第五章

数值积分

§1 引 言

一、数值积分的必要性

本章主要讨论如下形式的一元函数积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$

在微积分里，按**Newton-Leibniz公式**求定积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

要求被积函数 $F(x)$

- ☞ **有解析表达式；**
- ☞ $f(x)$**的原函数** $F(x)$ **为初等函数.**

实际问题

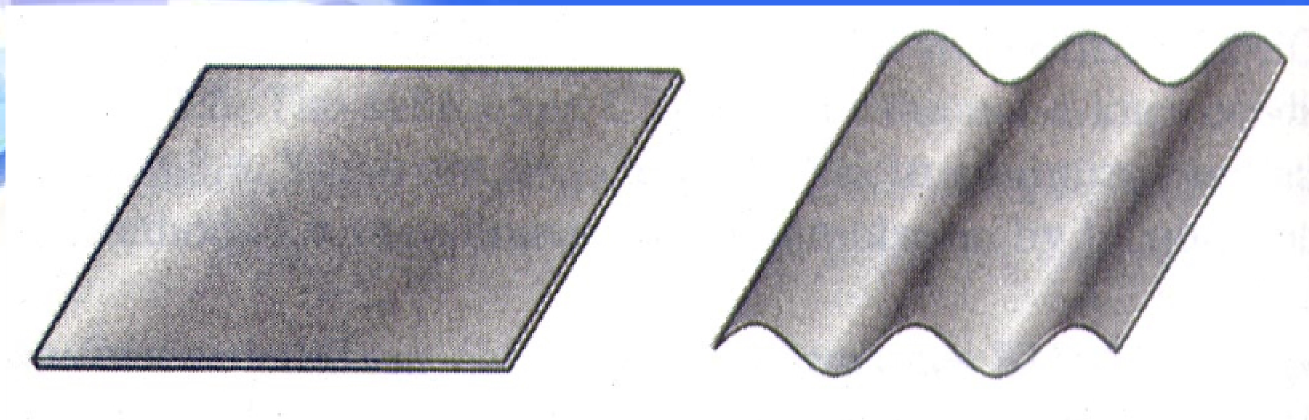
1. $f(x)$的原函数 $F(x)$不能用初等函数表示

例如函数:

$$\sin x^2, \cos x^2, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad \sqrt{1+x^3}, \quad e^{-x^2}$$

考虑一个实际问题:

建筑上用的一种铝制波纹瓦是用一种机器将一块平整的铝板压制而成的.



假若要求波纹瓦长4英尺，每个波纹的高度(从中心线)为1英寸，且每个波纹以近似 2π 英寸为一个周期. 求制做一块波纹瓦所需铝板的长度L.

这个问题就是要求由函数 $f(x)=\sin x$

给定的曲线, 从 $x=0$ 到 $x=48$英寸间的弧长L.

由微积分学我们知道,所求的弧长可表示为:

$$L=\int_0^{48}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_0^{48}\sqrt{1+(\cos x)^2}\,dx$$

上述积分称为**第二类椭圆积分**。

2. 有些被积函数其原函数虽然可以用初等函数表示成有限形式,但表达式相当复杂,计算极不方便.

例如函数:

