

## 重难点突破 05 嵌套函数

我们把形如  $y = f[f(x)]$  或  $y = f[g(x)]$  的一类函数称为嵌套函数,把含有嵌套函数的函数问题称为嵌套函数问题.嵌套函数问题有两类基本形式:

" $f[f(x)]$ "型

这一类型是同一个函数  $f(x)$  自身嵌套问题,求解这一类型的策略是:首先将“内层函数”换元,即设  $f(x) = t$ ,然后根据题设条件解出相应  $t$  的值或范围,最后利用函数  $f(x)$  或利用函数  $y = f(x)$  与  $y = t$  的图像关系解得问题.

" $f[g(x)]$ "型

这一类型是两个函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  的互嵌问题,求解这一类型的策略是:首先将“内层函数”换元,即设  $g(x) = t$ ,然后通过中间变量即是“内层函数”的函数值,又是  $y = f(t)$  的自变量,或利用  $y = f(t)$  与  $t = g(x)$  两个函数的性质,或做出并利用  $y = f(t)$  与  $t = g(x)$  两个函数的图像来解决问题.

在数学命题中,嵌套函数问题常以能力型问题出现,且常处于客观题压轴的位置.这类问题因其抽象程度高,综合性强,能很好地考查数学抽象、逻辑推理、数学建模及直观想象等数学核心素养,因而是高考或各地模拟考试的热点题型.

### 一. 选择题 (共 11 小题)

1. 已知函数  $f(x)$  是  $R$  上的奇函数,当  $x < 0$  时,  $f(x) = 4 - 2^{-x}$ . 若关于  $x$  的方程  $f(f(x)) = m$  有且仅有两个不相等的实数解,则实数  $m$  的取值范围是( )

A.  $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

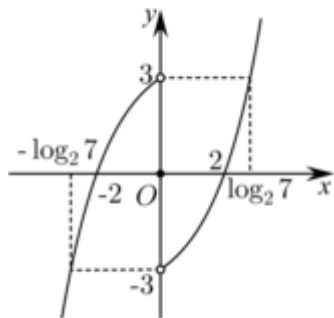
B.  $[-3, 0) \cup (0, 3]$

C.  $(-4, -3] \cup [3, 4)$

D.  $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

【解答】解: 由题设  $f(0) = 0$ , 若  $x > 0$ , 则  $f(x) = -f(-x) = -(4 - 2^x) = 2^x - 4$ ,

所以  $f(x) = \begin{cases} 4 - 2^{-x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2^x - 4, & x > 0 \end{cases}$  , 值域为  $R$  , 函数图象如下:



当  $f(x) \in (-\infty, -3]$  时, 只有一个  $x \in (-\infty, -\log_2 7]$  与之对应;

当  $f(x) \in (-3, 0)$  时, 有两个对应自变量,

记为  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$  , 则  $-\log_2 7 < x_1 < -2 < 0 < x_2 < 2$  ;

当  $f(x) = 0$  时, 有三个对应自变量且  $x = \{-2, 0, 2\}$  ;

当  $f(x) \in (0, 3)$  时, 有两个对应自变量,

记为  $x_3, x_4 (x_3 < x_4)$  , 则  $-2 < x_3 < 0 < 2 < x_4 < \log_2 7$  ;

当  $f(x) \in [3, +\infty)$  时, 有一个  $x \in [\log_2 7, +\infty)$  与之对应;

令  $t = f(x)$  , 则  $f(t) = m$  , 要使  $f(f(x)) = m$  有且仅有两个不相等的实数解,

若  $f(t) = m$  有三个解, 则  $t = f(x) \in \{-2, 0, 2\}$  , 此时  $x$  有 7 个解, 不满足;

若  $f(t) = m$  有两个解  $t_1, t_2$  且  $t_1 < t_2$  , 此时  $t_1 = f(x)$  和  $t_2 = f(x)$  各有一个解,

结合图象知, 不存在这样的  $t$  , 故不存在对应的  $m$  ;

若  $f(t) = m$  有一个解  $t_0$  , 则  $t_0 = f(x)$  有两个解, 此时  $t_0 \in (-3, -\log_2 7] \cup [\log_2 7, 3)$  ,

所以对应的  $m \in (-4, -3] \cup [3, 4)$  ,

综上,  $m \in (-4, -3] \cup [3, 4)$  .

