高中数学二级结论大全

第 1 章　集合

001. 有限集合$\left\{a_1,a_2,a_3,\quad,a_n\right\}$：子集个数：$2^n$ 个，真子集个数：2^n-1 个；非空子集有2^n-1个；非空真子集有2^n-2个；

002. 元素与集合的关系：$x\in A\Leftrightarrow x\notin C_U A, x\in C_U A\Leftrightarrow x\notin A$.

003. 德摩根公式：$C_U\left(A\quad B\right)=C_U A\quad C_U B; C_U\left(A\quad B\right)=C_U A\quad C_U B$.

004. 集合里面重要结论：

①$A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B$　②$A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A$;

③$A\Rightarrow B\Leftrightarrow A\subseteq B$　④$A\Leftrightarrow B\Leftrightarrow A=B$

005. 容斥原理：

$$card(A\quad B)=cardA+cardB-card(A\quad B)$$

$$card(A\quad B\quad C)=cardA+cardB+cardC-card(A\quad B)-card(A\quad C)-card(B\quad C)+card(A\quad B\quad C)$$

006. **包含关系**

$$A\quad B=A\Leftrightarrow A\quad B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow C_U B\subseteq C_U A$$

$$\Leftrightarrow A\quad C_U B=\Phi\Leftrightarrow C_U A\quad B=R$$

007. 真值表

p	q	非 p	p 或 q	p 且 q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

008. 常见结论的否定形式

原结论	反设词	原结论	反设词
是	不是	至少有一个	一个也没有
都是	不都是	至多有一个	至少有两个
大于	不大于	至少有n个	至多有（$n-1$）个
小于	不小于	至多有n个	至少有（$n+1$）个
对所有x，成立	存在某x，不成立	p或q	$\neg p$且$\neg q$
对任何x，不成立	存在某x，成立	p且q	$\neg p$或$\neg q$

009. 四种命题的相互关系

原命题：与逆命题互逆，与否命题互否，与逆否命题互为逆否；

逆命题：与原命题互逆，与逆否命题互否，与否命题互为逆否；

否命题：与原命题互否，与逆命题互为逆否，与逆否命题互逆；

逆否命题：与逆命题互否，与否命题互逆，与原命题互为逆否；

010. 充要条件

（1）充分条件：若$p\Rightarrow q$，则p是q充分条件.

（2）必要条件：若$q\Rightarrow p$，则p是q必要条件.

（3）充要条件：若$p\Rightarrow q$，且$q\Rightarrow p$，则p是q充要条件.

注：如果甲是乙的充分条件，则乙是甲的必要条件；反之亦然.

第二章　不等式

1. 伯努利不等式：若实数$x_i(i=1,2,3,\quad,n)$各项符号相同，且$x_i>-1$，则：

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\quad(1+x_n)\ge 1+x_1+x_2+\quad+x_n \qquad (1)$$

（1）为伯努利不等式.

当$x_1=x_2=\quad=x_n=x$时，（1）式变为：$(1+x)^n\ge 1+nx$　（2）。

2. 均值不等式：

若$a_1,a_2,\quad,a_n$为正实数，记：

1）$Q_n=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\quad+a_n^2}{n}}$，为平方平均数，简称平方均值；

2）$A_n=\dfrac{a_1+a_2+\quad+a_n}{n}$，为算术平均数，简称算术均值；

3）$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\quad a_n}$，为几何平均数，简称几何均值；

4）$H_n=\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\quad+\dfrac{1}{a_n}}$，为调和平均数，简称调和均值；

则：$Q_n\ge A_n\ge G_n\ge H_n$　　　（3）

当且仅当$a_1=a_2=\quad=a_n$时，等号成立.（3）式称为均值不等式

3. 幂均不等式：

i）设$a=(a_1,a_2,\quad,a_n)$为实数序列，实数$r\neq0$，则记：

$$M_r(a)=\left(\frac{a_1^r+a_2^r+\quad+a_3^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}\qquad(4)$$

（4）式$M_r(a)$的称为幂平均函数.

