

辽宁省统一考试第二次模拟试题

数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知一组数据为 50, 40, 39, 45, 32, 34, 42, 37, 则这组数据第 40 百分位数为 ()

- A. 39 B. 40 C. 45 D. 32

【答案】A

【解析】

【分析】根据百分位数的定义计算求解即可.

【详解】将这组数据从小到大排列为: 32, 34, 37, 39, 40, 42, 45, 50, 共 8 个,

因为 $8 \times 40\% = 3.2$, 所以这组数据第 40 百分位数为第 4 个数据, 即为 39,

故选: A

2. 已知方程 $\frac{x^2}{k-4} + \frac{y^2}{8-k} = 1$ 表示的曲线是椭圆, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(4, 6)$ B. $(6, 8)$ C. $(4, 8)$ D. $(4, 6) \cup (6, 8)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据椭圆的标准方程中分母都大于 0 且不能相等即可求解.

【详解】因为方程 $\frac{x^2}{k-4} + \frac{y^2}{8-k} = 1$ 表示的曲线是椭圆,

$$\text{所以 } \begin{cases} k-4 > 0 \\ 8-k > 0 \\ k-4 \neq 8-k \end{cases}, \text{ 解得 } 4 < k < 8 \text{ 且 } k \neq 6,$$

所以实数 k 的取值范围是 $(4, 6) \cup (6, 8)$.

故选: D.

3. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_7 = 6$, 则 $S_{13} =$ ().

- A. 13 B. 26 C. 39 D. 78

【答案】D

【解析】

【分析】由等差中项和性质和等差数列的前 n 项和公式求解即可.

【详解】因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，

$$\text{所以 } S_{13} = \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = \frac{13 \times 2a_7}{2} = 78.$$

故选：D.

4. 设 α, β 是两个平面， m, n, l 是三条直线，则下列命题为真命题的是（ ）

A. 若 $l \subset \beta$ ， $m \subset \alpha$ ， $l \perp m$ ，则 $\alpha \perp \beta$

B. 若 $l // \alpha$ ， $l // \beta$ ， $\alpha \cap \beta = m$ ，则 $l // m$

C. 若 $\alpha \cap \beta = m$ ， $\beta \cap \gamma = n$ ， $\gamma \cap \alpha = l$ ，则 $m // n // l$

D. 若 $m \perp n$ ， $m \perp \alpha$ ，则 $n // \alpha$

【答案】B

【解析】

【分析】根据空间中线面之间的位置关系逐一判断即可.

【详解】对于A，若 $l \subset \beta$ ， $m \subset \alpha$ ， $l \perp m$ ，则 α, β 相交或平行，故A错误；

对于B，若 $l // \alpha$ ， $l // \beta$ ， $\alpha \cap \beta = m$ ，

由线面平行的性质可得 $l // m$ ，故B正确；

对于C，若 $\alpha \cap \beta = m$ ， $\beta \cap \gamma = n$ ， $\gamma \cap \alpha = l$ ，

当 α, β, γ 两两相交时， m, n, l 两两相交，故C错误；

对于D，若 $m \perp n$ ， $m \perp \alpha$ ，则 $n // \alpha$ 或 $n \subset \alpha$ ，故D错误.

故选：B.

5. 甲、乙、丙、丁4人参加活动，4人坐在一排有12个空位的座位上，根据要求，任意两人之间需间隔至少两个空位，则不同的就座方法共有（ ）

A. 120种

B. 240种

C. 360种

D. 480种

【答案】C

【解析】

【分析】先假设每个人坐一个位置相当于去掉4个位置，再将4个人中间任意两个人之间放入2个空位，此时空位一共还剩2个，再将这两个空位分一起和分开插入4人之间和两侧空位，即可得解.

【详解】先假设每个人坐一个位置相当于去掉4个位置，

再将4个人中间任意两个人之间放入2个空位，

此时空位一共还剩 2 个，

若将这两个空位连在一起插入 4 人之间和两侧空位，有 5 种放法；

若将这两个空位分开插入 4 人之间和两侧空位，有 $\frac{A_5^2}{A_2^2} = 10$ 种放法，

故不同的就座方法共有 $A_4^4 \times (5 + 10) = 360$ 种。

故选：C.

