专题03 函数

目录

明晰学考要求 01

1、了解构成函数的要素，能求简单函数的定义域、值域、解析式；

2、了解函数的三种表示方法及各自的优缺点；

3、能运用定义法证明函数的单调性；

4、能借助函数图象理解函数在某区间上单调递增(或递减)的概念；

5、了解函数的最大(小)值的概念及其几何意义；

6、了解函数奇偶性的定义，掌握判断和证明函数奇偶性的方法；

基础知识梳理 02

1、函数的概念

概念		一般地，设 A，B 是非空的实数集，如果对于集合 A 中的任意一个数 x，按照某种确定的对应关系 f，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就称 f：$A \to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数
三要素	对应关系	$y=f(x)$，$x\in A$
	定义域	x 的取值范围 A
	值域	与 x 的值相对应的 y 的值的集合 $\{f(x)\|x\in A\}$

①一次函数的定义域是 **R**，值域也是 **R**，对应关系实际上就是 $f(x)=ax+b(a\neq0)$；

②二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$的定义域是 **R**，当 $a>0$ 时，它的值域是$\left\{y\middle|y\geqslant\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right\}$；当 $a<0$ 时，它的值域是$\left\{y\middle|y\leqslant\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right\}$，对应关系实际上就是 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$；

③反比例函数 $f(x)=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$的定义域是$\{x|x\neq0\}$，值域是$\{y|y\neq0\}$，对应关系是 $f(x)=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$.

2、函数的三种表示方法

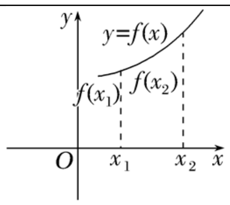
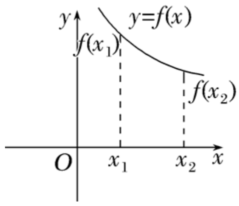
表示法	定义
解析法	用数学表达式表示两个变量之间的对应关系
图象法	用图象表示两个变量之间的对应关系
列表法	列出表格来表示两个变量之间的对应关系

3、分段函数

分段函数求值时，要先确定要求值的自变量属于哪一段区间；然后代入该段的解析式求值，直到求出值为止. 当出现 $f(f(x_0))$的形式时，应从内到外依次求值.

4、函数的单调性

（1）①基本概念

<table>
<tr><td rowspan="2">条件</td><td colspan="2">一般地，设函数 $f(x)$的定义域为 I，区间 $D\subseteq I$.如果$\forall x_1$，$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时</td></tr>
<tr><td>都有 $f(x_1)<f(x_2)$</td><td>都有 $f(x_1)>f(x_2)$</td></tr>
<tr><td>结论</td><td>$f(x)$在区间 D 上单调递增</td><td>$f(x)$在区间 D 上单调递减</td></tr>
<tr><td>图示</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

②当函数 $f(x)$在它的定义域上单调递增时，称它是增函数；当函数 $f(x)$在它的定义域上单调递减时，称它是减函数.

③定义中 x_1，x_2 有三个特征：①x_1，x_2 属于同一个区间；②任意性，x_1 与 x_2 不能用 D 上的特殊值代替；③有序性，通常规定 $x_1<x_2$.

(2)函数的单调区间

如果函数 $y=f(x)$在区间 D 上是单调递增或单调递减，那么就说函数 $y=f(x)$在这一区间具有(

严格的)单调性，区间 D 叫做 $y=f(x)$的单调区间.

①函数的单调区间是其定义域内的某一个区间，故讨论函数的单调性时，必须先确定函数的定义域.

②若函数在两个区间上都是单调递增(或递减)的，这两个单调区间不能用并集符号“∪”连接.

5、函数的最值

	最大值	最小值
条件	一般地，设函数 $y=f(x)$的定义域为 I，如果存在实数 M 满足	
	$\forall x\in I$，都有 $f(x)\le M$	$\forall x\in I$，都有 $f(x)\ge M$
	$\exists x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$	
结论	M 是函数 $y=f(x)$的最大值	M 是函数 $y=f(x)$的最小值
几何意义	$f(x)$图象上最高点的纵坐标	$f(x)$图象上最低点的纵坐标

①最值首先是一个函数值，即存在一个自变量 x_0，使得 $f(x_0)$等于最值.

②对于定义域内的任意元素 x，都有 $f(x)\le f(x_0)$(或 $f(x)\ge f(x_0)$)，“任意”两个字不可省略.

5、函数的奇偶性

(1)定义及图象特征

①设函数 $f(x)$的定义域为 I，如果$\forall x\in I$，都有$-x\in I$，且 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$是偶函数. 如果$\forall x\in I$，都有$-x\in I$，且 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$是奇函数.

