计算-公式类计算-平方和公式-5 星题

课程目标

知识点	考试要求	具体要求	考察频率
平方和公式	B	1.熟悉平方和公式 2.运用公式进行复杂的计算。	少考

知识提要

平方和公式

- 平方和公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

精选例题

平方和公式

1. $24\times\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{20\times21}\right)-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+10^2}\right)=$ _____.

【答案】 $\frac{60}{11}$

【分析】 虽然很容易看出 $\frac{3}{7}=\frac{1}{3}$，$\frac{10}{21}=\frac{75}{2}\cdots\cdots$ 可是再仔细一看，并没有什么效果，因为这不象分数裂项那样能消去很多项．我们再来看后面的式子，每一项的分母容易让我们想到公式 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}\times n\times(n+1)\times(2n+1)$，

于是我们又有 $\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\frac{6}{n\times(n+1)\times(2n+1)}$.

减号前面括号里的式子有 10 项，减号后面括号里的式子也恰好有 10 项，是不是“一个对一个”呢？

$$
\begin{aligned}
&24\times\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{20\times21}\right)-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+10^2}\right)\\
&=24\times\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{20\times21}\right)-6\times\left(\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times5}+\cdots+\frac{1}{10\times11\times21}\right)\\
&=24\times\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{20\times21}\right)-24\times\left(\frac{1}{2\times4\times3}+\frac{1}{4\times6\times5}+\cdots+\frac{1}{20\times22\times21}\right)\\
&=24\times\left[\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{2\times4\times3}\right)+\left(\frac{1}{4\times5}-\frac{1}{4\times6\times5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20\times21}-\frac{1}{20\times22\times21}\right)\right]\\
&=24\times\left(\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{20\times22}\right)\\
&=6\times\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{10\times11}\right)\\
&=6\times\left(1-\frac{1}{11}\right)\\
&=\frac{60}{11}
\end{aligned}
$$

2. 计算：$11\times29+12\times28+\cdots+19\times21=$ _____.

【答案】 3315

【分析】

$$
\begin{aligned}
\text{原式}\ &=(20^2-9^2)+(20^2-8\\
&=20^2\times9-(1^2+2^2+\\
&=3600-\frac{1}{6}\times9\times10\times\\
&=3315.
\end{aligned}
$$

3. 计算：$1\times3+2\times4+3\times5+\cdots9\times11=$ _____.

【答案】 375

【分析】

原式 $=(2-1)(2+1)+(3-1)(3+1)+\cdots+(10$
$=(2^2-1)+(3^2-1)+\cdots+(10^2-1)$
$=(2^2+3^2+\cdots+10^2)-9$
$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)-10$
$=\dfrac{10\times11\times21}{6}-10$
$=375.$

4. $1^2+3^2+5^2+\cdots+19^2=$ _____.

【答案】 2185

【分析】
$$\begin{aligned}&1^2+3^2+5^2+\cdots+19^2\\=\ &(1^2+2^2+3^2+\cdots+19^2)-(2^2+4^2+\cdots+18^2)\\=\ &\tfrac{1}{6}\times19\times20\times39-4\times(1^2+2^2+\cdots+9^2)\\=\ &2470-\tfrac{1}{6}\times9\times10\times19\\=\ &2470-285\\=\ &2185.\end{aligned}$$

5. 对自然数 a 和 n，规定 $a\nabla n=a^n+a^{n-1}$，例如 $3\nabla2=3^2+3=12$，那么：

（1）$1\nabla2+2\nabla2+3\nabla2+\cdots+99\nabla2=$ _____；

（2）$2\nabla1+2\nabla2+2\nabla3+\cdots+2\nabla99=$ _____.

【答案】 （1）333300；（2）$3\times2^{99}-3$

【分析】 （1）

原式 $=1^2+1+2^2+2+3^2+3+\cdots+99^2+99$
$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+99^2)+(1+2+3+\cdots+99)$
$=99\times100\times199\div6+4950$
$=328350+4950$
$=333300;$

（2）

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= 2^1+2^0+2^2+2^1+2^3+2^2+\cdots+2^{99}+2^{98}\\
&=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{98})+(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{99})\\
&=(2^0+2^1+2^2+\cdots 2^{98})\times 3\\
&=(2^{99}-1)\times 3\\
&=3\times 2^{99}-3.
\end{aligned}
$$

6. 计算：$1\times 4+3\times 7+5\times 10+\cdots+99\times 151=$ _____.

