，直线与圆C相交于$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$两点，点C到l的距离为d，圆的半径为r.

解法一：代数法：弦长$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_2-x_1|$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$；

解法二：几何法：弦长$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$.

②有关弦的中点问题：

圆心与弦的中点连线和已知直线垂直，利用这条性质可确定某些等量关系.