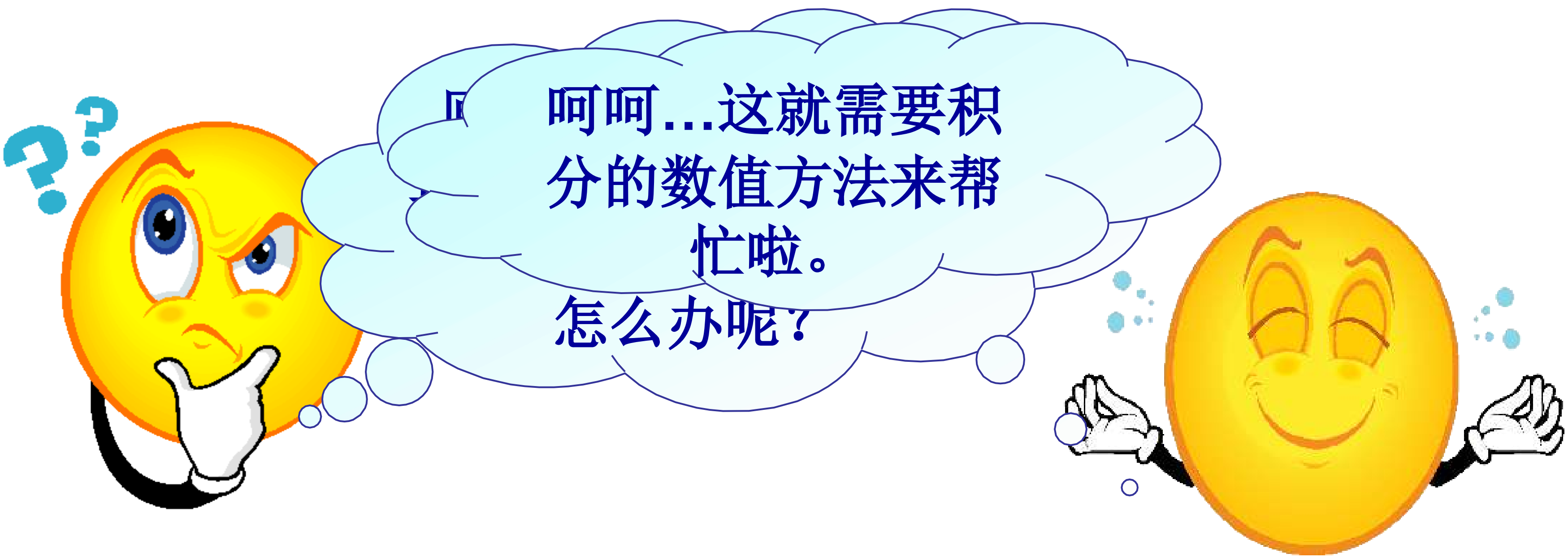
$$x^2\sqrt{2x^2+3}$$

并不复杂, 但它的原函数却十分复杂:

$$\frac{1}{4}x^2\sqrt{2x^2+3}+\frac{3}{16}x\sqrt{2x^2+3}-\frac{9}{16\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\,x+\sqrt{2x^2+3})$$

3. $f(x)$没有解析表达式，只有数表形式:

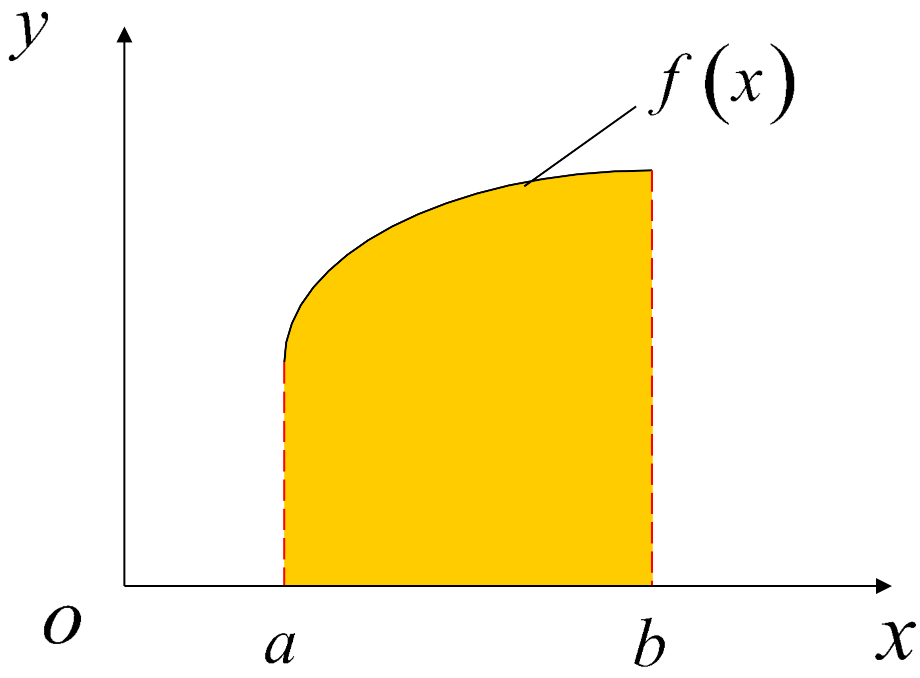
x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	4.5	6	8	8.5



