清华大学中学 2023-2024 学年高三第一次模拟考试数学试卷

注意事项

1．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0．5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置．

3．请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符．

4．作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．作答非选择题，必须用 05 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效．

5．如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．

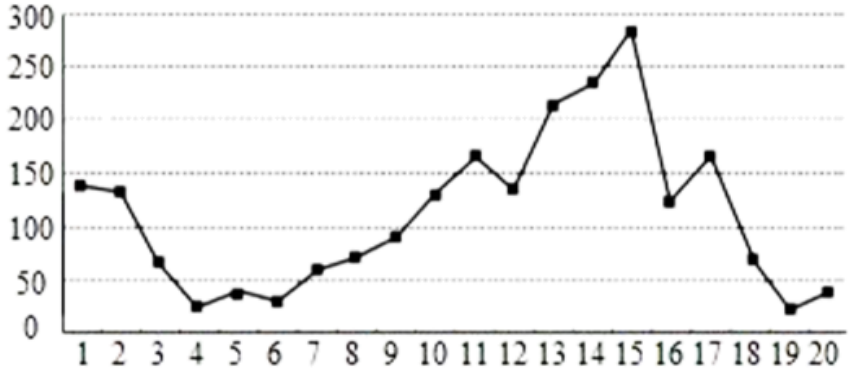
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设命题 p：$\forall a,b\in R$，$|a-b|<|a|+|b|$，则 $\neg p$ 为

A．$\forall a,b\in R$，$|a-b|\geq|a|+|b|$　　B．$\exists a,b\in R$，$|a-b|<|a|+|b|$

C．$\exists a,b\in R$，$|a-b|>|a|+|b|$　　D．$\exists a,b\in R$，$|a-b|\geq|a|+|b|$

2．空气质量指数 AQI 是反映空气状况的指数，AQI 指数值趋小，表明空气质量越好，下图是某市 10 月 1 日-20 日 AQI 指数变化趋势，下列叙述错误的是（　　）



A．这 20 天中 AQI 指数值的中位数略高于 100

B．这 20 天中的中度污染及以上（AQI 指数>150）的天数占 $\frac{1}{4}$

C．该市 10 月的前半个月的空气质量越来越好

D．总体来说，该市 10 月上旬的空气质量比中旬的空气质量好

3．公元前 5 世纪，古希腊哲学家芝诺发表了著名的阿基里斯悖论：他提出让乌龟在跑步英雄阿基里斯前面 1000 米处开始与阿基里斯赛跑，并且假定阿基里斯的速度是乌龟的 10 倍.当比赛开始后，若阿基里斯跑了 1000 米，此时乌龟便领先他 100 米，当阿基里斯跑完下一个 100 米时，乌龟先他 10 米，当阿基里斯跑完下-个 10 米时，乌龟先他 1 米....所以，阿基里斯永远追不上乌龟.按照这样的规律，若阿基里斯和乌龟的距离恰好为 0.1 米时，乌龟爬行的总距离为（　　）

A．$\frac{10^5-1}{900}$米　　B．$\frac{10^5-9}{90}$米

C．$\frac{10^4-9}{900}$米　　D．$\frac{10^4-1}{90}$米

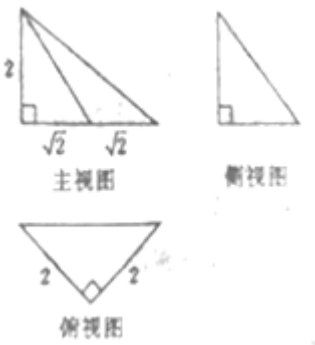
4．已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x|x<1\}$，$B=\{x|-1\le x\le 2\}$，则$(\complement_U A)\cap B=$（　　）

A．$\{x|1<x\le 2\}$　　B．$\{x|1\le x\le 2\}$　　C．$\{x|-1\le x\le 1\}$　　D．$\{x|x\ge -1\}$

5．已知$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，则$\sin\alpha$的值等于（　　）

A．$-\frac{7}{9}$　　B．$-\frac{2}{9}$　　C．$\frac{2}{9}$　　D．$\frac{7}{9}$

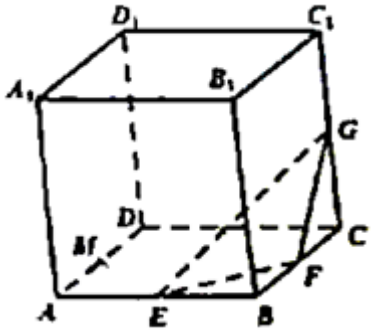
6．某几何体的三视图如右图所示,则该几何体的外接球表面积为(　　)