【答案】 256225

【分析】 观察可知式子中每一项乘积的被乘数与乘数依次成等差数列，被乘数依次为 1，3，5，$\cdots$，99，乘数依次为 4，7，10，$\cdots$，151，根据等差数列的相关知识，被乘数可以表示为 $2n-1$，乘数可以表示为 $3n+1$，所以通项公式为 $(2n-1)\times(3n+1)=6n^2-n-1$．所以，

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (6\times 1^2-1-1)+(6\times 2^2-2-1)+\cdots+(6\times 50^2\\
&=6\times(1^2+2^2+\cdots+50^2)-(1+2+\cdots+50)-50\\
&=50\times 51\times 101-\frac{1}{2}\times 50\times 51-50\\
&=256225.
\end{aligned}
$$

另解：如果不进行通项归纳，由于式子中每一项的被乘数与乘数的差是不相等，可以先将这个差变为相等再进行计算．

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{6}\times(3\times 8+9\times 14+15\times 20+\cdots+297\times 302)\\
&= \frac{1}{6}\times\\
&\quad [3\times(3+5)+9\times(9+5)+15\times(15+5)+\cdots+297\times(29\\
&= \frac{1}{6}\times\\
&\quad (3^2+3\times 5+9^2+9\times 5+15^2+15\times 5+\cdots+297^2+297\\
&= \frac{1}{6}\times\\
&\quad [(3^2+9^2+15^2+\cdots+297^2)+5\times(3+9+15+\cdots+297)\\
&= \frac{1}{6}\times\\
&\quad [9\times(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2)+5\times 3\times(1+3+5+\cdots+9\\
&= \frac{3}{2}\times(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2)+\frac{5}{2}\times(1+3+5+\cdots+99).
\end{aligned}
$$

而 $1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2$ 和 $1+3+5+\cdots+99$ 都是我们非常熟悉的.

$$\begin{aligned}&1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2\\=\ &(1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2)-(2^2+4^2+\\=\ &\frac{1}{6}\times100\times101\times201-4\times\frac{1}{6}\times50\times51;\\=\ &\frac{1}{6}\times100\times101\times(201-102)\\=\ &\frac{1}{6}\times99\times100\times101\\=\ &166650,\end{aligned}$$

$1+3+5+\cdots+99=50^2=2500$,

所以

$$\text{原式}=\frac{3}{2}\times16665$$

小结：从上面的计算过程中可以看出，

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2$$

而

$$1\times2+2\times3+\cdots+99\times100=\frac{1}{3}$$

所以有

$$(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2)\times2=1\times2+2\times3+$$

计算-公式类计算-平方和公式-0 星题

课程目标

知识点	考试要求	具体要求	考察频率
平方和公式	B	1.熟悉平方和公式 2.运用公式进行复杂的计算。	少考

知识提要

平方和公式

- 平方和公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

精选例题

平方和公式

1. 计算：$36+49+64+81+\cdots+400$ =_____.

【答案】 2815

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=6^2+7^2+8^2+\cdots+20^2\\&=1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2-(1^2+2^2\\&=20\times21\times41\div6-5\times6\times11\div6\\&=2870-55\\&=2815.\end{aligned}$$

2. 计算：$10^2+12^2+14^2+\cdots+50^2$ =_____.

【答案】 21980

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(2^2+4^2+6^2+\cdots+50^2)-(2^2+4^2\\&=2^2\times(1^2+2^2+\cdots+25^2)-2^2\times(1^2\\&=4\times51\times25\times26\div6-4\times30\\&=21980.\end{aligned}$$

3. 计算：$11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2=$ _____.

【答案】 2485

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(1^2+2^2+\cdots+20^2)-(1^2+2^2+\cdots+10^2)\\&=41\times21\times20\div6-21\times10\times11\div6\\&=2485.\end{aligned}$$

4. $337\times\square^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+337^2$，则 $\square=$ _____.

【答案】 195

【分析】 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

因为 $1^2+2^2+\cdots+337^2=\frac{1}{6}\times337\times338\times675$

所以 $\square^2=\frac{1}{6}\times338\times675=195^2$

故 $\square=195$.

5. 计算：$20^2+21^2+22^2+\cdots+100^2$ =_____.

【答案】 335880

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2-(1^2+2^2+\\&=100\times101\times201\div6-19\times20\times39\cdot\\&=338350-2470\\&=335880.\end{aligned}$$

6. 计算：$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$ =_____.

【答案】 385

【分析】

原式

7. 计算：$1^2+2^2+3^2+\cdots+99^2=$ _____.

【答案】 328350

【分析】

原式

8. 计算：$1^2+3^2+5^2+\cdots+19^2=$ _____.

【答案】 1330

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=1^2+3^2+5^2+\cdots+19^2\\&=(1^2+2^2+3^2+\cdots+19^2)-(2^2+4^2+\cdots+18^2)\\&=19\times20\times39\div6-4\times(1^2+2^2+\cdots+9^2)\\&=2470-9\times10\times19\times4\div6\\&=2470-285\times4\\&=1330.\end{aligned}$$

9. 计算：$9^2+10^2+11^2+\cdots+20^2=$ _____.

【答案】 2666

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(1^2+2^2+\cdots+20^2)-\\&=41\times21\times20\div6-17\\&=2666.\end{aligned}$$

10. 计算：$2^2+4^2+6^2+\cdots+50^2$ =_____.

【答案】 22100

【分析】

原式 $=2^2\times$
$=4\times$
$=221$

11.
$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+6\times7+7\times8+8\times9+9\times10=$ _____.