故选: C .

2. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ |\ln x|, & x > 0, \end{cases}$  为自然对数的底数, 则函数  $F(x) = f[f(x)] - \frac{1}{e^2} f(x) - 1$

的零点个数为( )

A. 5

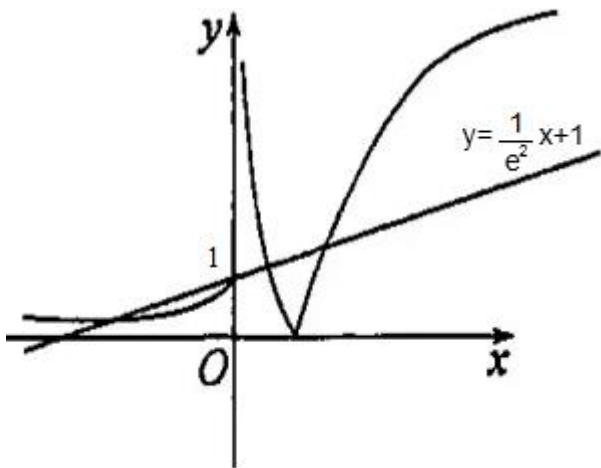
B. 6

C. 7

D. 3

【解答】解：令  $f(x)=t$ ，则有  $f(t)=\frac{t}{e^2}+1$ ，

作出  $f(x)$  的图象，如图所示：



设直线  $y=kx+1$  与  $y=e^x$  相切，切点为  $(x_0, y_0)$ ，

则有  $\begin{cases} e^{x_0} = k \\ e^{x_0} = kx_0 + 1 \end{cases}$ ，解得  $x_0 = 0$ ， $k = 1$ ，

设直线  $y=kx+1$  与  $y=\ln x$  相切，切点为  $(x_1, y_1)$ ，

则有  $\begin{cases} \frac{1}{x_1} = k \\ kx_1 + 1 = \ln x_1 \end{cases}$ ，解得  $x_1 = e^2$ ， $k = \frac{1}{e^2}$ ，

所以直线  $y=\frac{1}{e^2}t+1$  与  $f(t)$  的图象有 4 个交点，

不妨设 4 个交点的横坐标分别为： $t_1, t_2, t_3, t_4$ ，且  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ ，

由图象可知  $t_1 < 0$ ， $t_2 = 0$ ， $0 < t_3 < 1$ ， $t_4 = e^2$ ，

由图象可知  $f(x)=t_1$  无解， $f(x)=t_2$  有 1 个解， $f(x)=t_3$  有 3 个解， $f(x)=t_4$  有 2 个解，

所以  $F(x)$  有 6 个零点.

故选：B.

3. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$  ( $e$  为自然对数的底数), 则函数  $F(x) = f[f(x)] - \frac{1}{e^3} f(x) - 1$  的

零点个数为( )

A. 3

B. 5

C. 7

D. 9

【解答】解: 设  $f(x) = t$ , 令  $F(x) = 0$  可得:  $f(t) = \frac{1}{e^3} t + 1$ ,

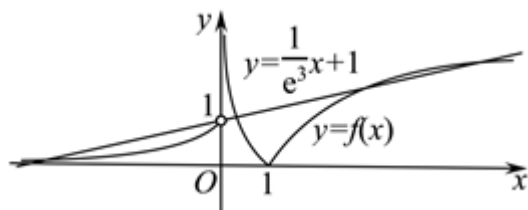
对于  $y = \frac{1}{1-x}$ ,  $y' = \frac{1}{(1-x)^2}$ , 故  $y = \frac{1}{1-x}$  在  $x_{x=0}$  处切线的斜率值为  $k_1 = 1$ ,

设  $y = k_2 x + 1$  与  $y = \ln x$  相切于点  $(x_2, \ln x_2)$ ,

Q  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ,  $\therefore$  切线斜率  $k_2 = \frac{1}{x_2}$ , 则切线方程为:  $y - \ln x_2 = \frac{1}{x_2}(x - x_2)$ ,

即  $y = \frac{1}{x_2} \cdot x + \ln x_2 - 1$ ,  $\therefore \begin{cases} k_2 = \frac{1}{x_2} \\ \ln x_2 - 1 = 1 \end{cases}$ , 解得:  $x_2 = e^2, k_2 = \frac{1}{e^2}$ ;