A．12π　　B．16π

C．24π　　D．48π

7．如图，在棱长为4的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，*E*，*F*，*G*分别为棱 *AB*，*BC*，CC_1的中点，*M*为棱*AD*的中点，设*P*，*Q*为底面*ABCD*内的两个动点，满足$D_1P//$平面*EFG*，$D_1Q=\sqrt{17}$，则$PM+PQ$的最小值为（　　）



A．$3\sqrt{2}-1$　　B．$3\sqrt{2}-2$　　C．$2\sqrt{5}-1$　　D．$2\sqrt{5}-2$

8．定义在*R*上的函数$f(x)=x+g(x)$，$g(x)=-2x-2+g(-2-x)$，若$f(x)$在区间$[-1,+\infty)$上为增函数，且存在

$-2<t<0$，使得 $f(0)\cdot f(t)<0$.则下列不等式不一定成立的是（　　）

A．$f\left(t^2+t+1\right)>f\left(\frac{1}{2}\right)$　　**B**．$f(-2)>0>f(t)$

C．$f(t+2)>f(t+1)$　　**D**．$f(t+1)>f(t)$

9．已知函数 $f\left(x\right)=\frac{e\ln x}{x^2}$，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2-mf(x)+\frac{1}{8}=0$ 有 4 个不同的实数根，则实数 m 的取值范围为（　　）

A．$(0,\frac{3}{4})$　　**B**．$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　**C**．$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{4})$　　**D**．$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

10．若复数 $z=\frac{a-i}{1+i}$ 在复平面内对应的点在第二象限，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-1,1)$　　**B**．$\left(-\infty,-1\right)$　　**C**．$(1,+\infty)$　　**D**．$\left(0,+\infty\right)$

11．已知集合 $A=\left\{-2,-1,0,1,2\right\}$，$B=\{x\,|\,x^2-x+2>0\}$，则 $A\cap B=$(　　)

A．$\left\{-1,0\right\}$　　**B**．$\left\{0,1\right\}$　　**C**．$\left\{-1,0,1\right\}$　　**D**．$\left\{-2,-1,0,1,2\right\}$

12．在四边形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$AB=2$，$AD=5$，$BC=3$，$\angle A=60°$，点 E 在线段 CB 的延长线上，且 $AE=BE$，点 M 在边 CD 所在直线上，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{ME}$ 的最大值为（　　）

A．$-\frac{71}{4}$　　**B**．-24　　**C**．$-\frac{51}{4}$　　**D**．-30

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60°,AB=4,AD=2$，E 为边 CD 上一点（不 C、D 与重合），将平行四边形 $ABCD$ 沿 BE 折起，使五点 A,B,C,D,E 均在一个球面上，当四棱锥 $C-ABED$ 体积最大时，球的表面积为_____.

14．定义在 ***R*** 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足：①对任意的 $x,y\in R$，都有 $f\left(x-y\right)=f\left(x\right)-f\left(y\right)$；②当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)>0$，则函数 $f\left(x\right)$ 的解析式可以是_____.

15．已知 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2,x\geq0\\-x^2,x<0\end{cases}$，若 $f\left(3a-2\right)>4f\left(a\right)$，则 ***a*** 的取值范围是_____.

16．若非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\pi}{6}$，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3}$，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{7}$，则 $\left|\vec{b}\right|=$_____.

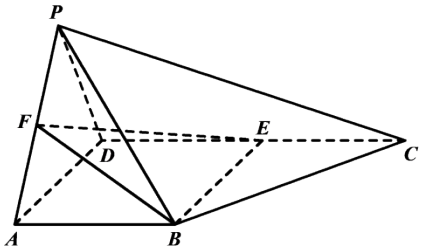
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知函数 $f(x)=\frac{x-a}{x+1}+\ln\left(x+1\right),a\in R$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）函数 $g(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$，若对于 $\forall x_1\in(-1,+\infty),\exists x_2\in[1,2]$，使得 $f(x_1)\geq g(x_2)$ 成立，求 a 的取值范围.