【答案】 330

【分析】 本题项数较少，可以直接将每一项乘积都计算出来再计算它们的和，但是对于项数较多的情况显然不能这样进行计算．对于项数较多的情况，可以进行如下变形：

$$n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)}{3}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{3}(n-1)n(n+$$

所以原式

$$=\frac{1}{3}\times1\times2\times3+\left(\frac{1}{3}\times2\times3\times4-\frac{1}{3}\times1\times2\times3\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{3}\times9\times10\times11-\frac{1}{3}\times8\times9\times10\right)=\frac{1}{3}\times9\times10\times11=330$$

另解：由于 $n(n+1)=n^2+n$，所以

原式

$$=(1^2+1)+(2^2+2)+\cdots+(9^2+9)=(1^2+2^2+\cdots+9^2)+(1+2+\cdots+9)$$
$$=\frac{1}{6}\times9\times10\times19+\frac{1}{2}\times9\times10=330$$

采用此种方法也可以得到

$$1\times2+2\times3+\cdots+n\times(n+1)$$

12. 计算：$1^2+2^2+4^2+5^2+7^2+8^2+10^2+11^2+13^2+14^2+16^2$ =_____.

【答案】 1001

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(1^2+2^2+\cdots+16^2)-(3^2+6^2+9^2+12^2+15^2)\\&=(1^2+2^2+\cdots+16^2)-3^2\times(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)\\&=1496-495\\&=1001.\end{aligned}$$

13. 计算：$5^2+6^2+7^2+\cdots+30^2=$ _____.

【答案】 9425

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(1^2+2^2+3^2+\cdots+29^2+30^2)-(1^2+\\&=\frac{30\times31\times61}{6}-30\\&=9455-30\\&=9425.\end{aligned}$$

14. $1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots37^2=$ _____.

【答案】 9139

【分析】 因为

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n-1)^2+(2n)^2=\frac{2n(2n}$$

$$\begin{aligned}2^2+4^2+\cdots+(2n)^2&=4\times(1^2+2^2+\cdots+n^2)\\&=4\times\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

所以

$$1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2+2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2n(2n+}$$

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2$$

当 $n=19$ 时，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\tfrac{1}{3}\times 19\times(4\times 19^2-1)\\&=9139.\end{aligned}$$

15. 计算：$11\times 29+12\times 28+\cdots+19\times 21=$ _____.

【答案】 3315

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(20^2-9^2)+(20^2-8\\&=20^2\times 9-(1^2+2^2+\\&=3600-\frac{1}{6}\times 9\times 10\times\\&=3315.\end{aligned}$$

16. $1^2+3^2+5^2+\cdots+19^2=$ _____.

【答案】 2185

【分析】

$$\begin{aligned}&1^2+3^2+5^2+\cdots+19^2\\=\ &(1^2+2^2+3^2+\cdots+19^2)-(2^2+4^2+\cdots+18^2)\\=\ &\tfrac{1}{6}\times 19\times 20\times 39-4\times(1^2+2^2+\cdots+9^2)\\=\ &2470-\tfrac{1}{6}\times 9\times 10\times 19\\=\ &2470-285\\=\ &2185.\end{aligned}$$

17. $1\times 1+2\times 3+3\times 5+4\times 7+\cdots+99\times 197=$ _____.

【答案】 651750

【分析】 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)=\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

原式 $=1^2+2^2+3^2+\cdots+99^2+1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+98\times99$

$=\frac{1}{6}\times99\times100\times199+\frac{1}{3}\times98\times99\times100$

$=328350+323400$

$=651750$

18. 规定 $a\triangle b=a\times(a+2)-(a+1)-b$，计算：$(2\triangle1)+\cdots+(11\triangle10)=$_____.

【答案】 505

【分析】 这个题目直接套用定义给的公式非常麻烦，需要套用 10 次，然后再求和．但是我们注意到要求的 10 项值有一个共同的特点就是在要我们求得这个式子中 $b=a-1$，所以，我们不妨把 $b=a-1$ 代入原定义．

$$a\triangle l$$

就变成了

$$a\triangle b=a\times(a+2)-$$

所以 $2\triangle1=2^2$，$3\triangle2=3^2$，$\cdots$，$3\triangle2=11^2$，则

原式

19. 已知正整数 A 分解质因数可以写成 $A=2^{\alpha}\times3^{\beta}\times5^{\gamma}$，其中 α,β,γ 是自然数．如果 A 的二分之一是完全平方数，A 的三分之一是完全立方数，A 的五分之一是某个自然数的五次方，那么 $\alpha+\beta+\gamma$ 的最小值是_____.

【答案】 31

【分析】 A 的二分之一是完全平方数，$\alpha-1,\beta,\gamma$ 是 2 的倍数；A 的三分之一是完全立方数，$\alpha,\beta-1,\gamma$ 是 3 的倍数；A 的五分之一是某个自然数的五次方，$\alpha,\beta,\gamma-1$ 是 5 的倍

数；要 $\alpha+\beta+\gamma$ 的值最小，分别求满足条件的 α,β,γ 值：$3\times5-1$ 是 2 的倍数，α 的最小值为 15，$2\times3-1$ 是 5 的倍数，γ 的最小值为 6，$2\times5-1$ 是 3 的倍数，β 的最小值为 10，所以 $\alpha+\beta+\gamma$ 的最小值是：$15+6+10=31$.