6. 设直线 $x - by - 1 = 0$ 被圆 $x^2 + y^2 = 2$ 所截弦的中点为 M ，点 $A(\sqrt{2}, 0)$ ，则 $|AM|$ 的取值范围是 ()

- A. $(\sqrt{2} - 1, 1)$ B. $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2})$ C. $[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2})$ D. $[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2}]$

【答案】C

【解析】

【分析】利用直线过定点和弦中点 M 可得 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{NM} = 0$ ，进而求出点 M 的轨迹方程，再结合点 $A(\sqrt{2}, 0)$ 与轨迹方程的关系求出 $|AM|$ 的取值范围即可。

【详解】直线过定点 $(1, 0)$ 设为 N ，圆心 $O(0, 0)$ ，半径 $r = \sqrt{2}$ ，

设 $M(x, y)$ ，则 $OM \perp NM$ ，即 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{NM} = 0$ ，即 $x(x - 1) + y^2 = 0$ ，整理可得 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ，

所以点 M 的轨迹是以 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 为圆心，以 $\frac{1}{2}$ 为半径的圆，除去原点，（因为直线 $x - by - 1 = 0$ 不能表示 x 轴）

所以结合圆上的点到点 $A(\sqrt{2}, 0)$ 的距离， M 轨迹上点与点 A 距离范围即为所求，

所以 $\sqrt{2} - 1 \leq |AM| < \sqrt{2}$ ，

故选：C.

7. 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $2 \tan \alpha = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta + \sin^2 \beta}$ ，则 $\cos\left(2\alpha + \beta + \frac{\pi}{3}\right) =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】由 $2 \tan \alpha = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta + \sin^2 \beta}$, 可得 $\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \cos \beta}{1 + \sin \beta}$, 进而可得 $\sin \alpha + \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta$,

再根据两角差的余弦公式化简求出 α, β 的关系, 即可得解.

【详解】因为 $2 \tan \alpha = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta + \sin^2 \beta}$,

$$\text{所以 } \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{\sin \beta + \sin^2 \beta} = \frac{2 \cos \beta}{1 + \sin \beta},$$

$$\text{所以 } \sin \alpha + \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta,$$

$$\text{所以 } \sin \alpha = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta),$$

$$\text{所以 } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha + \beta),$$

$$\text{因为 } \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } \frac{\pi}{2} - \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \alpha + \beta \in (0, \pi),$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{2} - \alpha = \alpha + \beta, \text{ 所以 } 2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } \cos\left(2\alpha + \beta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选: B.

8. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 在第一象限的公共点为 A , 椭圆的左、

右焦点分别为 F_1, F_2 , 其中右焦点与抛物线的焦点重合, 已知 $\angle AF_1 F_2 = 30^\circ$, 则 $\cos \angle AF_2 F_1 =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】结合图象, 过点 A 作 AA' 垂直 $x = -c$ 交于点 A' , 作 $AM \perp x$ 轴, 交于点 M , 依据抛物线的定义及勾股定理可求得相关线段的长度, 进一步计算即可.

【详解】如图, 依题可知, 抛物线的准线方程为 $x = -c$,

过点 A 作 AA' 垂直 $x = -c$ 交于点 A' ,

作 $AM \perp x$ 轴, 交于点 M ,

则 $\angle A'AF = \angle AF_1F_2 = 30^\circ$,

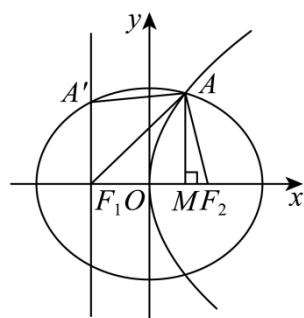
设 $|AF_1| = 2n$, 则 $|A'F_1| = n, |A'A| = \sqrt{3}n$,

则 $|AM| = |A'F_1| = n, |AF_2| = |AA'| = \sqrt{3}n, |F_1M| = \sqrt{3}n$,

$|MF_2| = \sqrt{|AF_2|^2 - |AM|^2} = \sqrt{2}n$,

所以 $\cos \angle AF_2F_1 = \frac{|MF_2|}{|AF_2|} = \frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{3}n} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

故选: B.



