数值分析A实验报告

目录

第 1 章 实验 3.1（主元的选取与算法的稳定性）

1.1 问题提出

Gauss 消去法是我们在线性代数中已经熟悉的。但由于计算机的数值运算是在一个有限的浮点数集合上进行的，如何才能确保 Gauss 消去法作为数值算法的稳定性呢？Gauss 消去法从理论算法到数值算法，其关键是主元的选择。主元的选择从数学理论上看起来平凡，它却是数值分析中十分典型的问题。

1.2 实验内容

考虑线性方程组：

$Ax = b$ ，$A \in R^{n \times n}$ ，$b \in R^n$

编制一个能自动选取主元，又能手动选取主元的求解线性方程组的 Gauss 消去过程。

1.3 实验要求

（1）取矩阵 $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & & & \\ 8 & 6 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 8 & 6 & 1 \\ & & & 8 & 6 \end{pmatrix}$ ，$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ \vdots \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}$ ，则方程有解 $x^* = (1, 1, \cdots, 1)^T$ 。

取 $n = 10$ 计算矩阵的条件数。按顺序 Gauss 消元法求解，结果如何？

（2）现选择程序中手动选取主元的功能。每步消去过程总选取按模最小或按模尽可能小的元素作为主元，观察并记录计算结果。若每步消去过程总选取按模最大的元素作为主元，结果又如何？分析实验的结果。

（3）取矩阵阶数 n=20 或者更大，重复上述实验过程，观察记录并分析不同的问题及消去过程中选择不同的主元时计算结果的差异，说明主元素的选取在消去过程中的作用。

（4）选取其他你感兴趣的问题或者随机生成矩阵，计算其条件数。重复上述实验，观察记录并分析实验结果。

1.4 实验程序

```
format long;
n=input('矩阵的阶数：n=');
sp_M=input('矩阵的种类（1:Hilbert;2:随机矩阵；3:本题给出的矩阵；4：幻方矩阵）: sp_M=');
switch sp_M
        case(1);
            A=hilb(n);
        case(2);
            A=round(8*rand(n));
        case(3);
            A=6*diag(ones(1,n),0)+8*diag(ones(1,n-1),-1)+diag(ones(1,n-1),1);
        case(4);
            A=magic(n);
end;
b=A*ones(n,1);
p=input('计算条件数的 p-范数，p=');
cond_A=cond(A,p)
Any1=zeros(1,n);
Any20=zeros(n,1);
Any21=zeros(n,1);
Any12=eye(n);
[m,n]=size(A);
Ab=[A b];
Pro=input('计算方法（1：顺序高斯消元法；2,：列主元高斯消元法；3：完全主元高斯消元
法；4：手动选主元法，Pro=');
Ab
for i=1:n-1
    switch Pro
        case(1);
        case(2);
            [aii,ip]=max(abs(Ab(i:n,i)));
            ip=ip+i-1;
            Any1=Ab(ip,:);
            Ab(ip,:)=Ab(i,:);
            Ab(i,:)=Any1;
        case(3);
```

```
[Y,I]=max(max(abs(Ab(i:n,i:n))));
```

```
            I=I+i-1;
            [x1,r]=max(max(abs(Ab(i:n,i:n)')));
            r=r+i-1;
            Any2=Ab(:,I);
            Ab(:,I)=Ab(:,i);
            Ab(:,i)=Any2;
            Any1=Ab(r,:);
            Ab(r,:)=Ab(i,:);
            Ab(i,:)=Any1;
            Any21=Any12(:,I);
            Any12(:,I)=Any12(:,i);
            Any12(:,i)=Any21;
        case(4);
            ip=input(['第',num2str(i),'步消元 请输入第',num2str(i),'列所选元素所处行数:']);
            Any1=Ab(ip,:);
            Ab(ip,:)=Ab(i,:);
            Ab(i,:)=Any1;
    end;
    aii=Ab(i,i);
    for k=i+1:n
        if(aii~=0)
            Ab(k,i:n+1)=Ab(k,i:n+1)-(Ab(k,i)/aii)*Ab(i,i:n+1);
        else
            break;
        end;
    end;
    Ab
end;
x=zeros(n,1);
x(n)=Ab(n,n+1)/Ab(n,n);
for i=n-1:-1:1
    if(Pro==3)
        x(i)=(Ab(i,n+1)-Ab(i,i+1:n)*x(i+1:n))/Ab(i,i);
        x=Any12^-1*x;
    else
        x(i)=(Ab(i,n+1)-Ab(i,i+1:n)*x(i+1:n))/Ab(i,i);
    end;
end
x
```

1.5 实验结果

（1）取 $n=10$ 计算矩阵的条件数：$cond_2(A)=1.72756\times10^3$

按顺序 Gauss 消元法求解：(结果保留 15 位小数)

	顺序高斯消元法
X(1)	1.000000000000000
X(2)	1.000000000000000
X(3)	1.000000000000000
X(4)	1.000000000000001
X(5)	0.999999999999998
X(6)	1.000000000000004
X(7)	0.999999999999993
X(8)	1.000000000000012
X(9)	0.999999999999979
X(10)	1.000000000000028