20. 计算：$1\times2^2+2\times3^2+3\times4^2+\cdots+18\times19^2+19\times20^2$ =_____.

【答案】 41230

【分析】 分拆（$2-1$）$\times2^2=2^3-2^2$，（$3-1$）$\times3^2=3^3-3^2$，…，再用公式，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(2^3-2^2)+(3^3-3^2)+\cdots+(20^3-20^2)\\&=(1+2^3+3^3+\cdots+20^3)-(1+2^2+3^2+\cdots+20^2)\\&=20^2\times21^2\div4-20\times21\times41\div6\\&=41230.\end{aligned}$$

21. 计算：$36+49+64+81+\cdots+400=$ _____.

【答案】 2815

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=6^2+7^2+8^2+\cdots+20^2\\&=1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)\\&=\frac{1}{6}\times20\times21\times41-\frac{1}{6}\times5\times6\times11\\&=2870-55\\&=2815.\end{aligned}$$

22. 计算：$1\times3+2\times4+3\times5+\cdots9\times11=$ _____.

【答案】 375

【分析】

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (2-1)(2+1)+(3-1)(3+1)+\cdots+(10 \\
&= (2^2-1)+(3^2-1)+\cdots+(10^2-1) \\
&= (2^2+3^2+\cdots+10^2)-9 \\
&= (1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)-10 \\
&= \frac{10\times 11\times 21}{6}-10 \\
&= 375.
\end{aligned}
$$

23. 计算：$10^2+11^2+12^2+\cdots+200^2=$ _____.

【答案】 2686415

【分析】 原式缺少前几项，可以先补上前几项，再减去前几项，再利用公式进行求解.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} = & (1^2+2^2+\cdots+9^2+10^2+11^2+12^2 \\
& (1^2+2^2+\cdots+9^2) \\
= & \frac{200\times(200+1)\times(400+1)}{6}-\frac{9\times 10}{6} \\
= & 2686700-285 \\
= & 2686415.
\end{aligned}
$$

24. $24\times\left(\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{20\times 21}\right)-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+10^2}\right)=$ _____.

【答案】 $\frac{60}{11}$

【分析】 虽然很容易看出 $\frac{3}{7}=\frac{1}{3}$，$\frac{10}{21}=\frac{75}{2}\cdots\cdots$ 可是再仔细一看，并没有什么效果，因为这不象分数裂项那样能消去很多项. 我们再来看后面的式子，每一项的分母容易让我们想到公式 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}\times n\times(n+1)\times(2n+1)$，

于是我们又有 $\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\frac{6}{n\times(n+1)\times(2n+1)}$.

减号前面括号里的式子有 10 项，减号后面括号里的式子也恰好有 10 项，是不是“一个对一个”呢？

$$
\begin{aligned}
&24\times\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{20\times21}\right)-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+10^2}\right)\\
&=24\times\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{20\times21}\right)-6\times\left(\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times5}+\cdots+\frac{1}{10\times11\times21}\right)\\
&=24\times\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{20\times21}\right)-24\times\left(\frac{1}{2\times4\times3}+\frac{1}{4\times6\times5}+\cdots+\frac{1}{20\times22\times21}\right)\\
&=24\times\left[\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{2\times4\times3}\right)+\left(\frac{1}{4\times5}-\frac{1}{4\times6\times5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20\times21}-\frac{1}{20\times22\times21}\right)\right]\\
&=24\times\left(\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{20\times22}\right)\\
&=6\times\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{10\times11}\right)\\
&=6\times\left(1-\frac{1}{11}\right)\\
&=\frac{60}{11}
\end{aligned}
$$

25. 计算：$1\times4+3\times7+5\times10+\cdots+99\times151=$ _____.

【答案】 256225

【分析】 观察可知式子中每一项乘积的被乘数与乘数依次成等差数列，被乘数依次为 1，3，5，$\cdots$，99，乘数依次为 4，7，10，$\cdots$，151，根据等差数列的相关知识，被乘数可以表示为 $2n-1$，乘数可以表示为 $3n+1$，所以通项公式为 $(2n-1)\times(3n+1)=6n^2-n-1$．所以，

$$
\begin{aligned}
\text{原式}\ &=(6\times1^2-1-1)+(6\times2^2-2-1)+\cdots+(6\times50^2\\
&=6\times(1^2+2^2+\cdots+50^2)-(1+2+\cdots+50)-50\\
&=50\times51\times101-\frac{1}{2}\times50\times51-50\\
&=256225.
\end{aligned}
$$