二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项的和. 且 $S_5 < S_6$, $S_6 = S_7 > S_8$, 则下面结论正确的是 ()

A. $d \leq 0$

B. $a_7 = 0$

C. S_6 与 S_7 均为 S_n 的最大值

D. 满足 $S_n < 0$ 的 n 的最小值为 14

【答案】 BCD

【解析】

【分析】 由 $S_7 - S_6 = a_7 = 0, S_8 - S_7 = a_8 < 0$ 可判断 A 错误; 由 A 可得 B 正确; 由 $S_5 < S_6$, $S_6 = S_7 > S_8$ 可得 C 正确; 由等差中项和前 n 项和的性质可得 D 正确.

【详解】 A: 因为 $S_6 = S_7 > S_8$, 所以 $S_7 - S_6 = a_7 = 0, S_8 - S_7 = a_8 < 0$,

所以 $d = a_8 - a_7 < 0$, 故 A 错误;

B: 由 A 的解析可得 B 正确;

C: 因为 $S_5 < S_6$, $S_6 = S_7 > S_8$, 所以 S_6 与 S_7 均为 S_n 的最大值, 故 C 正确;

D: 因为 $2a_7 = a_1 + a_{13}$, 由 $S_{13} = \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = 0$, $S_{14} = \frac{14(a_1 + a_{14})}{2} = 7(a_7 + a_8) < 0$,

故 D 正确;

故选: BCD.

10. 已知复数 z, w 均不为 0, 则 ()

A. $\frac{|z|^2}{z} = \bar{z}$

B. $|z+w| = |z|+|w|$

C. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

D. 若 $\frac{1}{z} \in \mathbb{R}$, 则 $z \in \mathbb{R}$

【答案】AD

【解析】

【分析】设 $z = a + bi$, $w = c + di$, 结合复数的运算、共轭复数的定义及复数的模的计算公式逐一判断即可.

【详解】设 $z = a + bi$, $w = c + di$, 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 且复数 z, w 均不为 0,

则选项 A: 由 $z = a + bi$ 可得 $\bar{z} = a - bi$,

所以 $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$, 即 $\frac{|z|^2}{z} = \bar{z}$, A 说法正确;

选项 B: $z + w = a + c + (b + d)i$, 所以 $|z + w|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2$,

又因为 $(|z| + |w|)^2 = (\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2})^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + c^2 + d^2$,

当 $|z + w| = |z| + |w|$, 即 $|z + w|^2 = (|z| + |w|)^2$ 时, 可得 $ac + bd = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$,

两边平方整理得 $2abcd = a^2d^2 + b^2c^2$, 所以 $|z + w| = |z| + |w|$ 不一定成立, C 说法错误;

选项 C: $\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$, 所以 $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{ac + bd + (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$,

又 $\frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{a - bi}{c - di} = \frac{(a - bi)(c + di)}{(c - di)(c + di)} = \frac{ac - bd - (ad + bc)i}{c^2 + d^2}$,

当 $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ 时可得 $bd + adi = 0$, 所以 $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ 不一定成立, C 说法错误;

选项 D: 若 $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$, 则 $b = 0$,

所以 $z = a \in \mathbb{R}$, D 说法正确;

故选: AD

令 $x=2, y=1$, 则 $f(3)=f(2)f(1)-f(-1)f(0)=0$,

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0+(-1)+0+1=0$,

则 $\sum_{i=1}^{2024} f(i)=254 \times 0=0$, 故 D 项错误.

故选: ABC.

【点睛】结论点睛: 解决抽象函数的求值、性质判断等问题, 常见结论:

(1) 关于对称: 若函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 轴对称, 则 $f(x)=f(2a-x)$, 若函数 $f(x)$ 关于点 (a,b) 中心对称, 则 $f(x)=2b-f(2a-x)$, 反之也成立;

(2) 关于周期: 若 $f(x+a)=-f(x)$, 或 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$, 或 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$, 可知函数 $f(x)$ 的周期为 $2a$.

三、填空题: 本题开 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$, $B=\{x||x-1|<m\}$, 若 $A \cup B=B$. 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m>2$

【解析】

【分析】由题意可得 $A \subseteq B$, 再列出不等式组, 解之即可得解.

