陕西省2024届高三下学期2月大联考数学试题（全国乙卷）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．复数$z=\dfrac{2+3\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}$在复平面内对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．已知集合$A=\{x|x=3k-1,k\in \mathrm{N}\}$，$B=\{x|x^2-5x-6\le 0\}$，则$A\cap B=$（　　）

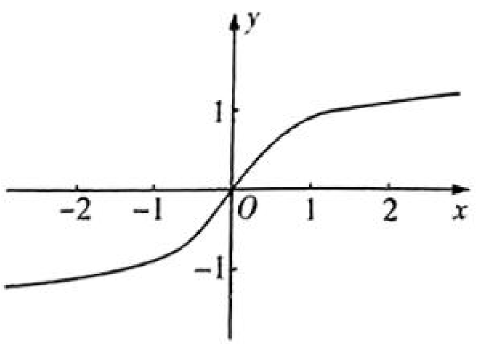
A．$\{-2,1,4\}$　　B．$\{0,1,2,3,4,5\}$　　C．$\{2,5\}$　　D．$\{-1,2,5\}$

3．已知p：向量$\vec{a}=(-1,1)$与$\vec{b}=(m,2)$的夹角为锐角．若p是假命题，则实数m的取值范围为（　　）

A．$(-2,2)$　　B．$(-\infty,-2)\cup(-2,2)$

C．$\{-2\}\cup[2,+\infty)$　　D．$[2,+\infty)$

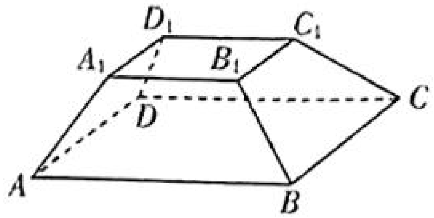
4．已知函数$f(x)$的部分图象如图所示，则$f(x)$的解析式可能为（　　）



A．$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$　B．$f(x)=1-\dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1}$　C．$f(x)=x\sqrt{|x|}$

D．$f(x)=\dfrac{x}{\ln(x^2+2)}$

5．将一个正四棱台物件放入有一定深度的电解槽中，对其表面进行电泳涂装．如图所示，已知该物件的上底边长与侧棱长相等，且为下底边长的一半，一个侧面的面积为$3\sqrt{3}$，则该物件的高为（　　）



A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．3

6．甲、乙、丙、丁、戊5名青年志愿者被分配到3个不同的岗位参加志愿者工作，每个岗位至少分配一人，其中甲与丙不在同一岗位，丁与戊在同一岗位，则不同的分配方案有（　）

A．18种　　B．21种　　C．24种　　D．30种

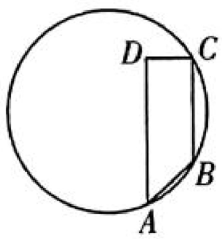
7．已知关于x,y的不等式组$\begin{cases}-1\le x+y\le 3\\-1\le x-y\le 1\end{cases}$表示的平面区域为$\Omega$，在区域$\Omega$内随机取一点$A\left(x_0,y_0\right)$，则满足$x_0+1\ge 3y_0$的概率为（　）

A．$\frac{5}{8}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{6}$

8．已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\pi-2x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，若函数$f\left(x+a\right)$的图象关于原点对称，则实数$a$的最大负值为（　）

A．$-\frac{\pi}{8}$　　B．$-\frac{\pi}{4}$　　C．$-\frac{3\pi}{8}$　　D．$-\frac{3\pi}{4}$

9．如图是某人设计的产品图纸，已知四边形$ABCD$的三个顶点A,B,C在某圆上，且$AD//BC$，$AD\perp CD, AD=4, BC=3, CD=1$，则该圆的面积为（　）



A．$\frac{13\pi}{2}$　　B．$\frac{17\pi}{2}$　　C．9π　　D．16π

10．已知函数$y=f\left(x+1\right)$的图象关于直线$x=-1$对称，且对任意实数x，都有$f\left(2-x\right)+f\left(x\right)=0$，当$x\in\left[0,2\right]$时，$f\left(x\right)=\sin\pi x$，则下列说法正确的是（　）

A．$f\left(x\right)$为奇函数　　B．2为函数$f\left(x\right)$的一个周期

C．$f\left(x\right)$在$\left[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right]$上单调递增　　D．函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{1}{6}\left|x\right|$有5个零点

11．设$a=0.9,b=\sin\frac{3}{4},c=\mathrm{e}^{-0.19}$，则（　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$c<a<b$　　D．$b<c<a$