（2）手动选取主元，每步消去过程总选取按模最小或按模尽可能小的元素作为主元，观察并记录计算结果。

每步消去过程总选取按模最大的元素作为主元，观察并记录计算结果。

	模最小	模最大
X(1)	1.000000000000000	1
X(2)	1.000000000000000	1
X(3)	1.000000000000000	1
X(4)	1.000000000000001	1
X(5)	0.999999999999998	1
X(6)	1.000000000000004	1
X(7)	0.999999999999993	1
X(8)	1.000000000000012	1
X(9)	0.999999999999979	1
X(10)	1.000000000000028	1

主元选取模最大的结果比模最小的要好，但差距很小，最大主元

和最小主元都没有过于小。使用过小的数时计算结果的误差会被放大。

（3）取 $n = 20$ 计算矩阵的条件数：$cond_2(A) = 1.78967 \times 10^6$

按顺序 Gauss 消元法求解：(结果保留 15 位小数)

	顺序高斯消元法	手动选取主元 模最小	手动选取主元 模最大
X(1)	1.000000000000000	1.000000000000000	1
X(2)	1.000000000000000	1.000000000000000	1
X(3)	1.000000000000000	1.000000000000000	1
X(4)	1.000000000000001	1.000000000000001	1
X(5)	0.999999999999998	0.999999999999998	1
X(6)	1.000000000000004	1.000000000000004	1
X(7)	0.999999999999993	0.999999999999993	1
X(8)	1.000000000000014	1.000000000000014	1
X(9)	0.999999999999972	0.999999999999972	1
X(10)	1.000000000000057	1.000000000000057	1
X(11)	0.999999999999886	0.999999999999886	1
X(12)	1.000000000000227	1.000000000000227	1
X(13)	0.999999999999547	0.999999999999547	1
X(14)	1.000000000000902	1.000000000000902	1
X(15)	0.999999999998209	0.999999999998209	1
X(16)	1.000000000003524	1.000000000003524	1
X(17)	0.999999999993179	0.999999999993179	1
X(18)	1.000000000012732	1.000000000012732	1
X(19)	0.999999999978173	0.999999999978173	1
X(20)	1.000000000029102	1.000000000029102	1

取 $n = 100$ 计算矩阵的条件数：$cond_2(A) = 9.7748 \times 10^7$

按顺序 Gauss 消元法求解：(结果保留 15 位小数)

	顺序高斯消元法
X(1)	1.000000000000000

X(11)	0.999999999999886
X(21)	0.999999999883592
X(31)	0.999999880797986
X(41)	0.999877937138081
X(51)	0.875007629394532
X(61)	-126.9921874998831
X(71)	-131062.9998779366
X(81)	-134209407.0078120
X(91)	-137296355326.9995

可以看出，随着矩阵维数的增加条件数显著增大，计算结果的误差也不断增大。选取模最小元素作为主元时条件数越大误差越大。

（4）10 阶 Hilbert 矩阵中各种方法解的情况

$cond_2(\mathrm{A}) = 1.60251 \times 10^{13}$

	模最小	模最大
X(1)	0.999999998461155	0.999999998758705
X(2)	1.000000131188530	1.000000106500618
X(3)	0.999997234296156	0.999997743217252
X(4)	1.000024938838782	1.000020435292621
X(5)	0.999881835285317	0.999902835789981
X(6)	1.000323037974566	1.000266409823714
X(7)	0.999472478897913	0.999563856087119
X(8)	1.000507732300032	1.000420698156409
X(9)	0.999734379772479	0.999779492550673
X(10)	1.000058233952260	1.000048424648847

10 阶随机矩阵中各种方法解的情况

$cond_2(\mathrm{A}) = 1.58179 \times 10^{2}$

	模最小	模最大
X(1)	0.999999999999986	0.999999999999998
X(2)	1.000000000000038	1.000000000000005
X(3)	0.999999999999962	0.999999999999996
X(4)	1.000000000000028	1.000000000000007
X(5)	0.999999999999972	0.999999999999999
X(6)	1.000000000000007	1.000000000000000
X(7)	1.000000000000014	0.999999999999993
X(8)	1.000000000000006	0.999999999999998

X(9)	0.999999999999968	1.000000000000002
X(10)	1.000000000000030	1.000000000000003

10 阶幻方矩阵中各种方法解的情况

$cond_2(\mathrm{A}) = 7.67005 \times 10^{17}$

	模最小	模最大
X(1)	1.000000012280200	1
X(2)	0.999999955096428	1
X(3)	1.000000096294698	1
X(4)	0.999999992722872	1
X(5)	1.000000123934105	1
X(6)	0.999999922918538	1
X(7)	1.000000030950047	1
X(8)	0.999999992722872	1
X(9)	1.000000000763118	1
X(10)	1.000000012280200	1

一般来说，模最大元素作为主元比模最小的元素作为主元时的计算结果更精确。但一些方阵，如幻方矩阵，则是选择模最小的元素作为主元时计算结果最精确（选模最小的元素只是一个表象，这种选主元方法优于其他选主元方法的本质是这种选择方法能使消去过程不产生浮点数，而全是整数运算，只有在回代过程中才有可能会产生浮点数）。一般来说，需按模最大元素作为主元精度比较高。