②图象特征：偶函数的图象关于 y 轴对称.反之，图象关于 y 轴对称的函数一定是偶函数. 奇函数的图象关于原点对称.反之，图象关于原点对称的函数一定是奇函数.

（2）如果函数 $f(x)$是奇函数或偶函数，那么就说函数 $f(x)$具有奇偶性.

①奇函数与偶函数的定义域都关于原点对称；若一个函数的定义域不关于原点对称，则这个函数是非奇非偶函数.

②若奇函数$f(x)$在$x=0$处有定义，则$f(0)=0$.

考点精讲精练 03

考点一：求函数的定义域、值域

【典型例题】

例题 1．（2023 高三上·江苏徐州·学业考试）函数$f\left(x\right)=\lg\left(x+1\right)+\dfrac{1}{x+2}$的定义域是（　）

A．$\left(-1,+\infty\right)$　　B．$\left[-1,+\infty\right)$

C．$\left(-1,2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$　　D．$\left[-1,2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

【答案】A

【分析】由对数函数的定义域与含分式的函数定义域，构成不等式组求解即可.

【详解】因为$f\left(x\right)=\lg\left(x+1\right)+\dfrac{1}{x+2}$，所以定义域满足$\begin{cases}x+1>0\\x+2\neq 0\end{cases}$，

解得$x>-1$，

故选：A.

例题 2．（2023 高三·江苏·学业考试）函数$f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$的定义域为（　）

A．$\left(-\infty,1\right]$　　B．$\left(-\infty,1\right)$　　C．$\left[1,+\infty\right)$　　D．$\left(1,+\infty\right)$

【答案】D

【分析】函数定义域满足$\dfrac{1}{x-1}\geq 0$，$x-1\neq 0$，解得答案.

【详解】函数$f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$的定义域满足：$\dfrac{1}{x-1}\geq 0$，$x-1\neq 0$，解得$x>1$.

故选：D

例题 3．函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$的值域是（　）

A．$(0,1)$　　B．$\left(0,1\right]$　　C．$\left[0,1\right)$　　D．$\left[0,1\right]$

【答案】D

【分析】先求出函数$f(x)$的定义域；再根据复合函数单调性的判断方法判断$f(x)$的单调性；最后根据单调性即可得出答案.

【详解】要使函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$有意义，须使$1-x^2\geq 0$，解得$-1\leq x\leq 1$，即函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$的定义域为

$[-1,1]$.

令 $t=1-x^2$， $x\in[-1,1]$，

则 $y=\sqrt{t}$.

因为函数 $t=1-x^2$ 在 $[-1,0]$ 上单调递增，在 $(0,1]$ 上单调递减； $y=\sqrt{t}$ 为 $[0,+\infty)$ 上的增函数，

所以 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在 $[-1,0]$ 上单调递增，在 $(0,1]$ 上单调递减.

所以当 $x=0$ 时， $f(x)_{\max}=1$.

又因为 $f(-1)=0$， $f(1)=0$，

所以函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的值域为 $[0,1]$.

【即时演练】

1．下列函数中，定义域为 $\mathbf{R}$ 的是（　）

A． $y=\dfrac{1}{x+2}$　　B． $y=\sqrt{x}$　　C． $y=\log_2(x+1)$　　D． $y=x^2$

【答案】D

【分析】根据分母不为 0 即可判断 A；根据偶次方根被开方数大于等于 0 即可判断 B；根据对数函数真数大于 0 即可判断 C；根据幂函数定义域即可判断 D.

【详解】对 A，其定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$，故 A 错误；

对 B，其定义域为 $[0,+\infty)$，故 B 错误；

对 C，由题意得 $x+1>0$，解得 $x>-1$，则其定义域为 $(-1,+\infty)$，故 C 错误；

对 D，显然其定义域为 R，故 D 正确.

故选：D.

2．函数 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ 的定义域为（　）

A． $\{x|x\rangle 0 \text{ 且 } x\neq 1\}$　　B． $\{x\,|\,x\geq 0 \text{ 且 } x\neq 1\}$

C． $\{x|x\neq 1\}$　　D． $\{x|x\geq 0\}$

【答案】B【分析】根据根式、分式的意义直接运算求解即可.

【详解】由题意可得：$\begin{cases}x\geq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$，解得 $x\geq 0$ 且 $x\neq 1$，

所以函数 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ 的定义域为 $\{x\mid x\geq 0$ 且 $x\neq 1\}$.

故选：B.