若$a=(a_1,a_2,\quad,a_n)$为正实数序列，且实数$r\neq0$，则：

$$M_r(a)\le M_s(a)\qquad(5)$$

当$r\le s$时，（5）式对任何 r 都成立，即$M_r(a)$关于 r 是单调增函数.

（5）式称为幂平均不等式，简称幂均不等式.

ii）设$m=(m_1,m_2,\quad,m_n)$为非负实数序列，且$m_1+m_2+\quad+m_n=1$，若$a=(a_1,a_2,\quad,a_n)$为正实数序列，且实数$r\neq0$，则：

$$M_r^m(a)=(m_1a_1^r+m_2a_2^r++m_na_n^r)^{\frac{1}{r}}\qquad(6)$$

（6）式称为加权幂平均函数.

若$a=(a_1,a_2,\quad,a_n)$为正实数序列，且实数$r\neq0$，对$M_r{}^m(a)$则$M_r{}^m(a)\le M_s{}^m(a)$：

即$(m_1a_1^r+m_2a_2^r++m_na_n^r)^{\frac{1}{r}}\le(m_1a_1^s+m_2a_2^s++m_na_n^s)^{\frac{1}{s}}$（7）

当$r\le s$时，（7）式对任何 r 都成立，即$M_r{}^m(a)$关于 r 是单调增函数.

（7）式称为加权幂平均不等式，简称加权幂均不等式

4. 柯西不等式

9.1 若$a_1,a_2,\quad,a_n$和$b_1,b_2,\quad,b_n$均为实数，则：

$$(a_1{}^2+a_2{}^2+\quad+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\quad+b_n{}^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+\quad+a_nb_n)^2\qquad(8)$$

当且仅当$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\quad=\dfrac{a_n}{b_n}$时，等号成立.

（8）式为柯西不等式

9.2 柯西不等式变形为：

$$\left(\frac{a_1{}^2+a_2{}^2+\quad+a_n{}^2}{n}\right)\left(\frac{b_1{}^2+b_2{}^2+\quad+b_n{}^2}{n}\right)\ge\left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+\quad+a_nb_n}{n}\right)^2\qquad(9)$$

简称“平方均值两乘积，大于积均值平方”

我们将$\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\quad+a_nb_n}{n}$简称为积均值，记：$D_n=\sqrt{\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\quad+a_nb_n}{n}}$.

则：$\left[Q_n(a)\right]^2\left[Q_n(b)\right]^2\ge\left[D_n(ab)\right]^4$，即$\sqrt{Q_n(a)Q_n(b)}\ge D_n(ab)$　　　（10）

9.3 推论 1：若a,b,c,x,y,z为实数，$x,y,z>0$，则：

$$\frac{a_1{}^2}{b_1}+\frac{a_2{}^2}{b_2}+\quad+\frac{a_n{}^2}{b_n}\ge\frac{(a_1+a_2+\quad+a_n)^2}{b_1+b_2+\quad+b_n}\qquad(11)$$

当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时，等号成立.

（11）式是柯西不等式的推论，称权方和不等式.

9.4 推论 2：若$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$均为实数，则：

$$\sqrt{{a_1}^2+b_1^2}+\sqrt{{a_2}^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{{a_n}^2+b_n^2}\ge\sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2} \quad (12)$$

当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时，等号成立.

9.5 推论 3：若a,b,c,x,y,z为正实数，则：

$$\frac{x}{y+z}(b+c)+\frac{y}{x+z}(a+c)+\frac{z}{y+x}(a+b)\ge\sqrt{3(ab+bc+ca)} \quad (13)$$

5. 切比雪夫不等式

10.1 若$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$，$b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$且均为实数，则：

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)\ge n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n) \quad (14)$$

当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$或$b_1=b_2=\cdots=b_n$时，等号成立.

（14）式为切比雪夫不等式.

由于有$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$，$b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$条件，即序列同调，

所以使用时，常采用 WLOG $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$

（注释：WLOG=Without Loss Of Generality 不失一般性）

10.2 切比雪夫不等式常常表示为：

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right)\ge\left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\right) \quad (15)$$

简称：“切比雪夫同调数，均值积小积均值”.

