上海市长宁区2025届高三一模数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、填空题

1．设全集为R，集合$A=\left\{x \middle| x^2-2x-3\geq 0\right\}$，则$\overline{A}=$____.

2．已知圆锥的底面半径为1，母线长为2，则该圆锥的体积是____（结果保留π）.

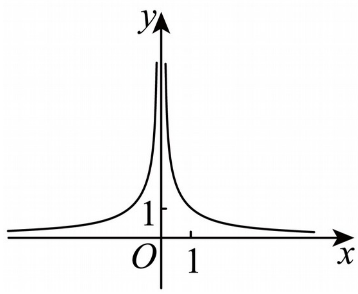
3．曲线$y=\ln x$在点$(1,0)$处的切线方程为______.

4．以$C(3,4)$为圆心，$\sqrt{3}$为半径的圆的标准方程是____.

5．投掷两枚质地均匀的骰子，观察掷得的点数，则掷得的点数之和为7的概率是____.

6．$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$的二项展开式中的常数项是____.

7．已知$a\in\left\{-1,-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},1,2,3\right\}$, 函数$y=x^a$的大致图像如图所示，则$a=$____.



8．已知向量$\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(3,-1)$，则向量$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影的坐标是____.

9．已知$\alpha:2^x+\log_2 x\leq 2,\beta:x<m$，若$\alpha$是$\beta$的充分条件，则实数$m$的取值范围是____.

10．若正实数a,b满足$ab=2a+b$，则$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$的最小值是______.

11．设O为坐标原点，从集合$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$中任取两个不同的元素x、y，组成A、B两点的坐标(x,y)、(y,x)，则$S_{\triangle AOB}\leq 10$的概率为____.

12．点P、M、N分别位于正方体$ABCD-A'B'C'D'$的面上，$AB=1$，则$\overline{PM}\cdot\overline{PN}$的最小值是____.

二、单选题

13．已知复数z和$\overline{z}$，则下列说法正确的是（　）

A．$z+\overline{z}$一定是实数　　B．$z-\overline{z}$一定是虚数

C．若$z+\overline{z}=0$，则z是纯虚数　　D．若$z-\overline{z}=0$，则z是纯虚数

14．已知非零空间向量$\vec{a},\vec{b}$和$\vec{c}$，则下列说法正确的是（　）

A．若$\vec{a}\perp\vec{b},\vec{a}\perp\vec{c}$，则$\vec{b}\parallel\vec{c}$　　B．若$\vec{a}\perp\vec{b},\vec{a}\perp\vec{c},$则$\vec{b}\perp\vec{c}$

C．若$\vec{a}\perp\vec{b},\vec{a}\parallel\vec{c}$，则$\vec{b}\parallel\vec{c}$　　D．若$\vec{a}\perp\vec{b},\vec{a}\parallel\vec{c}$，则$\vec{b}\perp\vec{c}$

15．已知函数$y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right)$上单调递增，则ω的取值范围是（　）

A．$(0,1]$　　B．$(0,1)$　　C．$\left(1,\frac{4}{3}\right)$　　D．$\left(0,\frac{6}{5}\right]$

16．数列$\{a_n\}$为严格增数列，且对任意的正整数n，都有$\frac{a_{n+1}}{n+1}\geq\frac{a_n}{n}$，则称数列$\{a_n\}$满足“性质Ω”.

①存在等差数列$\{a_n\}$满足“性质Ω”;

②任意等比数列$\{a_n\}$，若首项$a_1>0$，则$\{a_n\}$满足“性质Ω”;

下列选项中正确的是（　）

A．①是真命题，②是真命题；　　B．①是真命题，②是假命题；

C．①是假命题，②是真命题；　　D．①是假命题，②是假命题.

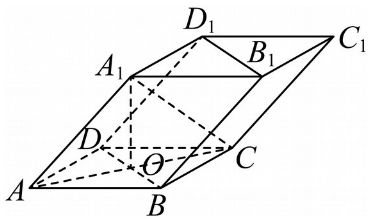
三、解答题

17．在$\vee ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$b\sin A-\sqrt{3}a\cos B=0$.

(1)求角B的大小；

(2)若$b=2,\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，请判断$\vee ABC$的形状，并说明理由.