由于  $\frac{1}{e^3} < \frac{1}{e^2} < 1$ , 故作出  $f(x)$  与  $y = \frac{1}{e^3} x + 1$  图象如下图所示,

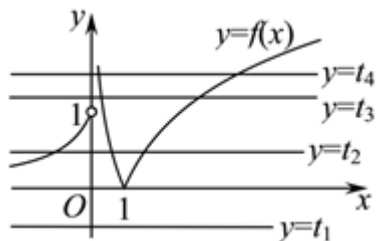


$\therefore y = \frac{1}{e^3} x + 1$  与  $f(x)$  有四个不同交点,

即  $y = \frac{1}{e^3} t + 1$  与  $f(t)$  有四个不同交点,

设三个交点为  $t_1, t_2, t_3, t_4$  ( $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ ), 由图象可知:  $t_1 < 0 < t_2 < 1 < t_3 < t_4$ ,

作出函数  $y = t$ ,  $y = f(x)$  的图象如图,



由此可知  $f(x)$  与  $y = t_1$  无交点, 与  $y = t_2$  有三个不同交点, 与  $y = t_3, y = t_4$  各有两个不同交点,

$\therefore F(x) = f[f(x)] - \frac{1}{e^2} f(x) - 1$  的零点个数为 7 个，

故选：C.

4. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$ ，则函数  $F(x) = f[f(x)] - \frac{1}{e^2} f(x) - 1$  的零点个数为 ( )

A. 5

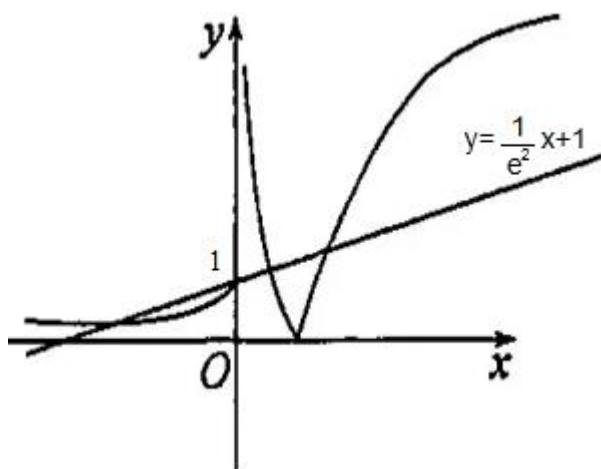
B. 6

C. 7

D. 8

【解答】解：令  $f(x) = t$ ，则有  $f(t) = \frac{t}{e^2} + 1$ ，

作出  $f(x)$  的图象，如图所示：



设直线  $y = kx + 1$  与  $y = e^x$  相切，切点为  $(x_0, y_0)$ ，

则有  $\begin{cases} e^{x_0} = k \\ e^{x_0} = kx_0 + 1 \end{cases}$ ，解得  $x_0 = 0$ ， $k = 1$ ，

设直线  $y = kx + 1$  与  $y = \ln x$  相切，切点为  $(x_1, y_1)$ ，

则有  $\begin{cases} \frac{1}{x_1} = k \\ kx_1 + 1 = \ln x_1 \end{cases}$ ，解得  $x_1 = e^2$ ， $k = \frac{1}{e^2}$ ，

所以直线  $y = \frac{1}{e^2} t + 1$  与  $f(t)$  的图象有 4 个交点，

不妨设 4 个交点的横坐标分别为： $t_1, t_2, t_3, t_4$ ，且  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ ，

由图象可知  $t_1 < 0$ ， $t_2 = 0$ ， $0 < t_3 < 1$ ， $t_4 = e^2$ ，

由图象可知  $f(x) = t_1$  无解， $f(x) = t_2$  有 1 个解， $f(x) = t_3$  有 3 个解， $f(x) = t_4$  有 2 个解，

所以  $F(x)$  有 6 个零点.