即：对切比雪夫不等式采用同单调性的两个序列表示时，两个序列数的均值之积不大于两个序列数各积之均值，则：

$A_n(a)A_n(b)\le\left[D_n(ab)\right]^2$.

即：$\sqrt{A_n(a)A_n(b)}\le D_n(ab)$　　(16)

6. 排序不等式

11.1 若$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$；$b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$为实数，对于$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的任何轮换$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，都有下列不等式：

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ge x_1b_1+x_2b_2+\cdots+x_nb_n\ge a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n \quad (17)$$

（17）式称排序不等式（也称重排不等式）.

其中，$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$称正序和，$a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n$称反序和，$x_1b_1+x_2b_2+\cdots+x_nb_n$称乱序和.

姑（17）式可记为：正序和≥乱序和≥反序和　　(18)

11.2 推论：若$a_1,a_2,\cdots,a_n$为实数，设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的一个排序，则：

$$a_1^{\ 2}+a_2^{\ b_2}+\cdots+a_n^{\ 2}\ge x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n \quad (19)$$

7. 琴生不等式

12.1 定义凸函数：对一切$x,y\in[a,b],\alpha\in(0,1)$，若函数$f:[a,b]\to R$是向下凸函数，则

$$f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\le f(x)+(1-\alpha)f(y) \quad (20)$$

（20）式是向下凸函数的定义式.

注：$f:[a,b]\to R$表示区间$[a,b]$和函数$f(x)$在区间$[a,b]$都是实数.

12.2 若$f:(a,b)\to R$对任意$x\in(a,b)$，存在二次导数$f''(x)\ge0$，则在(a,b)区间为向下凸函数，当且仅当$x\in(a,b)$时，若$f''(x)>0$，则$f(x)$在区间(a,b)为严格向下凸函数.

12.3 若$f_1,f_2,\cdots,f_n$在区间(a,b)为向下凸函数，则函数$c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n$在区间$(a,b)$对任何$c_1,c_2,\cdots,c_n\in(0,+\infty)$也是向下凸函数.

12.4 若$f:(a,b)\to R$是一个在(a,b)区间的向下凸函数，设$n\in N,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in(0,1)$为实数，且$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$，则对任何$x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$，有：

$$f\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\quad+\alpha_n x_n\right)\le\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+\quad+\alpha_n f(x_n) \qquad (21)$$

（21）式就是加权的琴生不等式

简称：“对于向下凸函数，均值的函数值不大于函数的均值”

8. 波波维奇亚不等式

13.1 若 $f:[a,b]\to R$ 是一个在 $[a,b]$ 区间的向下凸函数，则对一切 $x,y,z\in[a,b]$，有：

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}\ge\frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right] \qquad (22)$$

（22）式就是波波维奇亚不等式.

13.2 波波维奇亚不等式可以写成：

$$\frac{f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}}{2}\ge\frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{z+x}{2}\right)}{3} \qquad (23)$$

简称：“对于向下凸函数的三点情况，三点均值的函数与函数的均值之平均值，不小于两点均值的函数值之平均值”.

13.3 若 $f:[a,b]\to R$ 是一个在 $[a,b]$ 区间的向下凸函数，$a_1,a_2,\quad,a_n\in[a,b]$，则：

$$f(a_1)+f(a_2)+\quad+f(a_n)+n(n-2)f(a)\ge(n-1)\left[f(b_1)+f(b_2)+\quad+f(b_n)\right] \qquad (24)$$

其中 $a=\dfrac{a_1+a_2+\quad+a_n}{n}.b_i=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i\ne j}a_j$，（对所有的 i）

（24）式是普遍的波波维奇亚不等式.

当 $a_1=x,a_2=y,a_3=z,n=3$ 时，$a=\dfrac{x+y+z}{2},b_1=\dfrac{y+z}{2},b_2=\dfrac{z+x}{2},b_3=\dfrac{x+z}{2}$ 代入（23）式得：

即：$3f\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)+f(x)+f(y)+f(z)\ge2\left[f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)+f\left(\dfrac{y+z}{2}\right)+f\left(\dfrac{z+x}{2}\right)\right]$ （25）

（25）式正是（22）式.