另解：如果不进行通项归纳，由于式子中每一项的被乘数与乘数的差是不相等，可以先将这个差变为相等再进行计算.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{6}\times(3\times 8+9\times 14+15\times 20+\cdots+297\times 302)\\
&= \frac{1}{6}\times\\
&\quad [3\times(3+5)+9\times(9+5)+15\times(15+5)+\cdots+297\times(29\\
&= \frac{1}{6}\times\\
&\quad (3^2+3\times 5+9^2+9\times 5+15^2+15\times 5+\cdots+297^2+297\\
&= \frac{1}{6}\times\\
&\quad [(3^2+9^2+15^2+\cdots+297^2)+5\times(3+9+15+\cdots+297)\\
&= \frac{1}{6}\times\\
&\quad [9\times(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2)+5\times 3\times(1+3+5+\cdots+9\\
&= \frac{3}{2}\times(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2)+\frac{5}{2}\times(1+3+5+\cdots+99).
\end{aligned}
$$

而 $1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2$ 和 $1+3+5+\cdots+99$ 都是我们非常熟悉的.

$$
\begin{aligned}
&1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2\\
=\ &(1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2)-(2^2+4^2+\\
=\ &\frac{1}{6}\times 100\times 101\times 201-4\times\frac{1}{6}\times 50\times 51\\
=\ &\frac{1}{6}\times 100\times 101\times(201-102)\\
=\ &\frac{1}{6}\times 99\times 100\times 101\\
=\ &166650,
\end{aligned}
$$

$1+3+5+\cdots+99=50^2=2500$,

所以

$$\text{原式}=\frac{3}{2}\times 16665$$

小结：从上面的计算过程中可以看出，

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2$$

而

$$1\times 2+2\times 3+\cdots+99\times 100=\frac{1}{3}$$

所以有

$$(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2)\times 2=1\times 2+2\times 3+$$

26. 对自然数 a 和 n，规定 $a\nabla n=a^n+a^{n-1}$，例如 $3\nabla 2=3^2+3=12$，那么：

（1）$1\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\cdots+99\sqrt{2}=$ _____；

（2）$2\sqrt{1}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\cdots+2\sqrt{99}=$ _____.

【答案】 （1）333300；（2）$3\times 2^{99}-3$

【分析】 （1）

$$\begin{aligned}\text{原式}&=1^2+1+2^2+2+3^2+3+\cdots+99^2+99\\&=(1^2+2^2+3^2+\cdots+99^2)+(1+2+3+\cdots+99)\\&=99\times 100\times 199\div 6+4950\\&=328350+4950\\&=333300;\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2^1+2^0+2^2+2^1+2^3+2^2+\cdots+2^{99}+2^{98}\\&=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{98})+(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{99})\\&=(2^0+2^1+2^2+\cdots 2^{98})\times 3\\&=(2^{99}-1)\times 3\\&=3\times 2^{99}-3.\end{aligned}$$

27. 围棋棋盘是由 19 条横线和 19 条竖线组成的正方形方阵，其中有多少个正方形呢？

【答案】 2109 个

【分析】 简答：按正方形的大小分类，共有 $18^2+17^2+\cdots+1^2=2109$ 个.

28. $1^2+2^2+3^2+\cdots+2001^2+2002^2$ 除以 7 的余数是多少？

【答案】 0

【分析】 由于

$$\begin{aligned}&=\frac{1^2+2^2+}{2002\times 2}\\&=1001\times 2\end{aligned}$$

而 1001 是 7 的倍数，所以这个乘积也是 7 的倍数，故

$1^2+2^2+3^2+\cdots+2001^2+2002^2$ 除以 7 的余数是 0；

29. 试求 $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+\cdots+99\times100$.

【答案】 333300

【分析】 方法一：整数裂项

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= (1\times2\times3+2\times3\times3+3\times4\times3+4\times5\times3+5\times6\times3+\\
&\quad\cdots+99\times100\times3)\div3\\
&= [1\times2\times3+2\times3\times(4-1)+3\times4\times(5-2)+4\times5\times(6-3)\\
&\quad+5\times6\times(7-4)+\cdots+99\times100\times(101-98)]\div\div3\\
&= (1\times2\times3+2\times3\times4-1\times2\times3+3\times4\times5-2\times3\times4+4\times\\
&\quad-3\times4\times5+5\times6\times7-4\times5\times6+\cdots+99\times100\times101-\\
&\quad98\times99\times100)\div3\\
&= 99\times100\times101\div3\\
&= 33\times101\times100\\
&= 3333\times100\\
&= 333300.
\end{aligned}$$

方法二：利用平方和公式

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=n^2=\frac{n\times(n\cdot}{}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 1^2+1+2^2+2+3^2+3+4^2+4+5^2+5+\cdots+99^2\cdot\\
&= 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots+99^2+1+2+3+4+5\cdot\\
&= \frac{99\times100\times199}{6}+\frac{99\times100}{2}\\
&= 328350+4950\\
&= 333300.
\end{aligned}$$

30. 我们知道：$9=3\times3$，$16=4\times4$，这里，9、16 叫做“完全平方数”，在前 300 个自然数中，去掉所存的“完全平方数”，剩下的自然数的和是多少？.