二、数值积分的基本思想

1、定积分的几何意义

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$



2、数值积分的理论依据

依据积分中值定理，对于连续函数$f(x)$，在$[a,b]$内存在一点 ξ ,使得

$f(\xi)=?$

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$$

称$f(\xi)$为区间$[a,b]$的平均高度.

3、求积公式的构造

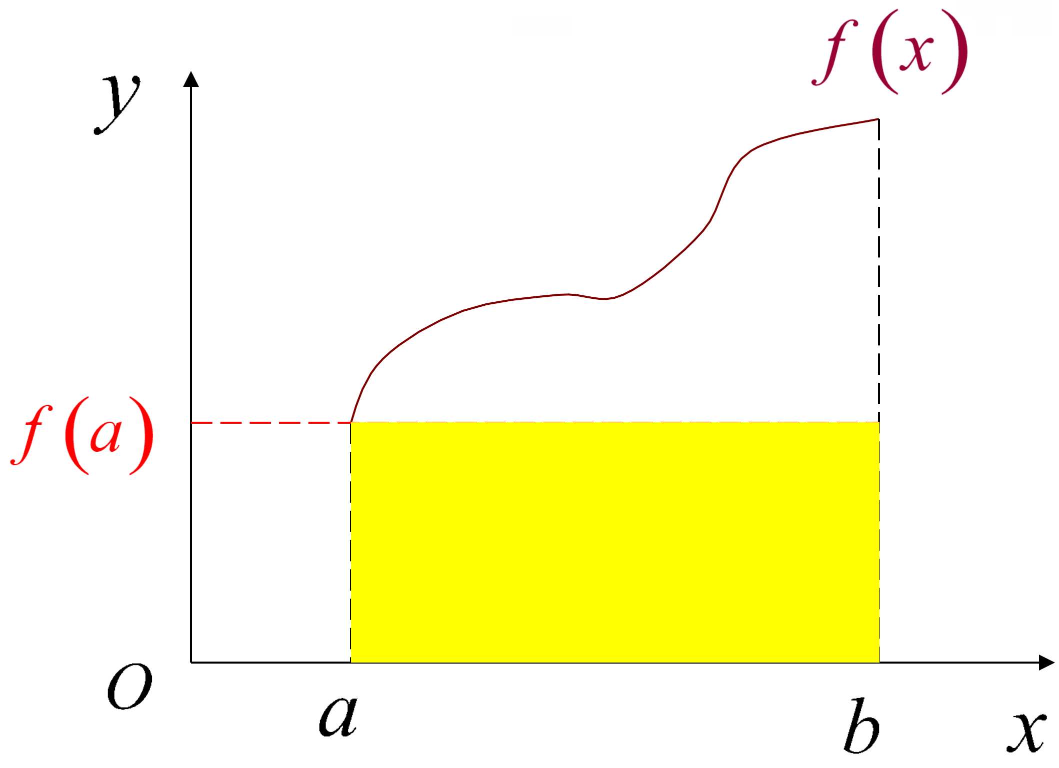
➢ 若简单选取区间端点或中点的函数值作为平均高度，则可得一点求积公式如下：

左矩形公式： $$I(f) \approx f(a)(b-a)$$

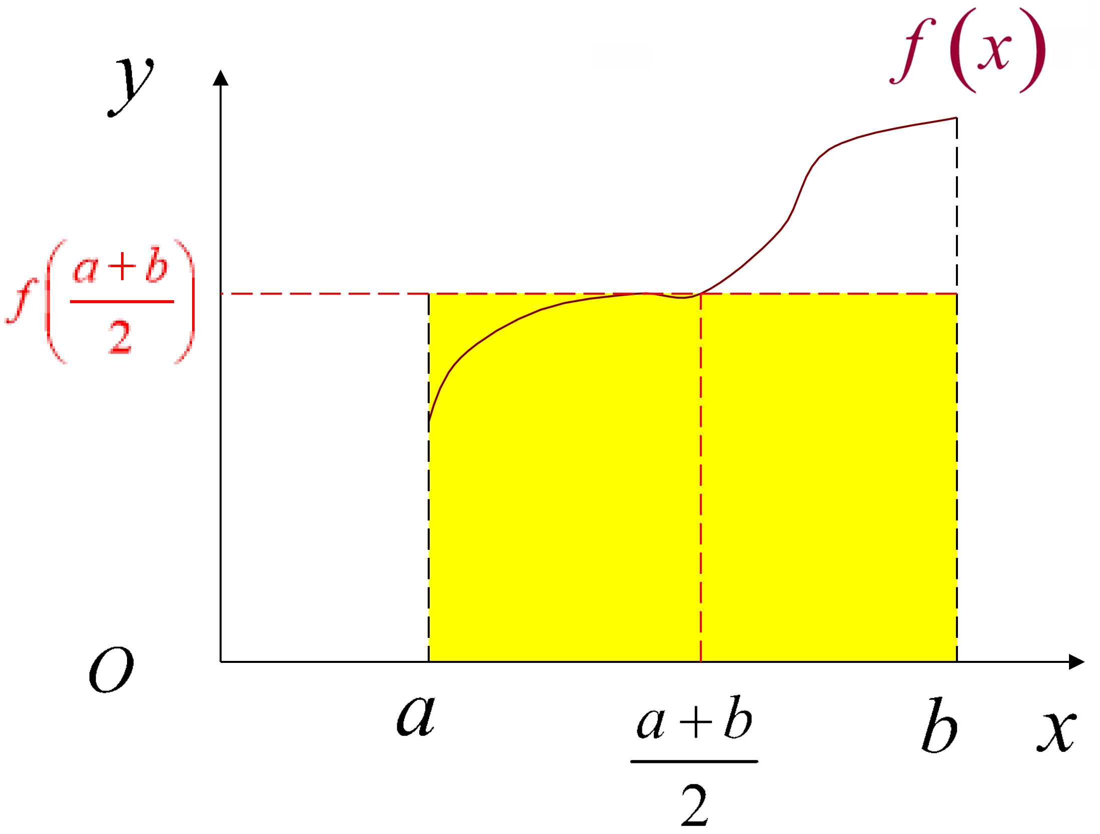
中矩形公式： $$I(f) \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