3.函数 $f(x)=\left(\sqrt[6]{x}\right)^{2}$ 的定义域为（　）

A．R　　B．$[0,+\infty)$　　C．$(-\infty,0]$　　D．$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

【答案】B

【分析】根据偶次根式有意义的条件求解即可

【详解】函数 $f(x)=\left(\sqrt[6]{x}\right)^{2}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，

故选：B

4.函数 $f(x)=\sqrt{x}-1$ 的值域是（　）

A．$(-\infty,-1)$　　B．$(-\infty,-1]$　　C．$(-1,+\infty)$　　D．$[-1,+\infty)$

【答案】D

【分析】根据函数的定义域为 $[0,+\infty)$ 且在定义域内是增函数可得答案.

【详解】函数 $f(x)=\sqrt{x}-1$ 的定义域为 $[0,+\infty)$ 且在定义域内是增函数.

所以 $f(x)\geq f(0)=-1$

故选：D

【点睛】本题考查具体函数的值域，属于基础题.

考点二：函数（分段函数）求值

【典型例题】

例题 1．已知 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f(2)$ 的值为（　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【答案】B

【分析】直接代入求解即可.【详解】因为 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f(2)=\sqrt{2}$，

故选：B.

例题2．（2024高二下·安徽·学业考试）已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}-x^2+2x+2,x\le 2\\ f\left(x-2\right),x>2\end{cases}$，则$f\left(3\right)=$（　）

A．-1　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】D

【分析】根据题意，结合分段函数的解析式，代入准确运算，即可求解.

【详解】由函数$f\left(x\right)=\begin{cases}-x^2+2x+2,x\le 2\\ f\left(x-2\right),x>2\end{cases}$，则$f\left(3\right)=f\left(3-2\right)=f\left(1\right)=-1^2+2\times 1+2=3$.

故选：D.

例题3．已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}x+2,x\le 1\\ 2x-3,x>1\end{cases}$，则$f\left(f\left(1\right)\right)=$（　）

A．1　　B．3　　C．-3　　D．-1

【答案】B

【分析】计算出$f(1)=3$，从而求出$f\left(f\left(1\right)\right)$.

【详解】$f\left(1\right)=1+2=3$，$f\left(f\left(1\right)\right)=f\left(3\right)=6-3=3$.

故选：B

例题4．已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}x,x\le 0\\ \dfrac{1}{x},x>0\end{cases}$，若$f\left(x_0\right)=2$，则$x_0=$（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．2　　D．-2

【答案】A

【分析】根据分段函数的解析式，代入求值，即可得答案.

【详解】当$x\le 0$时，$f(x)=x\le 0$，当$x>0$时，$f(x)=\frac{1}{x}>0$，

故由$f\left(x_0\right)=2$，得$\frac{1}{x_0}=2,\therefore x_0=\frac{1}{2}$，

故选：A

【即时演练】1．已知函数$f\left(x\right)=\frac{1}{x}$，则$f\left(4\right)=$（　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

【答案】A

【分析】直接代入计算即可.

【详解】$f(4)=\frac{1}{4}$.

故选：A.

2．（2023高二下·北京·学业考试）已知集合$P=\{2,4,6,8\}$，定义函数$f(x)=\begin{cases}1,x\in P,\\-1,x\notin P.\end{cases}$则$f(2)+f(3)=$（　）

A．-2　　B．0　　C．1　　D．2

【答案】B

【分析】由$2\in P,3\notin P$，结合分段函数的解析式可得答案.

【详解】由题意可知$2\in P,3\notin P$，

所以$f(2)+f(3)=1+(-1)=0$，

故选：B.

3.（2023高一下·吉林·学业考试）已知函数$f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$，若$f(a)=8$，则$a$的取值为（　）

A．3　　B．5　　C．-3　　D．-5

【答案】A

【分析】利用分类讨论表示方程求解即可.

【详解】当$a\le 0$时，$f(a)=a+3=8\Rightarrow a=5$，不符合题意，

当$a>0$时，$f(a)=2^a=8\Rightarrow a=3$，符合题意

故选：A.

考点三：函数的三种表示法

【典型例题】

例题1．已知函数$f(x)=x$，则$f(2x)=$（　）

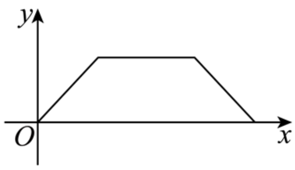
A．$2x$　B．x　C．2　D．1【答案】A

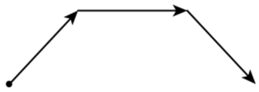
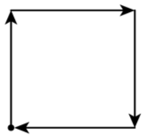
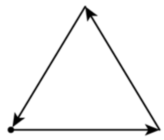
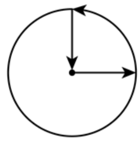
【分析】由函数解析式求解.