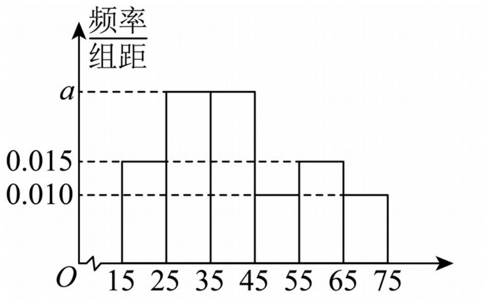
18．如图所示，四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面$ABCD$是正方形，O是底面的中心，$A_1O\perp$平面$ABCD$，$AB=AA_1=\sqrt{2}$.



(1)求证：$A_1C\perp$平面BDD_1B_1；

(2)求直线OA_1与平面AA_1B所成角的正弦值.

19．2024年第七届中国国际进口博览会（简称进博会）于11月5日至10日在上海国家会展中心举行.为了解进博会参会者的年龄结构，某机构随机抽取了年龄在15-75岁之间的200名参会者进行调查，并按年龄绘制了频率分布直方图，分组区间为$[15,25),[25,35),[35,45),[45,55),[55,65),[65,75]$.把年龄落在区间$[15,35)$内的人称为“青年人”，把年龄落在区间$[35,65)$内的人称为“中年人”，把年龄落在$[65,75]$内的人称为“老年人”.



200名参会者的频率分布直方图

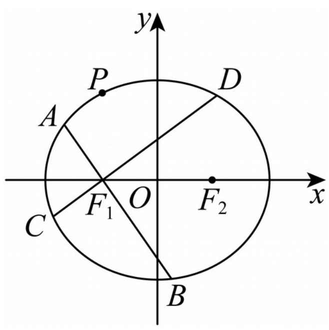
(1)求所抽取的“青年人”的人数；

(2)以分层抽样的方式从“青年人”“中年人”“老年人”中抽取10名参会者做进一步访谈，发现其中女性共4人，这4人中有3人是“中年人”.再用抽签法从所抽取的10名参会者中任选2人.

①简述如何采用抽签法任选2人；

②设事件A：2人均为“中年人”，事件B：2人中至少有1人为男性，判断事件A与事件B是否独立，并说明理由.

20．已知椭圆的左、右焦点分别为$F_1\left(-1,0\right)$，$F_2\left(1,0\right)$，且经过点$P\left(-1,\frac{3}{2}\right)$.



(1)求该椭圆的离心率；

(2)点Q为椭圆上一点，且位于第三象限，若$\triangle PQF_2$的面积为3，求点Q的坐标；

(3)A，B，C，D是椭圆上不重合的四个点，AB与CD相交于点F_1，且$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，求

$\left|AB\right|+\left|CD\right|$的取值范围.

21．双曲余弦函数$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，双曲正弦函数$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

(1)求函数$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$的单调增区间；

(2)若函数$y=\cosh 2x-a\sinh x$在$\left[0,+\infty\right)$上的最小值是$\frac{1}{4}$，求实数a的值；

(3)对任意$x\in\mathbf{R},\cosh\left(x\right)\geq\cos x+mx^{2}$恒成立，求实数$m$的取值范围.

参考答案：

题号	13	14	15	16						
答案	A	D	A	B						

1．$\left(-1,3\right)$

【分析】先解一元二次不等式再根据补集定义计算即可.

【详解】由 $A=\left(-\infty,-1\right]\cup\left[3,+\infty\right)$，

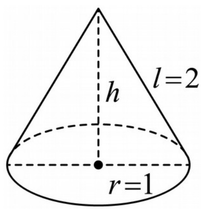
则 $\overline{A}=\left(-1,3\right)$.

故答案为：$\left(-1,3\right)$.

2．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

【分析】做轴截面，根据母线与底面半径求出圆锥的高，计算体积即可.

【详解】如下图做出轴截面：



$$h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}$$

代入圆锥体积公式：$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

3．$y=x-1$

【分析】求导，再根据导数的几何意义即可得解.

【详解】解：$y'=\dfrac{1}{x}$，

当$x=1$时，$y'=1$，

所以曲线$y=\ln x$在点$\left(1,0\right)$处的切线方程为$y=x-1$.

故答案为：$y=x-1$.

4．$(x-3)^2+(y-4)^2=3$

【分析】直接根据已知写出圆的标准方程得解.

【详解】由题得圆的标准方程为$(x-3)^2+(y-4)^2=3$.