9. 加权不等式

14.1 若 $a_i\in(0,+\infty),\alpha_i\in[0,1](i=1,2,\quad,n)$ 且，则 $\alpha_1+\alpha_2+\quad+\alpha_n=1$：

$$a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_1}\quad a_n^{\alpha_n}\le a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\quad+a_n\alpha_n \qquad (26)$$

（26）式就是加权的均值不等式，简称加权不等式.

（26）式形式直接理解为：几何均值不大于算数均值.

10. 赫尔德不等式

15.1 若实数 $a,b>0$，实数 $p,q>1$ 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则：$ab\le\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$ （27）

当且仅当 $a^p=b^q$ 时，等号成立.

（27）式称为杨氏不等式

15.2 若 $a_1,a_2,\quad,a_n$ 和 $b_1,b_2,\quad,b_n$ 为正实数，$p,q>1$ 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则：

$$a_1b_1+a_2b_2+\quad+a_nb_n\le\left(a_1^p+a_2^p+\quad+a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q+b_2^q+\quad+b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (28)$$

（28）式称为赫尔德不等式

当且仅当 $\dfrac{a_1^p}{b_1^q}=\dfrac{a_2^p}{b_2^q}=\quad=\dfrac{a_n^p}{b_n^q}$ 时，等号成立.

15.3 赫尔德不等式还可以写成：

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\quad+a_nb_n}{n}\le\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\quad+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{b_1^q+b_2^q+\quad+b_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (29)$$

即：$[D_n(ab)]^2\le M_p(a)M_q(b)$ ，即：$\sqrt{M_p(a)M_q(b)}\ge D_n(ab)$ （30）

简称：“幂均值的几何均值不小于积均值”.

（注：赫尔德与切比雪夫的不同点：赫尔德要求是$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，切比雪夫要求是同调；赫尔德的积均值小，切比雪夫的积均值大）

15.4 若$a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$和$m_1,m_2,\cdots,m_n$为三个实数序列，$p,q>1$且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则：

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_im_i \le \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{p}m_i\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{q}m_i\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (31)$$

（31）式称为加权赫尔德不等式.

当且仅当：$\frac{a_1^p}{b_1^q}=\frac{a_2^p}{b_2^q}=\cdots=\frac{a_n^p}{b_n^q}$时，等号成立.

15.5 若$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为正实数且$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$，则：

$$\sum_{i=1}^{m}(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}^{\alpha_j})\le\prod_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij})^{\alpha_j} \qquad (32)$$

（32）式称为普遍的赫尔德不等式.

15.6 推论：若$a_1,a_2,a_3\in N^+,b_1,b_2,b_3\in N^+,c_1,c_2,c_3\in N^+$，则：

$$(a_1^3+a_2^3+a_3^3)(b_1^3+b_2^3+b_3^3)(c_1^3+c_2^3+c_3^3)\ge(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3)^3 \qquad (33)$$

简称：“立方和的乘积不小于乘积的立方”.

11. 闵可夫斯基不等式

16.1 若$a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$为正实数，且$p>1$，则：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}b_i^p)^{\frac{1}{p}} \qquad (34)$$

当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时，等号成立.（34）式称为第一闵可夫斯基不等式.

16.2 若$a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$为正实数，且$p>1$，则：

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^p+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\sum_{i=1}^{n}(a_i^p+b_i^p)^{\frac{1}{p}} \qquad (35)$$

当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时，等号成立.（35）式称为第二闵可夫斯基不等式

16.3 若$a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n;m_1,m_2,\cdots,m_n$为正实数，且$p>1$，则：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^pm_i\right)^{\frac{1}{p}}\le(\sum_{i=1}^{n}a_i^pm_i)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}b_i^pm_i)^{\frac{1}{p}} \qquad (36)$$

当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时，等号成立.（36）式称为第三闵可夫斯基不等式

12. 牛顿不等式

17.1 若$a_1,a_2,\cdots,a_n$为任意实数，考虑多项式：

$$P(x)=(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x^1+c_n \qquad (37)$$