12．已知椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1\left(-c,0\right),F_2\left(c,0\right)$，抛物线$C_2$：$x^2=2py(p>0)$，椭圆$C_1$与抛物线$C_2$相交于不同的两点$A,B$，且四边形$ABF_1F_2$的外接圆直径为$\frac{5c}{2}$，若$b>c$，则椭圆$C_1$的离心率的取值范围是（　）

A．$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　B．$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$　　C．$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$　　D．$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},1\right)$

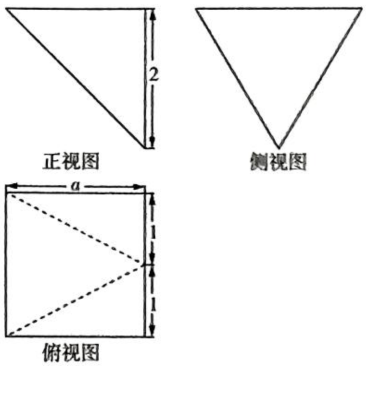
二、填空题

13．已知在半圆O中，直径$AB=4,\overset{\frown}{AB}$上的点$M$满足$\angle MAO=30°$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{OM}=$______.

14．已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，若$a_1=2,S_{n+1}+S_n=0\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，则$a_{20}=$______.

15．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1\left(-c,0\right),F_2\left(c,0\right),M$为双曲线$C$右支上一点，若$\triangle F_1MF_2$的内切圆与$x$轴切于点$N$，且$\left|NF_1\right|=2\left|NF_2\right|$，则双曲线$C$的渐近线方程为______.

16．已知某四棱锥的三视图如图所示，若该四棱锥外接球的表面积为$\frac{41\pi}{4}$，则该四棱锥的体积为______.



三、解答题

17．某中学为研究学生使用数学错题本的时长对数学成绩的影响，从高二年级学生中随机选取了50名学生，统计了他们每周使用数学错题本的平均时长（单位：分钟）和数学成绩优秀的人数（单位：人），得到如下统计表：

每周使用数学错题本的平均时长	$(0,20]$	$(20,40]$	$(40,60]$	$(60,80]$	$(80,100]$
人数	6	14	21	m	3
数学成绩优秀的人数	1	6	15	4	2

(1)试估算该中学高二年级学生每周使用数学错题本平均时长的平均数；（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）

(2)若从每周使用数学错题本的平均时长为$(60,80]$和$(80,100]$的学生中各随机选取 2 名，记所选取的 4 名学生中数学成绩优秀的人数为X，求X的分布列和数学期望.

18．已知数列$\{a_n\}$为各项均为正数的数列，数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$，且

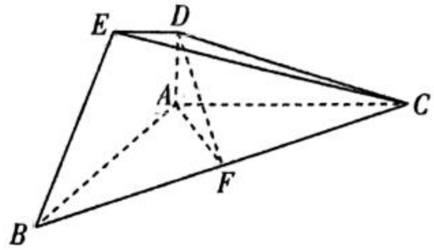
$a_n+b_n=a_n\cdot b_n$.

(1)求证：数列$\{b_n\}$是等差数列；

(2)设$c_n=\dfrac{a_n}{(n+1)^2}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和S_n.

19．如图，在多面体$ABCDE$中，A,B,E,D四点共面，$DA\perp$平面ABC，

$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3},AB=AC=2,DA=\dfrac{\sqrt{2}}{2},EB=\sqrt{3},BE\perp DE,F$为$BC$的中点.



(1)求证：平面$ADF\perp$平面BCE；

(2)求平面CDE与平面ABC所成二面角的正弦值.

20．已知函数$f(x)=\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{a}{2}x^2+ax,a\in\mathbf{R}$.

(1)当$a=1$时，讨论函数$f(x)$的单调性；

(2)若$\dfrac{f(x)}{x}\ge 0$恒成立，求实数a的取值范围.

21．已知过抛物线$y^2=4x$的焦点F的直线与抛物线交于A,B两点，抛物线的准线与x轴的交点为M.

(1)若点A的横坐标大于1，当直线MA与抛物线的另一个交点恰好为线段MA的中点时，求直线AB的方程；

(2)求$\triangle MAB$内切圆的圆心到坐标原点距离的最大值．

22．在平面直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases} x = 4\sin\alpha\cos\alpha \\ y = m + 2\cos2\alpha \end{cases}$（$\alpha$为参数），直线$l$：$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$．以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系．

(1)求曲线C及直线l的极坐标方程；

(2)若直线l与曲线C交于不同的A,B两点，A,B在O点同侧，且$|OA| = 2|OB|$，求m的值．

23．已知函数$f(x) = |x-2| + |2x-1|$．

(1)求$f(x)$的最小值；

(2)若$f(x) \geq |2x-a|$恒成立，求实数a的取值范围．

参考答案：

1．B

【分析】利用复数的四则运算求得z，从而利用复数的几何意义即可得解.