【答案】 43365

【分析】 不超过 300 的完全平方数，有 1、4、9、16、25、36、49、64、81、100、121、144、169、196、225、256、289，它们的和是 $1^2+2^2+3^2+\cdots+17^2=\frac{17\times18\times35}{6}=1785$.前

300 个自然数的和是：$1+2+3+\cdots+300=45150$，于是剩下的自然数的和

$45150-1785=43365$.

31. 看规律 $1^3=1^2$，$1^3+2^3=3^2$，$1^3+2^3+3^3=6^2\cdots$，试求 $6^3+7^3+\cdots+14^3$.

【答案】 10800

【分析】
$$\begin{aligned}\text{原式}&=(1^3+2^3+\cdots+14^3)-(1^3+2^3+\cdots+5^3)\\&=(1+2+3+\cdots+14)^2-(1+2+3+4+5)^2\\&=105^2-15^2\\&=(105-15)(105+15)\\&=90\times120\\&=10800.\end{aligned}$$

32. 计算下列式子的值：

$$24\times(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{20\times21})-(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2+2^2}+\cdots\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+10^2})$$

【答案】 $\frac{60}{11}$

【分析】 虽然很容易看出 $\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\cdots\cdots$ 可是再仔细一看，并没有什么效果，因为这不像分数裂项那样能消去很多项. 我们再来看后面的式子，每一项的分母容易让我们想到公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}\times n\times$$

于是我们又有

$$\frac{1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$$

减号前面括号里的式子有 10 项，减号后面括号里的式子也恰好有 10 项

$$
\begin{aligned}
&24\times\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{20\times21}\right)-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+1}\right.\\
=\ &24\times\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{20\times21}\right)-\\
&6\times\left(\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times5}+\cdots+\frac{1}{10\times11\times12}\right)\\
=\ &24\times\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{20\times21}\right)-\\
&24\times\left(\frac{1}{2\times4\times3}+\frac{1}{4\times6\times5}+\cdots+\frac{1}{20\times22\times21}\right)\\
=\ &24\times\left[\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{2\times4\times3}\right)+\left(\frac{1}{4\times5}-\frac{1}{4\times6\times5}\right)+\right.\\
&\left.\cdots+\left(\frac{1}{20\times21}-\frac{1}{20\times22\times21}\right)\right]\\
=\ &24\times\left(\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{20\times22}\right)\\
=\ &6\times\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{10\times11}\right)\\
=\ &6\times\left(1-\frac{1}{11}\right)\\
=\ &\frac{60}{11}
\end{aligned}
$$

计算-公式类计算-平方和公式-1 星题

课程目标

知识点	考试要求	具体要求	考察频率
平方和公式	B	1.熟悉平方和公式 2.运用公式进行复杂的计算。	少考

知识提要

平方和公式

- 平方和公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

精选例题

平方和公式

1. 计算：$20^2+21^2+22^2+\cdots+100^2$ =_____.

【答案】 335880

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2-(1^2+2^2+\\&=100\times101\times201\div6-19\times20\times39\cdot\\&=338350-2470\\&=335880.\end{aligned}$$

2. 计算：$2^2+4^2+6^2+\cdots+50^2$ =_____.

【答案】 22100

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2^2\times\\&=4\times\\&=221(\end{aligned}$$

3. 计算：$1^2+2^2+3^2+\cdots+99^2=$ _____.

【答案】 328350

【分析】

原

4. 计算：$36+49+64+81+\cdots+400$ =_____.

【答案】 2815

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=6^2+7^2+8^2+\cdots+20^2\\&=1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2-(1^2+2^2\\&=20\times21\times41\div6-5\times6\times11\div6\\&=2870-55\\&=2815.\end{aligned}$$

5. 计算：$9^2+10^2+11^2+\cdots+20^2$ =_____.

【答案】 2666

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(1^2+2^2+\cdots+20^2)-\\&=41\times21\times20\div6-17\\&=2666.\end{aligned}$$

6. $337\times\square^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+337^2$，则 $\square=$ _____.

【答案】 195

【分析】 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

因为 $1^2+2^2+\cdots+337^2=\frac{1}{6}\times337\times338\times675$

所以 $\square^2=\frac{1}{6}\times338\times675=195^2$

故 $\square=195$.

7. 计算：$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$ =_____.

【答案】 385

【分析】

原式

8. 计算：$5^2+6^2+7^2+\cdots+30^2=$ _____.

【答案】 9425

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(1^2+2^2+3^2+\cdots+29^2+30^2)-(1^2+\\&=\frac{30\times31\times61}{6}-30\\&=9455-30\\&=9425.\end{aligned}$$

9. 计算：$10^2+11^2+12^2+\cdots+200^2=$ _____.