右矩形公式： $$I(f) \approx f(b)(b-a)$$

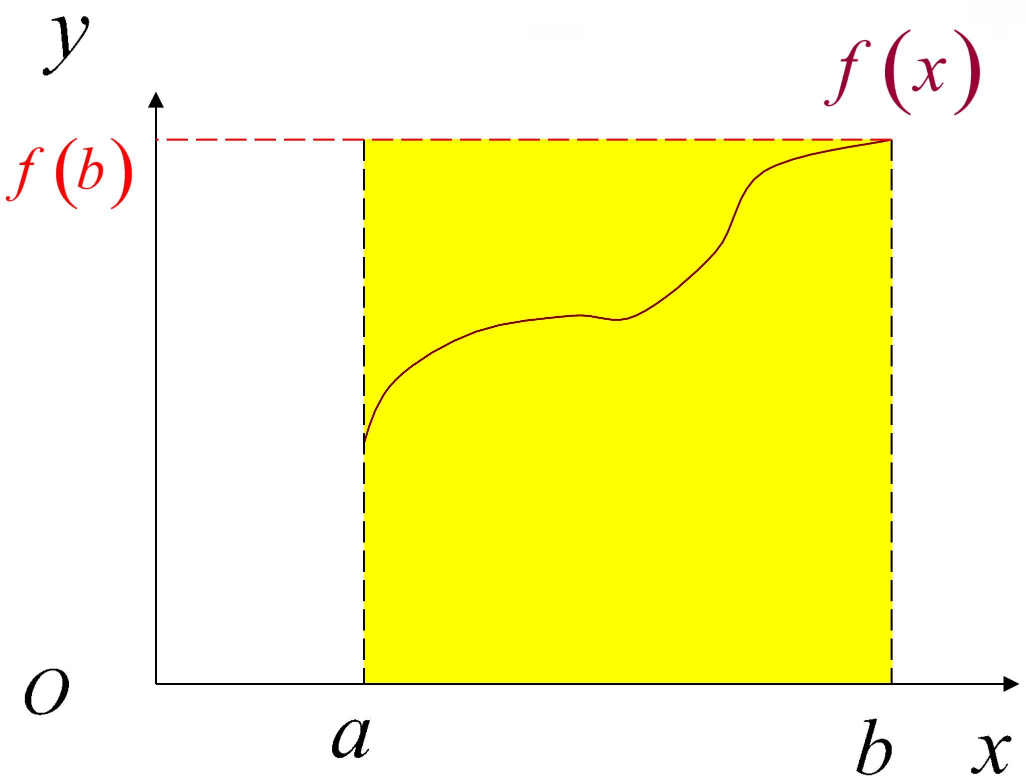
左矩形公式: $I(f) \approx f(a)(b-a)$



中矩形公式: $I(f) \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$

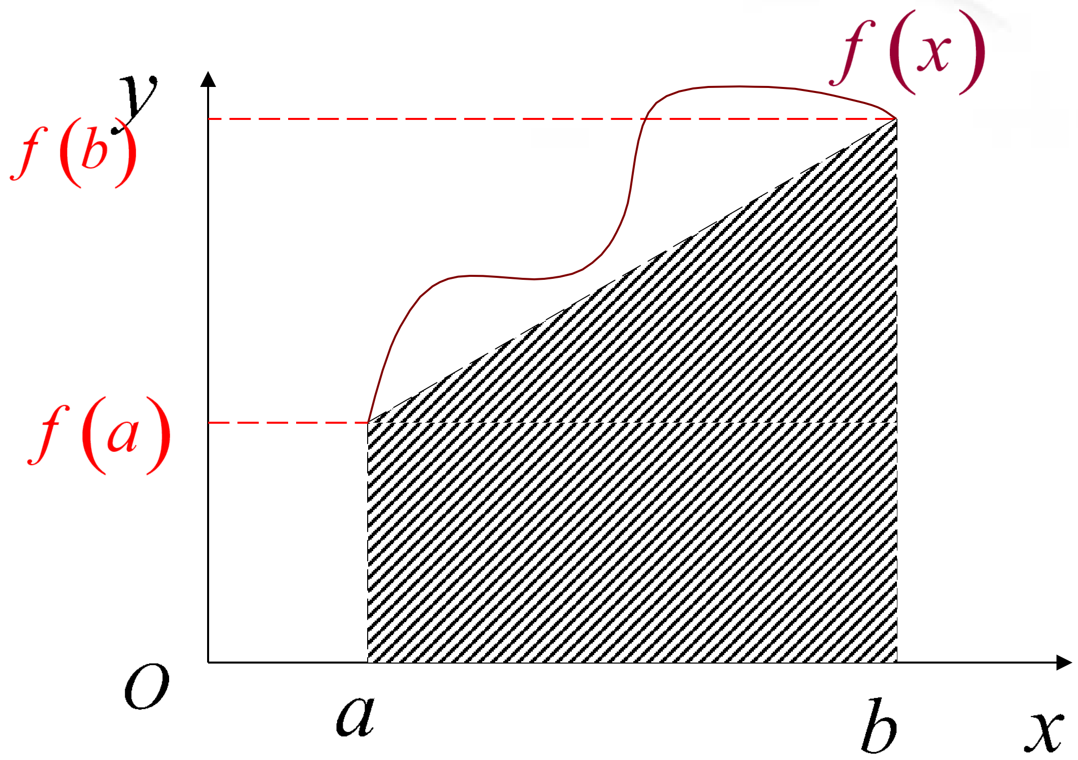


右矩形公式: $I(f) \approx f(b)(b-a)$



➢ 若取 a,b 两点，并令 $f(\xi)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$，则可得梯形公式（两点求积公式）

$$I(f)\approx\frac{(f(a)+f(b))}{2}(b-a)$$



$f(x)$
y
$f(b)$
$f(a)$
O
a
b
x

- 若取三点，$a,b,c=\frac{a+b}{2}$ 并令 $f(\xi)=\left[f(a)+4f(c)+f(b)\right]\big/6$

则可得Simpson公式(三点求积公式)

$$I(f)\approx(b-a)\cdot\frac{\left[f(a)+4f(c)+f(b)\right]}{6}$$

➢ 一般地，取区间 $[a,b]$ 内 $n+1$ 个点 $\{x_i\},(i=0,1,2,\dots,n)$

处的高度 $\{f(x_i)\},(i=0,1,\dots,n)$

通过加权平均的方法近似地得出平均高度 $f(\xi)$

这类求积方法称为机械求积:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

或写成:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

求积节点

数值积分公式

求积系数

记

称为数值求积公式

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$R(f) = I(f) - I_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} A_k f($$

称为求积公式余项(误差).

§2 插值型求积公式

一、定义

在积分区间 $[a,b]$ 上取 $n+1$ 个节点 $x_i, i=0,1,2,\ldots,n$

作 $f(x)$ 的 n 次代数插值多项式（拉格朗日插值公式）：

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} l_j(x)f(x_j)$$

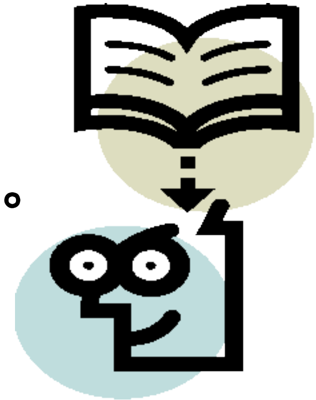
则有

$$f(x)=L_n(x)+R_n(x)$$

其中，

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(x)$$

为插值余项。



于是有：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + \int_a^b R_n(x)dx$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\left[\int_a^b l_j(x)dx\right]f(x_j) + \int_a^b R(x)dx$$