的系数$c_0,c_1,\cdots,c_n$作为$a_1,a_2,\cdots,a_n$的函数可表达为：

$c_0=1;$

$c_1=a_1+a_2+\quad+a_n;$

$c_2=a_1a_2+a_1a_3+\quad+a_{n-1}a_n=\sum a_ia_j;(i<j\le n)$

$c_3=\sum a_ia_ja_k;(i<j<k\le n)$

$c_n=a_1a_2\quad a_n;$

对每个$k=1,2,\quad,n$，我们定义 $P_k=\dfrac{c_k}{C_n^k}=\dfrac{k!(n-k)!}{n!}c_k$ （38）

则（37）式类似于二项式定理，系数为：$c_k=C_n^kP_k$.

17.2 若$a_1,a_2,\quad a_n$为正实数，则对每个$k=1,2,\quad,n-1$有：

$P_{k-1}P_{k+1}\le P_k^2$ （39）

当且仅当$a_1=a_2=\quad=a_k$时，等号成立.（39）式称为牛顿不等式.

13. 麦克劳林不等式

13.1. 若$a_1,a_2,\quad a_n$为正实数，按（38）定义，则：

$p_1\ge p_2^{\frac{1}{2}}\ge p_3^{\frac{1}{3}}\ge\quad\ge p_k^{\frac{1}{k}}\ge\quad\ge p_n^{\frac{1}{n}}$ （40）

当且仅当$a_1=a_2=\quad=a_k$时，等号成立.

（40）式称麦克劳林不等式.

14. 定义多项式

19.1 若$x_1,x_2,\quad x_n$为正实数序列，并设$\alpha_1,\alpha_2,\quad\alpha_n$为任意实数

记：$F(x_1,x_2,\quad x_n)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\quad x_n^{\alpha_n}$；

$T\left[\alpha_1,\alpha_2,\quad\alpha_n\right]$为$F(x_1,x_2,\quad x_n)$所有可能的积之和，遍及$\alpha_1,\alpha_2,\quad\alpha_n$的所有轮换。

19.2 举例说明

（1）$T\left[1,0,0\right]$：表示共有 3 个参数的所有积之和，共有$3!=6$项，第 1 个参数的指数是 1，第 2 个和第 3 个参数的指数是 0.

故：$T\left[1,0,0\right]=(3-1)!\cdot(x^1y^0z^0+y^1x^0z^0+z^1y^0x^0)=2(x+y+z)$.

（2）$T\left[1,1\right]$：表示共有 2 个参数的所有积之和，共有$2!=2$项.第 1 个和第 2 个参数的指数是 1.

故：$T\left[1,1\right]=(2-1)!\cdot(x^1y^1)=2xy$.

（3）$T\left[1,2\right]$：表示共有 2 个参数的所有积之和，共有$2!=2$项.第 1 个参数的指数为 1，第 2 个参数的指数是 2.

故：$T\left[1,2\right]=(2-1)!\cdot(x^1y^2+y^1x^2)=xy^2+x^2y$.

（4）$T\left[1,2,1\right]$：表示共有 3 个参数的所有积之和，共有$3!=6$项.第 1 个参数的指数为 1，第 2 个参数的指数是 2，第 3 个参数的指数是 1.

故：$T\left[1,2,1\right]=2(xy^2z+x^2yz+xyz^2)$.

即：$T\left[1,2,1\right]=T\left[2,1,1\right]$.

（5）$T\left[2,1,0\right]$：表示共有 3 个参数的所有积之和，共有$3!=6$项.第 1 个参数的指数为 2，第 2 个参数的指数是 1，第 3 个参数的指数是 0.

故：$T\left[2,1,0\right]=x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y$.

（6）$T\left[3,0,0\right]$：表示共有 3 个参数的所有积之和，共有$3!=6$项.第 1 个参数的指数为 3，第 2 个参数的指数是 0，第 3 个参数的指数是 0.

故：$T\left[3,0,0\right]=2(x^3+y^3+z^3)$.