【答案】 2686415

【分析】 原式缺少前几项，可以先补上前几项，再减去前几项，再利用公式进行求解.

$$\begin{aligned}\text{原式}=&\ (1^2+2^2+\cdots+9^2+10^2+11^2+12^2\\&\ (1^2+2^2+\cdots+9^2)\\=&\ \frac{200\times(200+1)\times(400+1)}{6}-\frac{9\times10}{6}\\=&\ 2686700-285\\=&\ 2686415.\end{aligned}$$

10. 计算：$10^2+12^2+14^2+\cdots+50^2$ =_____.

【答案】 21980

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (2^2+4^2+6^2+\cdots+50^2)-(2^2+4^2\cdot\\ &= 2^2\times(1^2+2^2+\cdots+25^2)-2^2\times(1^2\cdot\\ &= 4\times 51\times 25\times 26\div 6-4\times 30\\ &= 21980.\end{aligned}$$

11. 围棋棋盘是由 19 条横线和 19 条竖线组成的正方形方阵，其中有多少个正方形呢？

【答案】 2109 个

【分析】 简答：按正方形的大小分类，共有 $18^2+17^2+\cdots+1^2=2109$ 个.

12. 我们知道：$9=3\times 3$，$16=4\times 4$，这里，9、16 叫做“完全平方数”，在前 300 个自然数中，去掉所存的“完全平方数”，剩下的自然数的和是多少？.

【答案】 43365

【分析】 不超过 300 的完全平方数，有 1、4、9、16、25、36、49、64、81、100、121、144、169、196、225、256、289，它们的和是 $1^2+2^2+3^2+\cdots+17^2=\frac{17\times 18\times 35}{6}=1785$.前 300 个自然数的和是：$1+2+3+\cdots+300=45150$，于是剩下的自然数的和 $45150-1785=43365$.

13. 试求 $1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5+5\times 6+\cdots+99\times 100$.

【答案】 333300

【分析】 方法一：整数裂项

$$
\begin{aligned}
\text{原式} = & (1\times2\times3+2\times3\times3+3\times4\times3+4\times5\times3+5\times6\times3+\\
& \cdots+99\times100\times3)\div3\\
= & [1\times2\times3+2\times3\times(4-1)+3\times4\times(5-2)+4\times5\times(6-3)\\
& +5\times6\times(7-4)+\cdots+99\times100\times(101-98)]\div\div3\\
= & (1\times2\times3+2\times3\times4-1\times2\times3+3\times4\times5-2\times3\times4+4\times\\
& -3\times4\times5+5\times6\times7-4\times5\times6+\cdots+99\times100\times101-\\
& 98\times99\times100)\div3\\
= & 99\times100\times101\div3\\
= & 33\times101\times100\\
= & 3333\times100\\
= & 333300.
\end{aligned}
$$

方法二：利用平方和公式

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=n^2=\frac{n\times(n\cdot}$$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} & =1^2+1+2^2+2+3^2+3+4^2+4+5^2+5+\cdots+99^2\cdot\\
& =1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots+99^2+1+2+3+4+5\cdot\\
& =\frac{99\times100\times199}{6}+\frac{99\times100}{2}\\
& =328350+4950\\
& =333300.
\end{aligned}
$$

14. $1^2+2^2+3^2+\cdots+2001^2+2002^2$ 除以 7 的余数是多少？

【答案】 0

【分析】 由于

$$
\begin{aligned}
& = \frac{1^2+2^2+}{2002\times2}\\
& = 1001\times2
\end{aligned}
$$

而 1001 是 7 的倍数，所以这个乘积也是 7 的倍数，故

$1^2+2^2+3^2+\cdots+2001^2+2002^2$ 除以 7 的余数是 0；

计算-公式类计算-平方和公式-2 星题

课程目标

知识点	考试要求	具体要求	考察频率
平方和公式	B	1.熟悉平方和公式 2.运用公式进行复杂的计算。	少考

知识提要

平方和公式

- 平方和公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

精选例题

平方和公式

1. 计算：$2^2+4^2+6^2+\cdots+50^2$ =_____.

【答案】 22100

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2^2\times\\&=4\times\\&=221(\end{aligned}$$

2. $337\times\square^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+337^2$，则 $\square=$ _____.

【答案】 195

【分析】 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

因为 $1^2+2^2+\cdots+337^2=\frac{1}{6}\times 337\times 338\times 675$

所以 $\square^2=\frac{1}{6}\times 338\times 675=195^2$

故 $\square=195$.

3. 计算：$36+49+64+81+\cdots+400=$_____.

【答案】 2815

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=6^2+7^2+8^2+\cdots+20^2\\&=1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2-(1^2+2^2\\&=20\times 21\times 41\div 6-5\times 6\times 11\div 6\\&=2870-55\\&=2815.\end{aligned}$$

4. 计算：$20^2+21^2+22^2+\cdots+100^2=$_____.

【答案】 335880

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2-(1^2+2^2+\\&=100\times 101\times 201\div 6-19\times 20\times 39\cdot\\&=338350-2470\\&=335880.\end{aligned}$$

5. 计算：$10^2+12^2+14^2+\cdots+50^2=$_____.