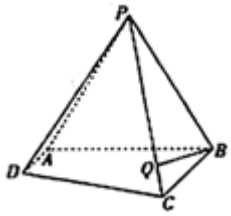
18.（12 分）如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AD=AB=\dfrac{1}{2}CD,\angle DAB=60°$，点 E,F 分别为 CD,AP 的中点.



（1）证明：$PC\parallel$面 BEF；

（2）若 $PA\perp PD$，且 $PA=PD$，面 $PAD\perp$面 $ABCD$，求二面角 $F-BE-A$ 的余弦值.

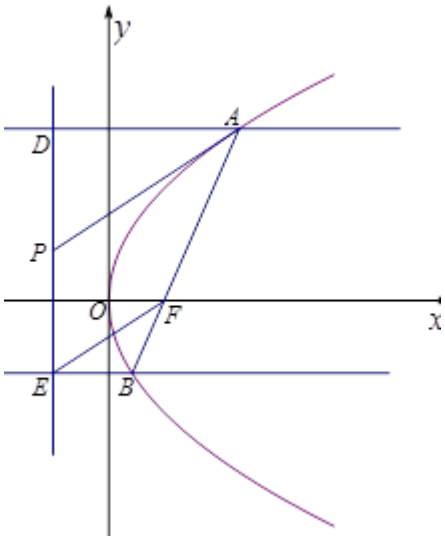
19.（12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形且 $AD\parallel BC$，$AB\perp BC$，$AB=BC=2AD=2$，侧面 PAB 为等边三角形，且平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$.



（1）求平面 PAB 与平面 PDC 所成的锐二面角的大小；

（2）若 $\overrightarrow{CQ}=\lambda\overrightarrow{CP}(0,\ \lambda,\ 1)$，且直线 BQ 与平面 PDC 所成角为 $\dfrac{\pi}{3}$，求 λ 的值.

20.（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点 F 在直线 $x+y-1=0$ 上，平行于 x 轴的两条直线 l_1，l_2 分别交抛物线 C 于 A，B 两点，交该抛物线的准线于 D，E 两点.



（1）求抛物线 C 的方程；

（2）若 **F** 在线段 AB 上，**P** 是 DE 的中点，证明：$AP\ PEF$.

21.（12 分） [选修 4-5：不等式选讲]

设函数 $f(x)=|x+1|$.

（1）求不等式 $f(x)\le 5-f(x-3)$ 的解集；

（2）已知关于 x 的不等式 $2f(x)+|x+a|\le x+4$ 在 $[-1,1]$ 上有解，求实数 a 的取值范围.

22.（10 分）已知函数 $f(x)=xe^x-a\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\ x\in(0,+\infty)$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）曲线 $f\left(x\right)$ 在点 $\left(2,f\left(2\right)\right)$ 处的切线斜率为 $3\left(e^2-1\right)$.

（*i*）求 a ；

（*ii*）若 $(x-k)f'(x)\ge-(x+1)^2$ ，求整数 k 的最大值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

直接利用全称命题的否定是特称命题写出结果即可.

【详解】

因为全称命题的否定是特称命题，所以，命题 p ： $\forall a,b\in R$ ， $\left|a-b\right|<\left|a\right|+\left|b\right|$ ，则 $\neg p$ 为： $\exists a,b\in R$ ，

$\left|a-b\right|\ge\left|a\right|+\left|b\right|$.

故本题答案为 D.

【点睛】

本题考查命题的否定，特称命题与全称命题的否定关系，是基础题.

2、C

【解析】

结合题意，根据题目中的20天的AQI指数值，判断选项中的命题是否正确.

【详解】

对于A，由图可知20天的AQI指数值中有10个低于100，10个高于100，其中第10个接近100，第11个高于100，所以中位数略高于100，故A正确.

对于B，由图可知20天的AQI指数值中高于150的天数为5，即占总天数的$\frac{1}{4}$，故B正确.

对于C，由图可知该市10月的前4天的空气质量越来越好，从第5天到第15天空气质量越来越差，故C错误.

对于D，由图可知该市10月上旬大部分指数在100以下，中旬大部分指数在100以上，所以该市10月上旬的空气质量比中旬的空气质量好，故D正确.

故选：C

【点睛】

本题考查了对折线图数据的分析，读懂题意是解题关键，并能运用所学知识对命题进行判断，本题较为基础.

3、D

【解析】

根据题意，是一个等比数列模型，设$a_1=100, q=\frac{1}{10}, a_n=0.1$，由$a_n=0.1=100\times\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$，解得$n=4$，再求和.