【详解】因为$z=\frac{2+3\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}=\frac{(2+3\mathrm{i})\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}=\frac{-3+2\mathrm{i}}{2}=-\frac{3}{2}+\mathrm{i}$

所以复数z在复平面内对应的点为$\left(-\frac{3}{2},1\right)$，位于第二象限.

故选：B.

2．D

【详解】因为$A=\left\{x\middle|x=3k-1,k\in\mathrm{N}\right\}=\left\{-1,2,5,8,\cdots\right\}$，

$B=\left\{x\middle|x^2-5x-6\le 0\right\}=\left\{x\middle|-1\le x\le 6\right\}$，

所以$A\cap B=\{-1,2,5\}$.

故选：D.

3．C

【分析】利用向量夹角为锐角得到关于m的不等式组，进而求得m的取值范围，再结合p为假命题取m的取值范围的补集即可得解.

【详解】当向量向量$\vec{a}=(-1,1)$与$\vec{b}=(m,2)$的夹角为锐角时，

有$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$且$\vec{a}$与$\vec{b}$方向不相同，即$\begin{cases}-m+2>0\\ m\ne -2\end{cases}$，解得$m<2$且$m\ne -2$，

因为p是假命题，所以实数m的取值范围是$\{-2\}\cup[2,+\infty)$.

故选：C.

4．D

【分析】结合指数函数的图象与性质即可判断AB选项错误，对C代入$x=2$判断C错误，则可得到D正确.

【详解】根据函数 $f(x)$ 的图象， 知 $f(1)\approx 1$， 而对A选项$f(1)=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}>2$排除A；

对B选项$f(x)=1-\frac{2}{\mathrm{e}^x+1}$，因为$\mathrm{e}^x+1>1$，则$\frac{2}{\mathrm{e}^x+1}\in(0,2)$，

则$f(x)=1-\frac{2}{\mathrm{e}^x+1}\in(-1,1)$，但图象中函数值可以大于 1 ， 排除B；

根据C选项的解析式， $f(2)=2\sqrt{2}\approx 2.8$， 而根据函数 $f(x)$ 的图象， 知 $f(2)\approx 1$， 排除 C.

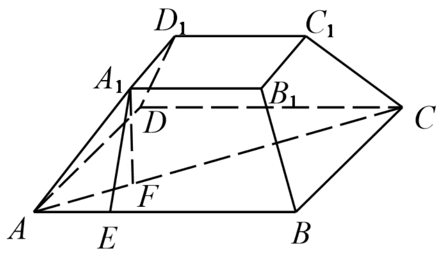
故选：D.

5．C

【分析】作出正四棱台的图形，设 $A_1B_1 = BB_1 = a$，利用该四棱台侧面的面积求得 a，进而利用勾股定理即可得解.

【详解】设 $A_1B_1 = BB_1 = a$，则 $AB = 2a$.

因为该四棱台为正四棱台，所以各个侧面都为等腰梯形，上、下底面为正方形，



在四边形 ABB_1A_1 中，过点 A_1 作 $A_1E \perp AB$ 于点 E，

则 $AE = \frac{1}{2}\left(2a-a\right) = \frac{a}{2}$，所以 $A_1E = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，

所以 $S_{ABB_1A_1} = \frac{a+2a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = 3\sqrt{3}$，解得 $a = 2$，

在平面 ACC_1A_1 中，过点 A_1 作 $A_1F \perp AC$ 于点 F，

易知 A_1F 为正四棱台的高，则 $AF = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$，

所以 $A_1F = \sqrt{A_1A^2 - AF^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$.

故选：C.

6．D

【分析】分类讨论 5 名青年志愿者不同的分组法，再考虑 2，2，1 分组中的情况，利用分类计数原理即可得解.

【详解】依题意，①若是 2，2，1 分组，

当甲一个人一组时，乙与丙在同一岗位，丁与戊在同一岗位，有 A_3^3 种不同的分配方案；

当丙一个人一组时，甲与乙在同一岗位，丁与戊在同一岗位，有 A_3^3 种不同的分配方案;

②若是 3，1，1 分组，则可再选一人与丁、戊组成一组，有 $\mathrm{C}_3^1\mathrm{A}_3^3$ 种不同的分配方案.