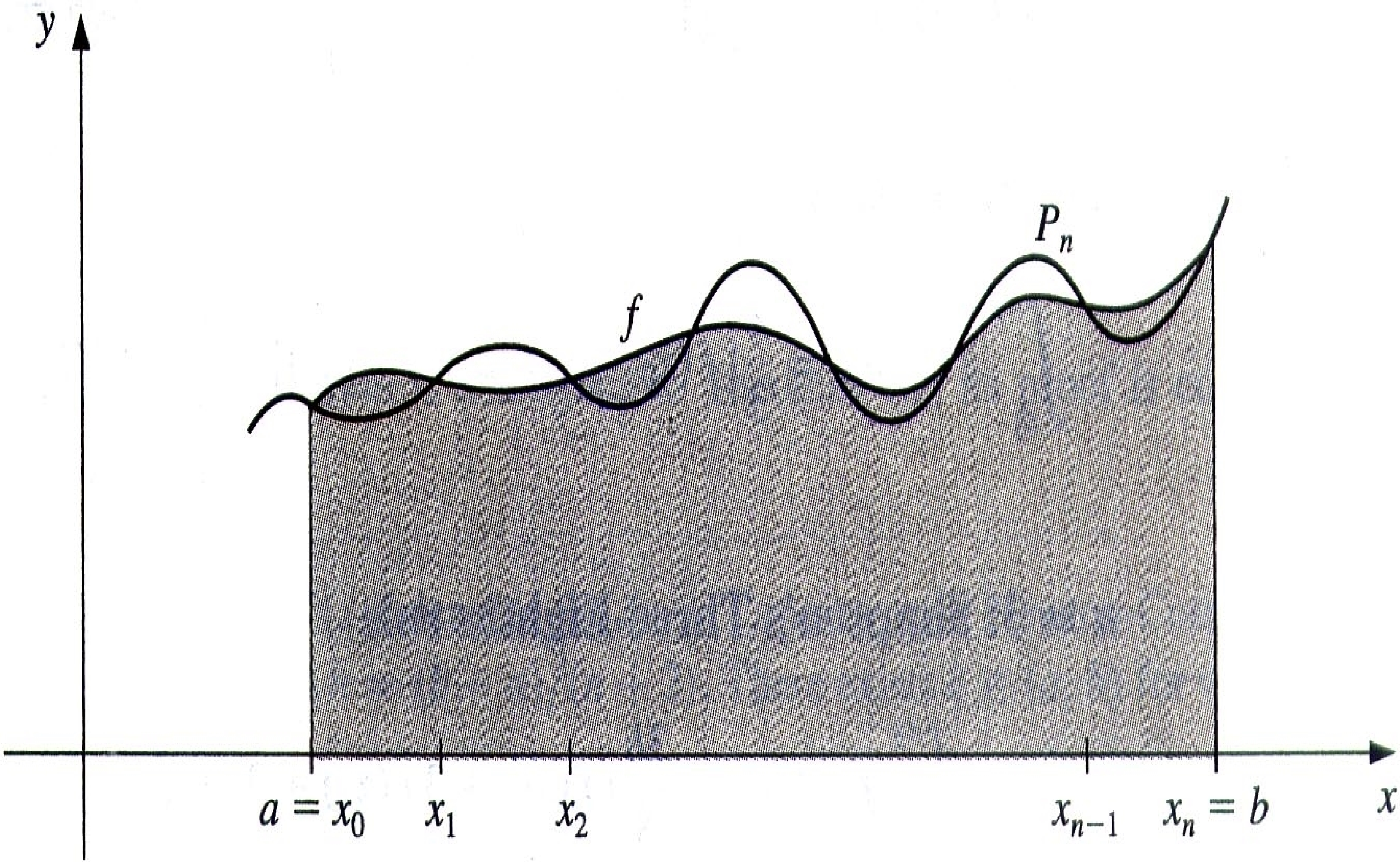
取

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\int_a^b l_k(x)dx}$$

称为插值型求积公式

$$A_k = \boxed{\int_a^b \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}dx}$$

由 节点 决定，与$f(x)$无关。



y
x
f
P_n
$a = x_0$
x_1
x_2
x_{n-1}
$x_n = b$

二、截断误差与代数精度

1、截断误差

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)=\int_a^b[f(x)-L_n(x)]dx$$

$$=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\,dx$$

§3 Newton-Cotes公式

一、Cotes系数

取节点为等距分布：$x_i = a + ih,\ h = \dfrac{b-a}{n},\ \ i = 0, 1, \ldots, n$

由此构造的插值型求积公式称为**Newton-Cotes公式**,此时求积系数：

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} dx$$

令 $x =$

Cotes系数 $C_k^{(n)}$

$$= \int_0^n \prod_{i \neq j} \frac{(t-j)h}{(i-j)h} \times h\ dt = \frac{(b-a)(-1)^{n-i}}{n\, i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{i \neq j} (t-j) dt$$