【详解】

根据题意，这是一个等比数列模型，设$a_1=100, q=\frac{1}{10}, a_n=0.1$，

所以$a_n=0.1=100\times\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$，

解得$n=4$，

所以 $S_4=\frac{a_1\left(1-q^4\right)}{1-q}=\frac{100\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^4\right)}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10^4-1}{90}$.

故选：D

【点睛】

本题主要考查等比数列的实际应用，还考查了建模解模的能力，属于中档题.

4、B

【解析】

直接利用集合的基本运算求解即可.

【详解】

解：全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x|x<1\}$，$B=\{x|-1\le x\le 2\}$，

$\therefore \complement_U A=\{x\mid x\ge 1\}$

则$(\complement_U A)\cap B=\{x\mid x\ge 1\}\cap\{x\mid -1\le x\le 2\}=\{x\mid 1\le x\le 2\}$，

故选：B.

【点睛】

本题考查集合的基本运算，属于基础题.

5、A

【解析】

由余弦公式的二倍角可得，$\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=1-2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7}{9}$，再由诱导公式有

$\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha$，所以$\sin\alpha=-\frac{7}{9}$

【详解】

$\because \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$

∴由余弦公式的二倍角展开式有

$\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=1-2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7}{9}$

又$\because \cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha$

$\therefore \sin\alpha=-\frac{7}{9}$

故选：A

【点睛】

本题考查了学生对二倍角公式的应用，要求学生熟练掌握三角函数中的诱导公式，属于简单题

6、A

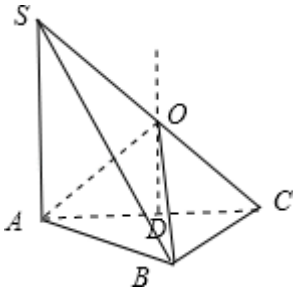
【解析】

由三视图知：几何体为三棱锥，且三棱锥的一条侧棱垂直于底面，结合直观图判断外接球球心的位置，求出半径，代入求得表面积公式计算.

【详解】

由三视图知：几何体为三棱锥，且三棱锥的一条侧棱垂直于底面，高为 2，

底面为等腰直角三角形，斜边长为 $2\sqrt{2}$，如图：



$\therefore \Delta ABC$ 的外接圆的圆心为斜边 AC 的中点 D，$OD \perp AC$，且 $OD \subset$ 平面 SAC，

Q $SA = AC = 2$，

$\therefore SC$ 的中点 O 为外接球的球心，

$\therefore$ 半径 $R = \sqrt{3}$，

$\therefore$ 外接球表面积 $S = 4\pi \times 3 = 12\pi$.

故选：A

【点睛】

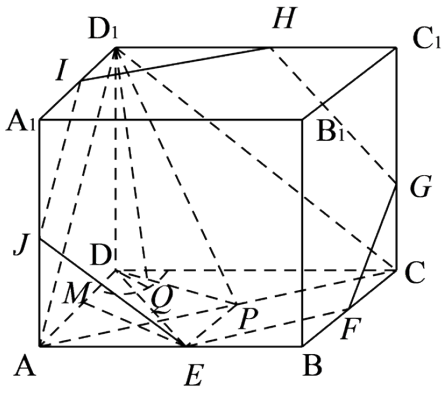
本题考查了由三视图求几何体的外接球的表面积，根据三视图判断几何体的结构特征，利用几何体的结构特征与数据求得外接球的半径是解答本题的关键.

7、C

【解析】

把截面 EFG 画完整，可得 P 在 AC 上，由 $D_1Q = \sqrt{17}$ 知 Q 在以 D 为圆心 1 为半径的四分之一圆上，利用对称性可得 $PM + PQ$ 的最小值.

【详解】



如图，分别取C_1D_1, D_1A_1, A_1A的中点H, I, J，连接GH, HI, IJ, JE，易证E, F, G, H, I, J共面，即平面EFG为截面$EFGHIJ$，连接AD_1, D_1C, AC，由中位线定理可得$AC//EF$，$AC \not\subset$平面EFG，$EF \subset$平面EFG，则$AC//$平面EFG，同理可得$AD_1//$平面EFG，由$AC \cap AD_1 = A$可得平面$AD_1C//$平面EFG，又$D_1P//$平面EFG，P在平面$ABCD$上，$\therefore P \in AC$.