【详解】因为$f(x)=x$，所以$f(2x)=2x$，

故选：A

例题2．（2023高二·湖南衡阳·学业考试）如图是周老师散步时所走的离家距离（y）与行走时间（x）之间的函数关系的图象，则周老师散步的路线可能是（　）



A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【分析】根据y关于x的函数关系的图象确定正确答案.

【详解】根据y关于x的函数关系的图象可知，

周老师先远离家，然后有一段时间和家的距离相同，然后再回家（离家越来越近），

所以 D 选项对应图象符合.

故选：D

例题 3．（2024 高二下·福建·学业考试）某工厂生产零件x件，当$x \le 10$时，每生产 1 件的成本为 100 元，超过 10 件时，每生产 1 件的成本为 150 元，当x=15 时，生产成本为（　）元

A．1000　　B．1750　　C．1500　　D．1300

【答案】B

【分析】根据给定条件，求出生产成本y与产量x的函数关系，再代入求出函数值.

【详解】令生产零件x件的成本为y元，

当$x \le 10, x \in \mathrm{N}^*$时，$y = 100x$，

当$x > 10, x \in \mathrm{N}^*$时，$y = 10 \times 100 + 150(x - 10) = 150x - 500$，

因此$y = \begin{cases} 100x, x \le 10, x \in \mathrm{N}^* \\ 150x - 500, x > 10, x \in \mathrm{N}^* \end{cases}$，当$x = 15$时，$y = 1750$，

所以当$x = 15$时，生产成本为 1750 元.

故选：B 例题 4．　已知函数$y = f(x)$用列表法表示如下表，则$f[f(2)] =$_____

x	0	1	2
$f(x)$	2	0	1

【答案】0

【分析】由表格给出的数据有$f(2) = 1$，则$f[f(2)] = f(1)$可求出答案.

【详解】根据表格中的数据有$f(2) = 1$

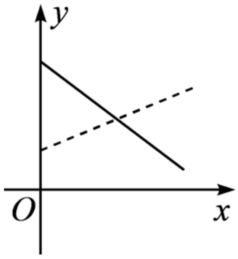
所以 $f[f(2)]=f(1)=0$

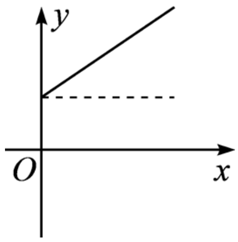
故答案为：0

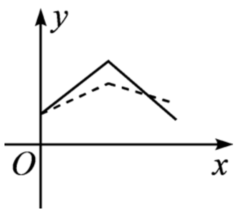
【点睛】本题考查根据函数的列表法求函数值，属于基础题.

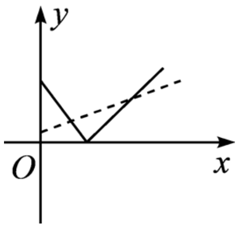
【即时演练】

1．在股票交易过程中，经常用两种曲线来描述价格变化情况，一种是即时价格曲线 $y=f(x)$，另一种是平均价格曲线 $y=g(x)$.如 $f(2)=3$ 表示股票开始交易后 2 小时的即时价格为 3 元；$g(2)=3$ 表示 2 小时内的平均价格为 3 元，下四个图中，实线表示 $y=f(x)$ 的图象，虚线表示 $y=g(x)$ 的图象，其中正确的是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

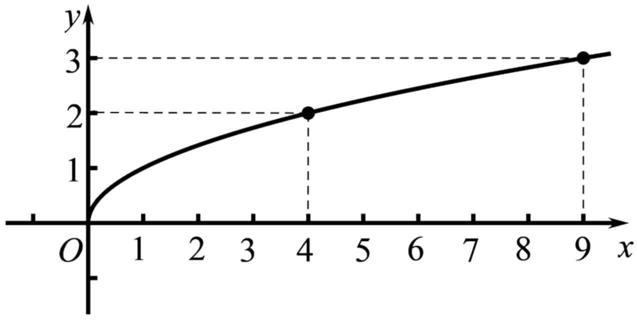
【分析】根据题意，结合函数图象，可得答案.

【详解】刚开始交易时，即时价格和平均价格应该相等，故 A、D 错误；

开始交易后，平均价格应该跟随即时价格变动，即时价格与平均价格同增同减，故 B 错误.

故选：C.

2．函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象如图所示，则 $f\left(9\right)=$（　）



A．5　　B．4　　C．3　　D．2

【答案】C