故答案为：$(x-3)^2+(y-4)^2=3$.

5．$\frac{1}{6}$

【分析】由题可得投掷两枚质地均匀的骰子所对应点数的总情况数，然后可得掷得的点数之和为7的情况数，据此可得答案.

【详解】一枚骰子的点数有6种情况，则两枚骰子点数所对应总情况为36种.

又注意到点数之和为7的情况有：1，6；6，1；2，5；5，2；3，4；4，3共6种，

则掷得的点数之和为7的概率是$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

故答案为：$\frac{1}{6}$

6．-20

【分析】由题可得展开式的第$r+1$项，令x指数为0，可得常数项对应r，即可得答案.

【详解】由题$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$的二项展开式的第$r+1$项为$C_6^r x^{6-r}\cdot\left(-1\right)^r\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r=\left(-1\right)^r\cdot C_6^r x^{6-2r}$.

令$6-2r=0\Rightarrow r=3$，则常数项为$\left(-1\right)^3\cdot C_6^3=-20$.

故答案为：-20.

7．$-\frac{2}{3}$

【分析】根据图像的对称性，可得到函数的奇偶性；再由图像与坐标轴的关系，即可判断

a的取值.

【详解】因为图像关于y轴对称，所以函数是偶函数；

又因为图像与坐标轴无交点，所以指数a为负数.综上所述，$a=-\frac{2}{3}$.

故答案为：$-\frac{2}{3}$.

8．$\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$

【分析】利用向量的数量积运算以及投影坐标的概念求解.

【详解】由题得$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times3+2\times(-1)=1,\left|\vec{a}\right|=\sqrt{5},\left|\vec{b}\right|=\sqrt{10}$，所以

$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$，

与向量$\vec{a}$的同向单位向量为$\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$，

所以向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$方向上的投影的坐标为$\left|\vec{b}\right|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\cdot\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{2}}{10}\times\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$.

故答案为：$\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$.

9．$\left(1,+\infty\right)$

【分析】通过构造函数$f(x)=2^x+\log_2 x, x\in\left(0,+\infty\right)$，利用$f(x)$的单调性解不等式，再由题意将$\alpha$是$\beta$的充分条件转化为包含关系，进而求得参数$m$范围.

【详解】设$f(x)=2^x+\log_2 x, x\in\left(0,+\infty\right)$，

则$f(x)$在$\left(0,+\infty\right)$单调递增，又$f(1)=2$，

所以$2^x+\log_2 x\le 2$，即$f(x)\le f(1)$，故$0<x\le 1$.

则$\alpha:0<x\le 1$.

由题意$0<x\le 1$是$x<m$的充分条件，则$\left(0,1\right]\subseteq\left(-\infty,m\right)$，

所以有$m>1$，故实数m的取值范围是$\left(1,+\infty\right)$.

故答案为：$\left(1,+\infty\right)$.

10．9

【分析】双变量最值，采取消元手段或者基本不等式处理即可.

【详解】解析一:$ab-b=\left(a-1\right)b=2a\Rightarrow b=\dfrac{2a}{a-1}\left(a>1\right)$，

则$a+2b=a+\dfrac{4a}{a-1}=a+4+\dfrac{4}{a-1}=a-1+\dfrac{4}{a-1}+5\ge 4+5=9$，等号成立时$a=3,b=3$.

所以$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$的最小值是9.

解析二:$ab-2a-b=0\Rightarrow\left(a-1\right)\left(b-2\right)=2$，

则$a+2b=a-1+2b-4+5\ge 2\sqrt{2\left(a-1\right)\left(b-2\right)}+5=9$，

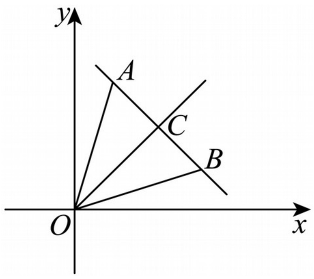
等号成立时$\begin{cases}a-1=2b-4\\a+2b=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=3\end{cases}$所以$\boldsymbol{a+2b}$的最小值是9.

故答案为：9.

11．$\frac{13}{36}$

【分析】设AB与直线$y=x$的交点为C，由面积关系可得$\left|x^2-y^2\right|\le 20$，列表，结合古典概型运算求解.