正方体中$DD_1 \perp$平面$ABCD$，从而有$DD_1 \perp DQ$，$\therefore DQ = \sqrt{D_1Q^2 - DD_1^2} = 1$，$\therefore Q$在以$D$为圆心1为半径的四分之一圆（圆在正方形$ABCD$内的部分）上，

显然M关于直线AC的对称点为E，

$PM + PQ = PE + PQ \geq PE + PD - DQ \geq ED - DQ = \sqrt{4^2 + 2^2} - 1 = 2\sqrt{5} - 1$，当且仅当$E, P, Q, D$共线时取等号，$\therefore$所求最小值为$2\sqrt{5} - 1$.

故选：C.

【点睛】

本题考查空间距离的最小值问题，解题时作出正方体的完整截面求出P点轨迹是第一个难点，第二个难点是求出Q点轨迹，第三个难点是利用对称性及圆的性质求得最小值.

8、D

【解析】

根据题意判断出函数的单调性，从而根据单调性对选项逐个判断即可.

【详解】

由条件可得$f(-2-x) = -2-x+g(-2-x) = -2-x+g(x)+2x+2 = g(x)+x = f(x)$

$\therefore$函数$f(x)$关于直线$x = -1$对称；

Q $f(x)$在$[-1, +\infty)$上单调递增，且在$-2 < t < 0$时使得$f(0) \cdot f(t) < 0$；

又Q $f(-2) = f(0)$

$\therefore f(t) < 0$，$f(-2) = f(0) > 0$，所以选项B成立；

Q $t^2 + t + 2 - \frac{3}{2} = (t + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} > 0$，$\therefore t^2 + t + 1$比$\frac{1}{2}$离对称轴远，

$\therefore$可得$f(t^2 + t + 1) > f(\frac{1}{2})$，$\therefore$选项$A$成立；

Q $(t+3)^2 - (t+2)^2 = 2t + 5 > 0$，$\therefore |t+3| > |t+2|$，$\therefore$可知$t+2$比$t+1$离对称轴远

$\therefore f(t+2) > f(t+1)$，选项$C$成立；

Q $-2 < t < 0$，$\therefore (t+2)^2 - (t+1)^2 = 2t + 3$符号不定，$\therefore |t+2|$，$|t+1|$无法比较大小，

$\therefore f(t+1)>f(t)$不一定成立.

故选：D.

【点睛】

本题考查了函数的基本性质及其应用，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平和分析推理能力.

9、C

【解析】

求导，先求出$f\left(x\right)$在$x\in\left(0,\sqrt{e}\right)$单增，在$x\in\left(\sqrt{e},+\infty\right)$单减，且$f(x)_{\max}=f(\sqrt{e})=\frac{1}{2}$知设$f(x)=t$，则方程

$[f(x)]^2-mf(x)+\frac{1}{8}=0$有4个不同的实数根等价于方程

$t^2-mt+\frac{1}{8}=0$在$(0,\frac{1}{2})$上有两个不同的实数根，再利用一元二次方程根的分布条件列不等式组求解可得.

【详解】

依题意，$f^{'}(x)=\frac{\frac{e}{x}\cdot x^2-2xe\ln x}{x^4}=\frac{e(1-2\ln x)}{x^3}$，

令$f'\left(x\right)=0$，解得$\ln x=\frac{1}{2}$，$x=\sqrt{e}$，故当$x\in(0,\sqrt{e})$时，$f'\left(x\right)>0$，

当$x\in(\sqrt{e},+\infty)$，$f'\left(x\right)<0$，且$f(\sqrt{e})=\frac{e\ln\sqrt{e}}{e}=\frac{1}{2}$，

故方程$t^2-mt+\frac{1}{8}=0$在$(0,\frac{1}{2})$上有两个不同的实数根，

故$\begin{cases}\Delta>0\\(t_1-\frac{1}{2})(t_2-\frac{1}{2})>0\\0<t_1+t_2<1\\t_1t_2>0\end{cases}$，$\begin{cases}m^2-\frac{1}{2}>0\\\frac{1}{8}-\frac{m}{2}+\frac{1}{4}>0\\0<m<1\end{cases}$

解得$m\in(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{4})$.

故选：C.

【点睛】

本题考查确定函数零点或方程根个数.其方法：

(1)构造法：构造函数$g(x)$($g'(x)$易求，$g'(x)=0$可解)，转化为确定$g(x)$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/398037137045006076