故选：B．

5. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x \leq 0 \\ |\log_2 x|, & x > 0 \end{cases}$ ，则函数  $g(x) = f(f(x)) - f(x) - 2$  的零点个数为( )

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

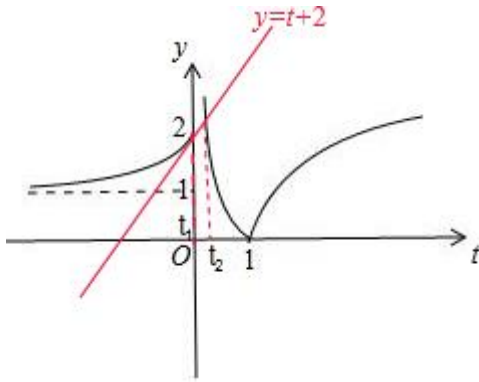
【解答】解：设  $t = f(x)$ ，则  $g(x) = f(t) - t - 2$ ，

令  $g(x) = f(t) - t - 2 = 0$ ，可得  $f(t) = t + 2$ ，

Q  $y = 2^x + 1$  在  $x = 0$  处的导数为  $\ln 2 < 1$ ，

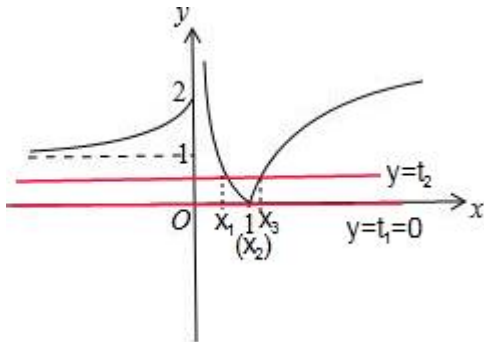
$\therefore y = t + 2$  与  $y = 2^t + 1$  在  $y$  轴左边没有交点，

作出  $y = f(t)$  与  $y = t + 2$  的图象，如图所示，



数形结合可得  $y = f(t)$  与  $y = t + 2$  两交点横坐标满足： $t_1 = 0$ ， $t_2 \in (0, 1)$ ，

又  $t = f(x)$ ，作出  $y = t_1$ ， $y = t_2$  与  $y = f(x)$  的图象，如图所示，



数形结合可得  $y = t_1$ ， $y = t_2$  与  $y = f(x)$  的图象共有三个交点，交点横坐标分别为  $x_1$ ， $x_2 = 1$ ，

$x_3$ ，

故  $g(x)$  的零点个数为 3，

故选：A.

6. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} |\log_3 x|, & x > 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = x - k$ , 函数  $g(f(x))$  有 4 个不同

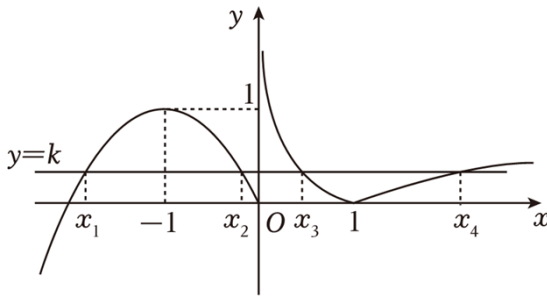
的零点  $x_1, x_2, x_3, x_4$  且  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ , 则  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$  的取值范围为 ( )

A.  $(-2, \frac{46}{9}]$     B.  $(0, \frac{64}{9})$     C.  $(0, \frac{82}{9}]$     D.  $(0, +\infty)$

【解答】解：  $g(f(x)) = f(x) - k$ , 令  $g(f(x)) = 0$ , 得  $f(x) = k$ ,

函数  $g(f(x))$  有 4 个不同的零点, 即  $f(x) = k$  有 4 个不同的根;

根据题意, 作出  $f(x)$  的图像, 如图:



明显地, 根据二次函数和对数函数的性质, 有  $x_1 + x_2 = -2$ ,  $x_3 x_4 = 1$ ,

因为  $x_4 > x_3 > 0$ , 故  $x_3 + x_4 > 2\sqrt{x_3 \cdot x_4} = 2$ ,

令  $\frac{1}{2} |\log_3 x| = 1$ , 得  $x = \frac{1}{9}$  或  $x = 9$ , 故  $x_3 + x_4 < 9 + \frac{1}{9}$ ,

又因为  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2 + x_3 + x_4$ ,

则  $-2 + 9 + \frac{1}{9} > -2 + x_3 + x_4 > 0$ , 整理得  $\frac{64}{9} > -2 + x_3 + x_4 > 0$ ,

故  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$  的取值范围为  $(0, \frac{64}{9})$ .