考二、*Newton-Cotes*公式

1、定义：

记 $$C_j^{(n)}=\frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!n}\int_0^n\left[\prod_{k=0,k\neq j}^{n}(t-k)\right]dt$$

则 $$A_j=(b-a)C_j^{(n)}\,,\quad j=0,1,2,\cdots,n$$

求积公式变为

$$\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)\sum_{j=0}^{n}C_j^{(n)}f(x_j)$$

称上式为**n阶闭型Newton-Cotes求积公式。**

2、截断误差

Newton-Cotes公式的误差为:

$$R(f)=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(x)dx$$

$$=\frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n f^{(n+1)}(\xi)\left[\prod_{j=0}^{n}(t-j)\right]dt \quad ,\xi\in(a,b)$$

与x有关

3、代数精度

作为插值型求积公式，n 阶**Newton-Cotes**公式至少具有 n 次代数精度，而实际的代数精度是否可以进一步提高呢？

定理

当阶数 n 为偶数时，**Newton-Cotes**公式至少具有 $n+1$ 次代数精度。

考，重要三、几种常用的低阶求积公式

***n* = 1:**

$$C_0^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad C_1^{(1)} = \frac{1}{2}$$

梯形公式

代数精度 = 1

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

/* 令 $x = a+th$, $h = b-a$, 用中值定理 */

$$R[f] = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x-a)(x-b)\,dx$$

$$= -\frac{1}{12}h^3 f''(\xi), \quad \xi \in [a,b], \; h = \frac{b-a}{1}$$

$n = 2$:

$$C_0^{(2)} = \frac{1}{6}, \quad C_1^{(2)} = \frac{2}{3}, \quad C_2^{(2)} = \frac{1}{6}$$

Simpson 公式

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]}$$

代数精度 = 3

$$R[f] = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a,b), \quad h = \frac{b-a}{2}$$

$n = 4$: Cotes 公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

这里 $\quad x_k = a + kh, h = \dfrac{b-a}{4}$

代数精度 = 5,

$$R[f] = -\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\xi)$$

常用的柯特斯系数表

n	前四切记住	$C_k^{(n)}$					
1	1/2	1/2					
2	1/6	4/6	1/6				
3	1/8	3/8	3/8	1/8			
4	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90		
5	19/288	75/288	50/288	50/288	75/288	19/288	
6	41/840	216/840	27/840	272/840	27/840	216/840	41/840

考，理解，记住例题

计算 $I=\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ 。

解：由 $Newton - Leibniz$ 公式得

$$I=\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\ln 2=0.69314718$$

由梯形公式 $I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)=0.\underline{7}5;$

由 $Simpson$ 公式 $I=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1}+4\frac{1}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\right)=0.\underline{69}44;$

由 $Newton$ 公式 $I=\frac{1}{8}\left(1+3\frac{1}{\frac{4}{3}}+3\frac{1}{\frac{5}{3}}+\frac{1}{2}\right)=0.\underline{693}75$

由 $Cotes$ 公式得 $I=0.\underline{6931}75$

例题 分别用梯形公式、辛普森公式和柯特斯公式计算积分

$$I=\int_{0.6}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

解： 由梯形公式得

$$I\approx T=\frac{1-0.6}{2}\left[\frac{1}{1+0.6^2}+\frac{1}{1+1^2}\right]=0.2470588$$

由辛普森公式得

$$I\approx S=\frac{1-0.6}{6}\left[\frac{1}{1+0.6^2}+4\times\frac{1}{1+0.8^2}+\frac{1}{1+1^2}\right]=0.2449546$$

由柯特斯公式得

$$I \approx C = \frac{1-0.6}{90}[7\times\frac{1}{1+0.6^2}+32\times\frac{1}{1+0.7^2}+12\times\frac{1}{1+0.8^2}$$

$$+32\times\frac{1}{1+0.9^2}+7\times\frac{1}{1+1^2}]=0.2449787$$

积分的精确值

$$I=\int_{0.6}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{0.6}^{1}=0.24497866$$