【答案】 21980

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (2^2+4^2+6^2+\cdots+50^2)-(2^2+4^2\cdot\\ &= 2^2\times(1^2+2^2+\cdots+25^2)-2^2\times(1^2\cdot\\ &= 4\times51\times25\times26\div6-4\times30\\ &= 21980.\end{aligned}$$

6. 计算：$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$ =_____.

【答案】 385

【分析】

原式

7. 计算：$5^2+6^2+7^2+\cdots+30^2=$ _____.

【答案】 9425

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (1^2+2^2+3^2+\cdots+29^2+30^2)-(1^2+\\ &= \frac{30\times31\times61}{6}-30\\ &= 9455-30\\ &= 9425.\end{aligned}$$

8. 计算：$1^2+2^2+4^2+5^2+7^2+8^2+10^2+11^2+13^2+14^2+16^2$ =_____.

【答案】 1001

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(1^2+2^2+\cdots+16^2)-(3^2+6^2+9^2+12^2+15^2)\\&=(1^2+2^2+\cdots+16^2)-3^2\times(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)\\&=1496-495\\&=1001.\end{aligned}$$

9. 计算：$10^2+11^2+12^2+\cdots+200^2=$ _____.

【答案】 2686415

【分析】 原式缺少前几项，可以先补上前几项，再减去前几项，再利用公式进行求解.

$$\begin{aligned}\text{原式}=&\ (1^2+2^2+\cdots+9^2+10^2+11^2+12^2\\&\ (1^2+2^2+\cdots+9^2)\\=&\ \frac{200\times(200+1)\times(400+1)}{6}-\frac{9\times10}{6}\\=&\ 2686700-285\\=&\ 2686415.\end{aligned}$$

10. 计算：$1^2+3^2+5^2+\cdots+19^2=$ _____.

【答案】 1330

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=1^2+3^2+5^2+\cdots+19^2\\&=(1^2+2^2+3^2+\cdots+19^2)-(2^2+4^2+\cdots+18^2)\\&=19\times20\times39\div6-4\times(1^2+2^2+\cdots+9^2)\\&=2470-9\times10\times19\times4\div6\\&=2470-285\times4\\&=1330.\end{aligned}$$

11. 计算：$1^2+2^2+3^2+\cdots+99^2=$ _____.

【答案】 328350

【分析】

原式

12. 计算：$11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2=$ _____.

【答案】 2485

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(1^2+2^2+\cdots+20^2)-(1^2+2^2+\cdots+10^2)\\&=41\times21\times20\div6-21\times10\times11\div6\\&=2485.\end{aligned}$$

13. 计算：$9^2+10^2+11^2+\cdots+20^2$ =_____.

【答案】 2666

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(1^2+2^2+\cdots+20^2)-\\&=41\times21\times20\div6-17\\&=2666.\end{aligned}$$

14.

$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+6\times7+7\times8+8\times9+9\times10=$ _____.

【答案】 330

【分析】 本题项数较少，可以直接将每一项乘积都计算出来再计算它们的和，但是对于项数较多的情况显然不能这样进行计算．对于项数较多的情况，可以进行如下变形：

$$n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)}{3}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{3}(n-1)n(n+$$

所以原式

$$=\frac{1}{3}\times 1\times 2\times 3+\left(\frac{1}{3}\times 2\times 3\times 4-\frac{1}{3}\times 1\times 2\times 3\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{3}\times 9\times 10\times 11-\frac{1}{3}\times 8\times 9\times 10\right)=\frac{1}{3}\times 9\times 10\times 11=330$$

另解：由于 $n(n+1)=n^2+n$，所以

原式

$$=(1^2+1)+(2^2+2)+\cdots+(9^2+9)=(1^2+2^2+\cdots+9^2)+(1+2+\cdots+9)$$
$$=\frac{1}{6}\times 9\times 10\times 19+\frac{1}{2}\times 9\times 10=330$$

采用此种方法也可以得到

$$1\times 2+2\times 3+\cdots+n\times(n+1)$$

15. 计算：$36+49+64+81+\cdots+400=$ _____.

【答案】 2815

【分析】

$$\begin{aligned}\text{原式}&=6^2+7^2+8^2+\cdots+20^2\\&=1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)\\&=\tfrac{1}{6}\times 20\times 21\times 41-\tfrac{1}{6}\times 5\times 6\times 11\\&=2870-55\\&=2815.\end{aligned}$$

16. 已知正整数 A 分解质因数可以写成 $A=2^{\alpha}\times 3^{\beta}\times 5^{\gamma}$，其中 α,β,γ 是自然数．如果 A 的二分之一是完全平方数，A 的三分之一是完全立方数，A 的五分之一是某个自然数的五次方，那么 $\alpha+\beta+\gamma$ 的最小值是_____.

【答案】 31

【分析】 A 的二分之一是完全平方数，$\alpha-1,\beta,\gamma$ 是 2 的倍数；A 的三分之一是完全立方数，$\alpha,\beta-1,\gamma$ 是 3 的倍数；A 的五分之一是某个自然数的五次方，$\alpha,\beta,\gamma-1$ 是 5 的倍

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/398127051120007036