故选：B.

7. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x > 0, \\ x^3 - 3x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$ , 函数  $g(x) = f(f(x)) - m$  恰有 5 个零点, 则  $m$  的取值范

围是 ( )

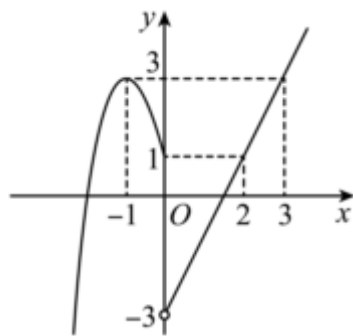
A.  $(-3, 1)$     B.  $(0, 1)$     C.  $[-1, 1)$     D.  $(1, 3)$

【解答】解：当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ . 由  $f'(x) > 0$ , 得  $x < -1$ , 由  $f'(x) < 0$ , 得

$-1 < x \leq 0$ ,

则  $f(x)$  在  $(-1, 0]$  上单调递减, 在  $(-\infty, -1)$  上单调递增,

故  $f(x)$  的大致图象如图所示.



设  $t = f(x)$ , 则  $m = f(t)$ , 由图可知当  $m > 3$  时,  $m = f(t)$  有且只有 1 个实根,

则  $t = f(x)$  最多有 3 个不同的实根, 不符合题意.

当  $m = 3$  时,  $m = f(t)$  的解是  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = 3$ .  $f(x) = t_1$  有 2 个不同的实根,  $f(x) = t_2$  有 2 个不同的实根,

则  $t = f(x)$  有 4 个不同的实根, 不符合题意.

当  $1, m < 3$  时,  $m = f(t)$  有 3 个不同的实根  $t_3, t_4, t_5$ , 且  $t_3 \in (-2, -1)$ ,  $t_4 \in (-1, 0]$ ,  $t_5 \in [2, 3)$ .

$f(x) = t_3$  有 2 个不同的实根,  $f(x) = t_4$  有 2 个不同的实根,  $f(x) = t_5$  有 3 个不同的实根,

则  $t = f(x)$  有 7 个不同的实根, 不符合题意.

当  $-1, m < 1$  时,  $m = f(t)$  有 2 个不同的实根  $t_6, t_7$ , 且  $t_6 \in (-3, -1)$ ,  $t_7 \in [1, 2)$ .

$f(x) = t_6$  有 2 个不同的实根,  $f(x) = t_7$  有 3 个不同的实根,

则  $t = f(x)$  有 5 个不同的实根, 符合题意.

当  $-3 < m < -1$  时,  $m = f(t)$  有 2 个不同的实根  $t_8, t_9$ , 且  $t_8 \in (-3, -1)$ ,  $t_9 \in (0, 1)$ ,

$f(x) = t_8$  有 2 个不同的实根,  $f(x) = t_9$  有 2 个不同的实根, 则  $t = f(x)$  有 4 个不同的实根, 不符合题意.

当  $m, -3$  时,  $m = f(t)$  有且只有 1 个实根, 则  $t = f(x)$  最多有 3 个不同的实根, 不符合题意,

综上,  $m$  的取值范围是  $[-1, 1)$ .

故选：C.

8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -xe^x, & x < 0 \\ \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ , 则函数  $g(x) = f(f(x)) - 1$  的零点个数是 ( )

A. 1

B. 0

C. 2

D. 3

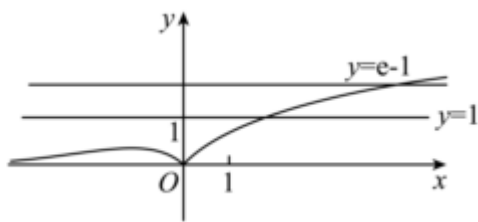
【解答】解：函数  $f(x) = \begin{cases} -xe^x, & x < 0 \\ \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ ,

对  $y = -xe^x \Rightarrow y' = -(x+1)e^x$ , 令  $y' > 0 \Rightarrow x < -1$ , 令  $y' < 0 \Rightarrow 0 > x > -1$ ,