（7）$T\left[a,b,c\right]$：表示共有 3 个参数的所有积之和，共有项.第 1 个参数的指数为 a，第 2 个参数的指数是 b，第 3 个参数的指数是 c.

故：$T\left[a,b,c\right]=x^a y^b z^c+x^a y^c z^b+x^b y^c z^a+x^b y^a z^c+x^c y^a z^b+x^c y^b z^a$.

由于$T\left[a,b,c\right]=T\left[a,c,b\right]=\left[c,b,a\right]=$　表达式比较多.

所以我们规定：$T\left[a,b,c\right](a\ge b\ge c)$.

15. 舒尔不等式

20.1 若$\alpha\in R$，且$\beta>0$，则：

$$T\left[\alpha+2\beta,0,0\right]+T\left[\alpha,\beta,\beta\right]\ge 2T\left[\alpha+\beta,\beta,0\right] \quad (41)$$

（41）式称为舒尔不等式.

20.2 解析（41）式

$$T\left[\alpha+2\beta,0,0\right]=2(x^{\alpha+2\beta}+y^{\alpha+2\beta}+z^{\alpha+2\beta});$$

$$T\left[\alpha,\beta,\beta\right]=2(x^{\alpha}y^{\beta}z^{\beta}+x^{\beta}y^{\alpha}z^{\beta}+x^{\beta}y^{\beta}z^{\alpha});$$

$$T\left[\alpha+\beta,\beta,0\right]=x^{\alpha+\beta}y^{\beta}+x^{\beta}y^{\alpha+\beta}+y^{\alpha+\beta}z^{\beta}+y^{\beta}z^{\alpha+\beta}+x^{\alpha+\beta}z^{\beta}+x^{\beta}z^{\alpha+\beta};$$

将上式代入（41）式得：

$$x^{\alpha+2\beta}+y^{\alpha+2\beta}+z^{\alpha+2\beta}+x^{\alpha}y^{\beta}z^{\beta}+x^{\beta}y^{\alpha}z^{\beta}+x^{\beta}y^{\beta}z^{\alpha}$$

$$\ge x^{\alpha+\beta}y^{\beta}+x^{\beta}y^{\alpha+\beta}+y^{\alpha+\beta}z^{\beta}+y^{\beta}z^{\alpha+\beta}+x^{\alpha+\beta}z^{\beta}+x^{\beta}z^{\alpha+\beta}$$

即：$x^{\alpha+2\beta}+y^{\alpha+2\beta}+z^{\alpha+2\beta}+x^{\alpha}y^{\beta}z^{\beta}+x^{\beta}y^{\alpha}z^{\beta}+x^{\beta}y^{\beta}z^{\alpha}$

$-(x^{\alpha+\beta}y^{\beta}+x^{\beta}y^{\alpha+\beta}+y^{\alpha+\beta}z^{\beta}+y^{\beta}z^{\alpha+\beta}+x^{\alpha+\beta}z^{\beta}+x^{\beta}z^{\alpha+\beta})\ge 0$

即：$x^{\alpha}(x^{2\beta}+y^{\beta}z^{\beta}-x^{\beta}y^{\beta}-x^{\beta}z^{\beta})+y^{\alpha}(y^{2\beta}+x^{\beta}z^{\beta}-x^{\beta}y^{\beta}-x^{\beta}z^{\beta})$

$+z^{\alpha}(z^{2\beta}+x^{\beta}y^{\beta}-y^{\beta}z^{\beta}-x^{\beta}z^{\beta})\ge 0$

即：$x^{\alpha}\left(x^{\beta}-y^{\beta}\right)\left(x^{\beta}-z^{\beta}\right)+y^{\alpha}\left(y^{\beta}-x^{\beta}\right)\left(y^{\beta}-z^{\beta}\right)+z^{\alpha}\left(z^{\beta}-x^{\beta}\right)\left(z^{\beta}-y^{\beta}\right)\ge 0;(42)$

（42）式与（41）式等价，称为舒尔不等式。

20.3 若实数$x,y,z>0$，设$t\in R$，则：

$$x^t(x-y)(x-z)+y^t(y-z)(y-x)+z^t(z-x)(z-y)\ge 0 \quad (43)$$

当且仅当：$x=y=z$ 或$x=y,z=0$ 及轮换，等号成立.