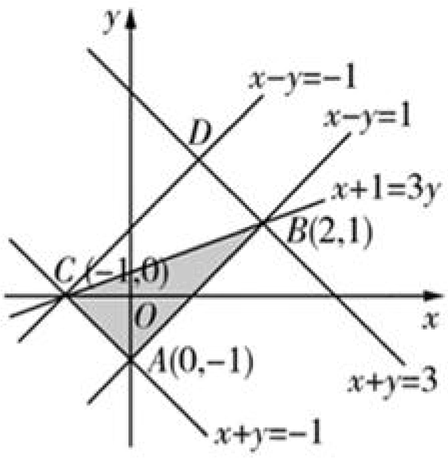
综上，不同的分配方案共有 $\mathrm{A}_3^3 + \mathrm{A}_3^3 + \mathrm{C}_3^1\mathrm{A}_3^3 = 30$(种).

故选：D.

7．B

【分析】利用线性规划作出不等式组对应的平面区域Ω，同时满足所求不等式的平面区域，再结合几何概型即可得解.

【详解】由$\begin{cases}-1\le x+y\le 3\\-1\le x-y\le 1\end{cases}$，作出平面区域$\Omega$，为图中矩形$ABDC$，



联立$\begin{cases}x+y=-1\\x-y=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$，则$A(0,-1)$，

联立$\begin{cases}x+y=3\\x-y=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$，则$B(2,1)$，

联立$\begin{cases}x+y=-1\\x-y=-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$，则$C(-1,0)$，

易知$x+1=3y$过点$B(2,1)$，$C(-1,0)$，

所以满足$x_0+1\ge 3y_0$的区域如图中阴影部分$\triangle ABC$，

其中BC恰好是矩形$ABDC$的对角线，所以$S_{ABDC}=2S_{\triangle ABC}$，

所以所求概率$P=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{ABDC}}=\frac{1}{2}$.

故选：B.

8．C

【分析】先利用三角恒等变换化简$f(x)$，从而得到$f(x+a)$的解析式，再利用三角函数的

奇偶性求得$a=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，从而得解.

【详解】因为$f\left(x\right)=\sin\left(\pi-2x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin 2x-2\left[\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)\right.$

$=\sin 2x-2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，

所以$f(x+a)=\sqrt{2}\sin\left[2(x+a)-\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(2x+2a-\frac{\pi}{4}\right)$，

因为函数$f(x+a)$的图象关于原点对称，所以$f(x+a)$是奇函数，

所以$2a-\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in Z)$，所以$a=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，

当$k=-1$时，$a=-\frac{3\pi}{8}$，即实数a的最大负值为$-\frac{3\pi}{8}$，故 C 正确.

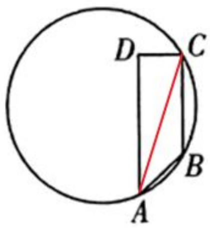
故选：C.

9．B

【分析】利用平面几何的知识求得$\cos\angle ACB,\sin\angle ACB$，再利用余弦定理与正弦定理依次求得$AB,R$，从而得解.

【详解】连接AC，在$\triangle ACD$中，$AD=4,CD=1,AD\perp CD$，

则$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{17}$，



所以$\sin\angle CAD=\frac{CD}{AC}=\frac{1}{\sqrt{17}},\cos\angle CAD=\frac{AD}{AC}=\frac{4}{\sqrt{17}}$，

因为$AD//BC$，所以$\angle ACB=\angle CAD$，

所以$\cos\angle ACB=\cos\angle CAD=\frac{4}{\sqrt{17}},\sin\angle ACB=\sin\angle CAD=\frac{1}{\sqrt{17}}$，

所以$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB$

$=17+9-2\sqrt{17}\times 3\times\frac{4}{\sqrt{17}}=2$，所以$AB=\sqrt{2}$，

设该圆的半径为R，则$2R=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{17}}}=\sqrt{34}$，

所以该圆的面积为$\pi R^2=\pi\left(\dfrac{\sqrt{34}}{2}\right)^2=\dfrac{17}{2}\pi$.

故选：B.

10．C

【分析】利用函数平移的性质判断A，举反例排除B，由条件推得$f(x)$的周期性与奇偶性，从而作出$f(x)$的大致图象判断C，再选项C的基本上作出$y=\dfrac{1}{6}|x|$的大致图象判断D.