【详解】设AB与直线$y=x$的交点为C，由题意知A，B关于$y=x$对称，



可知C为线段AB的中点，且$OC\perp AB$，则$C(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2})$，

可得$|AB|=\sqrt{(x-y)^2+(y-x)^2}=\sqrt{2}|x-y|$，$|OC|=\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}|x+y|$，

则$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|OC|=\frac{1}{2}\left|x^2-y^2\right|\le 10$，即$\left|x^2-y^2\right|\le 20$，

列表可得：

xy	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	／	3	8	15	24	35	48	63	80
2	3	／	5	12	21	32	45	60	77
3	8	5	／	7	16	27	40	55	72
4	15	12	7	／	9	20	33	48	65
5	24	21	16	9	／	11	24	39	56

6	35	32	27	20	11	／	13	28	45
7	48	45	40	33	24	13	／	15	32
8	63	60	55	48	39	28	15	／	17
9	80	77	72	65	56	45	32	17	／

设样本空间为Ω，$S_{\triangle AOB}\le 10$为事件A，

可得$n(\Omega)=72$，$n(A)=26$，

所以所求概率为$P=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{26}{72}=\frac{13}{36}$.

故答案为：$\frac{13}{36}$.

12．$-\frac{1}{2}$/-0.5

【分析】建立空间直角坐标系可得$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$的坐标表达式，配方后可得最值.

【详解】如图建立以D为原点的空间直角坐标系，

设$P(x_0,y_0,z_0)$，$M(x_1,y_1,z_1)$　$N(x_2,y_2,z_2)$，其中$x_i,y_i,z_i\,(i=0,1,2)\in[0,1]$.

则$\overrightarrow{PM}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0),\overrightarrow{PN}=(x_2-x_0,y_2-y_0,z_2-z_0)$.

则$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)+(z_1-z_0)(z_2-z_0)$

$=x_0^2-(x_1+x_2)x_0+x_1x_2+y_0^2-(y_1+y_2)y_0+y_1y_2+z_0^2-(z_1+z_2)z_0+z_1z_2$

$=\left(x_0-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y_0-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2+\left(z_0-\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2+x_1x_2-\frac{(x_1+x_2)^2}{4}+y_1y_2-\frac{(y_1+y_2)^2}{4}$

$+z_1z_2-\frac{(z_1+z_2)^2}{4}\ge x_1x_2-\frac{(x_1+x_2)^2}{4}+y_1y_2-\frac{(y_1+y_2)^2}{4}+z_1z_2-\frac{(z_1+z_2)^2}{4}$

$$=-\frac{\left(x_1-x_2\right)^2}{4}-\frac{\left(y_1-y_2\right)^2}{4}-\frac{\left(z_1-z_2\right)^2}{4}=-\frac{1}{4}\left[\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2+\left(z_1-z_2\right)^2\right]$$

$=-\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{MN}\right|^2$，当且仅当$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$　$z_0=\frac{z_1+z_2}{2}$时取等号.

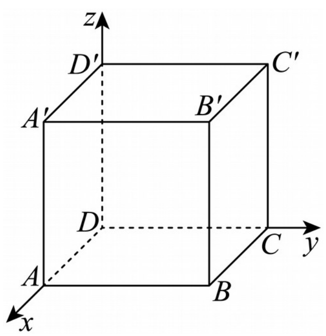
则为使$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$最小，则应使$\left|\overrightarrow{MN}\right|$尽量的大，且$P$为$MN$中点.

又点P、M、N均位于正方体表面上，则P、M、N在正方体同一面上，

则当$\left|\overrightarrow{MN}\right|$为正方体一面的对角线，$P$为对角线中点时，满足题意，

此时$\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{2}$，则$-\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{MN}\right|^2\geq-\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$



【点睛】关键点睛：本题解题的关键是建立坐标系利用坐标计算得$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}\geq-\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{MN}\right|^2$，

再由取等条件得到P、M、N位置关系从而得解.

13．A

【分析】根据复数的加减法，结合虚数和纯虚数的定义即可逐一求解.

【详解】设$z=a+b\mathrm{i},b,a\in\mathrm{R}$，则$\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，故$z+\overline{z}=2a$为实数，故A正确，

对于B，$z-\overline{z}=2b\mathrm{i}$，当$b=0$时，此时$z-\overline{z}$为实数，故B错误，