【详解】因为 $A \cup B=B$, 所以 $A \subseteq B$, 故 $B \neq \emptyset$,

所以 $m>0$ 且 $B=\{x||x-1|<m\}=\{x|1-m<x<1+m\}$,

所以 $\begin{cases} 1-m<-1 \\ 1+m>3 \end{cases}$, 解得 $m>2$.

故答案为: $m>2$.

13. 已知在伯努利试验中, 事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$, 我们称将试验进行至事件 A 发生 r 次为止, 试验进行的次数 X 服从负二项分布, 记 $X \sim NB(r,p)$. 若 $X: NB\left(5, \frac{1}{3}\right)$, 则 $P(X=6)=$ _____.

【答案】 $\frac{10}{729}$

【解析】

【分析】由负二项分布的公式直接解出即可.

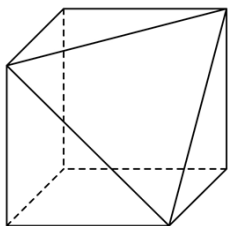
【详解】因为 $X \sim NB(r,p)$, 所以 $P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r}p=C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$,

由题意当 $k=6, r=5$ 时,

$$\text{所以 } P(X=6) = C_5^4 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{729}.$$

故答案为: $\frac{10}{729}$.

14. 如图, 经过边长为 1 的正方体的三个顶点的平面截正方体得到一个正三角形, 将这个截面上方部分去掉, 得到一个七面体, 则这个七面体内部能容纳的最大的球半径是_____.



【答案】 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】如图, 七面体为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $B_1-BA_1C_1$ 的图形, 由正方体的结构特征可得这个七面体内部能容纳的球最大时, 该球与三个正方形面和等边三角形面相切, 且球心在体对角线 B_1D

上, 以点 D 为原点建立空间直角坐标系, 设球心 $O(a, a, a) \left(0 < a \leq \frac{1}{2}\right)$, 利用向量法求出球心 O 到平面

BA_1C_1 的距离进而可得出答案.

【详解】如图, 七面体为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $B_1-BA_1C_1$ 的图形,

由正方体的结构特征可得这个七面体内部能容纳的球最大时,

该球与三个正方形面和等边三角形面相切, 且球心在体对角线 B_1D 上,

如图, 以点 D 为原点建立空间直角坐标系,

则 $B(1, 1, 0), A_1(1, 0, 1), C_1(0, 1, 1)$,

设球心 $O(a, a, a) \left(0 < a \leq \frac{1}{2}\right)$,

故 $\overrightarrow{BA_1} = (0, -1, 1), \overrightarrow{BC_1} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{OB} = (1-a, 1-a, -a)$,

设平面 BA_1C_1 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

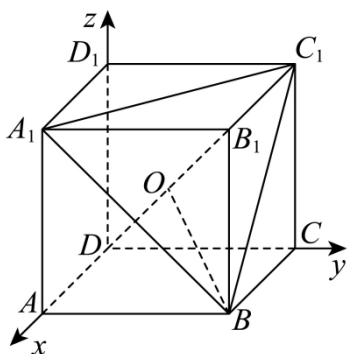
则有 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BA_1} = -y + z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BC_1} = -x + z = 0 \end{cases}$, 可取 $\vec{n} = (1, 1, 1)$,

则球心 O 到平面 BA_1C_1 的距离为 $\frac{|\vec{OB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|1-a+1-a-a|}{\sqrt{3}} = \frac{2-3a}{\sqrt{3}}$,

因为球 O 与三个正方形面和等边三角形面相切,

所以 $\frac{2-3a}{\sqrt{3}} = a$, 解得 $a = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$,

所以这个七面体内部能容纳的最大的球半径是 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$.



故答案为: $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】方法点睛: 求点 A 到平面 BCD 的距离, 方法如下:

(1) 等体积法: 先计算出四面体 $ABCD$ 的体积, 然后计算出 $\triangle BCD$ 的面积, 利用锥体的体积公式可计算出点 A 到平面 BCD 的距离;

(2) 空间向量法: 先计算出平面 BCD 的一个法向量 $\vec{n}$ 的坐标, 进而可得出点 A 到平面 BCD 的距离为

$$d = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知函数 $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 的平行于 x 轴的切线的切点横坐标;

(2) 证明曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴恰有两个交点.

【答案】(1) $\left(-1, \frac{5}{e}\right), (2, -e^2)$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/398111016026006063>