可知  $y = -xe^x$  在  $(-\infty, -1)$  上单调递增, 在  $(-1, 0)$  上单调递减,

且  $x$  趋向负无穷时,  $y > 0$ ,  $x = -1$  时,  $y_{\max} = \frac{1}{e}$ ,

故结合对数函数图象, 可画出函数  $f(x)$  图像如下图所示:



函数  $g(x) = f(f(x)) - 1$  的零点, 即  $f(f(x)) = 1$ , 令  $t = f(x)$ , 代入可得  $f(t) = 1 > \frac{1}{e}$ ,

由图像可知  $t = e - 1$ , 即  $f(x) = e - 1$ ,

结合函数图像可知,  $f(x) = e - 1$  有 1 个解,

综合可知, 函数  $g(x) = f(f(x)) - 1$  的零点有 1 个.

故选：A.

9. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |\lg|x-1||, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ , 则函数  $y = f(f(x)) + m (m \in \mathbb{R})$  零点个数最多是 ( )

A. 10

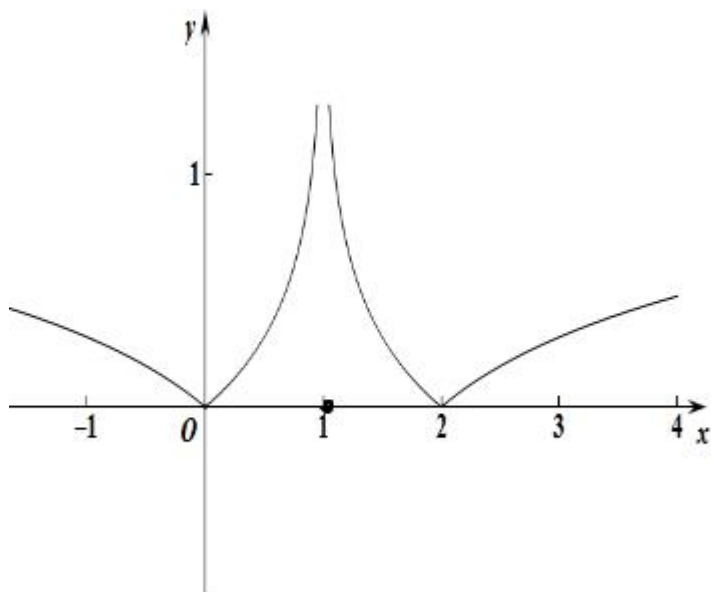
B. 12

C. 14

D. 16

【解答】解：由题意可得  $f(x) = \begin{cases} \lg(x-1), & x \geq 2 \\ -\lg(x-1), & 1 < x < 2 \\ 0, & x = 1 \\ -\lg(1-x), & 0 < x < 1 \\ \lg(1-x), & x \leq 0 \end{cases}$ ,

作出  $f(x)$  的图象, 如图所示:



由此可得  $f(x) \geq 0$ ，

令  $t = f(x)$ ，则  $t \geq 0$ ，

所以  $y = f(t) + m$ ，

令  $y = 0$ ，则有  $f(t) + m = 0$ ，

则有  $-m = f(t)$ ， $t \geq 0$ ，

当  $-m \geq 0$  时， $-m = f(t)$  有三个实数根，分别为  $t_1$ ， $t_2$ ， $t_3$ ，

若  $-m = 0$ ，即  $m = 0$  时，则有  $t_1 = 0$ ， $t_2 = 1$ ， $t_3 = 2$ ，

若  $-m > 0$ ，即  $m < 0$  时，则  $0 < t_1 < 1 < t_2 < 2 < t_3$ ，

当  $-m < 0$ ，即  $m > 0$  时， $-m = f(t)$  没有实数根，

又  $t = f(x)$ ， $x \in \mathbb{R}$ ，

若  $m = 0$ ， $t_1 = 0$ ，即  $f(x) = 0$  时，有 3 个零点； $t_2 = 1$ ，即  $f(x) = 1$  时，有 4 个零点；，

$t_3 = 2$ ，即  $f(x) = 2$  时，有 4 个零点，

所以此时共有 11 个零点；

若  $m < 0$  时， $t_1$ ， $t_2$ ， $t_3$  各自对应着 4 个零点，此时共有 12 个零点，

所以函数  $y = f(f(x)) + m (m \in \mathbb{R})$  零点个数最多为 12 个。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/398054024067006130>