【详解】对于A，由$y=f(x+1)$的图象关于直线$x=-1$对称，

得$y=f(x)$的图象关于直线$x=0$对称，所以$f(x)$为偶函数，故A错误;

对于B，因为当$x\in[0,2]$时，$f(x)=\sin\pi x$，则$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，

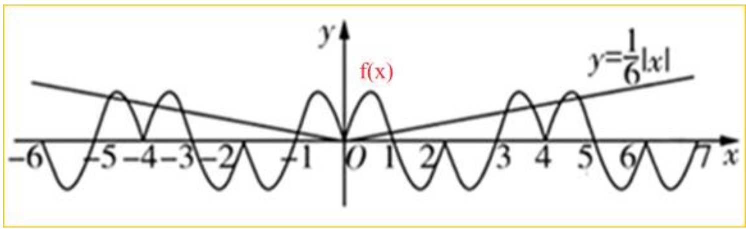
因为$f(2-x)+f(x)=0$，所以$f\left(\dfrac{5}{2}\right)+f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$，

则$f\left(\dfrac{5}{2}\right)=-f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$，即$f\left(\dfrac{5}{2}\right)\neq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，故B错误;

对于C，因为$f(2-x)+f(x)=0$，则$f(x-2)=-f(x)$，

所以$f(x-4)=-f(x-2)=f(x)$，所以4为函数$y=f(x)$的一个周期，

当$x\in[0,2]$时，$f(x)=\sin\pi x$，作出$y=f(x)$的大致图象，易知C正确;



对于D，令$g(x)=0$，则$f(x)=\dfrac{1}{6}|x|$，如图，作出$y=\dfrac{1}{6}|x|$的大致图象，

当$x=\dfrac{9}{2}$时，$f\left(\dfrac{9}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，$y=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{9}{2}=\dfrac{3}{4}<1$，

结合$f(x)$的对称性与图象可知，函数$y=f(x)$与$y=\dfrac{1}{6}|x|$的图象有11个交点，

所以$g(x)$有11个零点，故D错误.

故选：C.

11．D

【分析】构造函数$f(x)=e^{2x-2}-x(0<x<1)$，利用导数得到其单调性则比较出$c<a$，利用指

数函数和幂函数以及正弦函数的单调性即可比较出$c>b$，则最终得到三者大小.

【详解】先变形$a=\sqrt{0.81},c=\mathrm{e}^{0.81-1}$，令$x=0.81$，

下面比较当$0<x<1$时，$\sqrt{x}$与e^{x-1}的大小.

①令$f(x)=\mathrm{e}^{2x-2}-x(0<x<1)$，则$f'(x)=2\mathrm{e}^{2x-2}-1$，令$f'(x)=0$，

得$x=1-\dfrac{\ln 2}{2}<1-\dfrac{\ln\sqrt{\mathrm{e}}}{2}=\dfrac{3}{4}$，当$x\in\left(\dfrac{3}{4},1\right)$时，$f^{'}(x)>0,f(x)$单调递增，

所以$f(0.81)<f(1)=0$，所以$\mathrm{e}^{-0.38}<0.81$，即$\mathrm{e}^{-0.19}<0.9$，所以$c<a$.

②$c=\mathrm{e}^{-0.19}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{0.19}}>\dfrac{1}{\mathrm{e}^{0.2}}$，所以$c^5>\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{0.2}}\right)^5=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$b=\sin\dfrac{3}{4}<\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$b^5<\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^5=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$，则$c^5>\dfrac{1}{\mathrm{e}}>\dfrac{\sqrt{2}}{8}>b^5$，所以$c>b$.

综上，$b<c<a$，

故选：D.

12．A

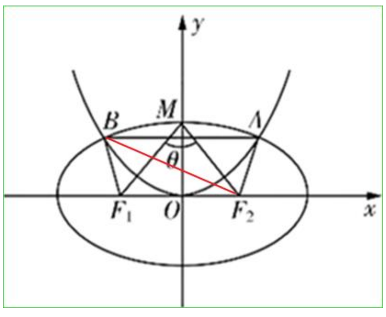
【分析】先利用椭圆与抛物线的对称性分析得四边形ABF_1F_2的外接圆就是$\triangle BF_1F_2$的外接圆，

再利用正弦定理求得$\sin\angle F_1BF_2$，再利用椭圆中焦点三角形的性质得到$\angle F_1MF_2=\theta$的取值范围，从而得到关于a,b,c的齐次不等式，解之即可得解.

【详解】如图，由椭圆与抛物线的对称性，知点A,B关于y轴对称，

四边形ABF_1F_2是等腰梯形，易知四边形ABF_1F_2的外接圆就是$\triangle BF_1F_2$的外接圆，

设四边形ABF_1F_2的外接圆半径为R.



在$\triangle BF_1F_2$中，由正弦定理，知$\dfrac{2c}{\sin\angle F_1BF_2}=2R=\dfrac{5c}{2},\therefore\sin\angle F_1BF_2=\dfrac{4}{5}$,

记椭圆C_1的上顶点为$M,\angle F_1MF_2=\theta$，坐标原点为O，