按照（41）式写法，即：$\alpha=t,\beta=t$，则：

$$T\left[t+2,0,0\right]+T\left[t,1,1\right]\ge 2T\left[t+1,1,0\right] \quad (44)$$

（43）式是我们最常见的舒尔不等式形式。

20.4. 推论：设实数$x,y,z>0$，实数$a,b,c>0$且$a\ge b\ge c$或$a\le b\le c$，则：

$$a(x-y)(x-z)+b(y-z)(y-x)+c(z-x)(z-y)\ge 0 \quad (45)$$

（44）式中，$x^t=a,y^t=b,z^t=c$ 就得到（45）式.

20.5. 推论：设实数$x,y,z>0$，则：

$$3xyz+x^3+y^3+z^3\ge 2\left[\left(xy\right)^{\frac{3}{2}}+\left(yz\right)^{\frac{3}{2}}+\left(zx\right)^{\frac{3}{2}}\right] \quad (46)$$

20.6. 推论：若$k\in\left(0,3\right]$，则对于一切$a,b,c\in R^+$，有：

$$(3-k)+k(abc)^{\frac{2}{k}}+a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc+ca) \quad (47)$$

16. 定义序列

16.1. 设存在两个序列$\left(\beta_i\right)_{i=1}^{n}=(\beta_1,\beta_2,\quad,\beta_n)$和$\left(\alpha_i\right)_{i=1}^{n}=(\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_n)$，当满足下列条件：

（1）：$\beta_1+\beta_2+\quad+\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\quad+\alpha_n$；（i）

（2）：$\beta_1\ge\beta_2\ge\quad\ge\beta_n$且$\alpha_1\ge\alpha_2\ge\quad\ge\alpha_n$；（ii）

（3）：$\beta_1+\beta_2+\quad+\beta_s\le\alpha_1+\alpha_2+\quad+\alpha_s$；　（iii）

对一切$s\in\left[1,n\right]$，（iii）式都成立

则：$\left(\beta_i\right)_{i=1}^{n}$ 就是$\left(\alpha_i\right)_{i=1}^{n}$ 的优化值，记作：. $\beta_i<\alpha_i$

注：这里的序列只有定性的比较，没有定量的比较.

17. 缪尔海德不等式

17.1.若为非负实数序列，设和为正实数序列，且，则：

（48）

当且仅当或时，等号成立.

（48）式就是缪尔海德不等式.

18. **卡拉玛塔不等式**

23.1 设在实数区间 $I \subset R$ 的函数 f 为向下凸函数，且当 $a_i, b_i \in I(i=1,2,\quad,n)$ 两个序列 $\left(\alpha_i\right)_{i=1}^{n}$ 和 $\left(b_i\right)_{i=1}^{n}$ 满足 $\left(a_i\right) > \left(b_i\right)$，则：

$$f(a_1)+f(a_2)+\quad+f(a_n) \ge f(b_1)+f(b_2)+\quad+f(b_n) \qquad (50)$$

（50）式称为拉玛塔不等式.

23.2 若函数 f 为严格向下凸函数，即不等取等号，$\left(a_i\right) \ne \left(b_i\right)$，且 $\left(a_i\right) > \left(b_i\right)$，则：

$$f(a_1)+f(a_2)+\quad+f(a_n) > f(b_1)+f(b_2)+\quad+f(b_n) \qquad (51)$$

若函数 f 为严格向上凸函数，则（51）式称卡拉玛塔不等式反向。

19. 单调函数不等式

24.1 若函数 $f:(a,b) \to R$ 在区间 (a,b) 对一切 $x, y \in (a,b)$ 为单调增函数，则当 $x \ge y$ 时，有 $f(x) \ge f(y)$；若 f 在区间 (a,b) 对一切 $x, y \in (a,b)$ 为严格单调增函数，当 $x > y$ 时，有 $f(x) > f(y)$.

24.2 若函数 $f:(a,b) \to R$ 在区间 (a,b) 对一切 $x, y \in (a,b)$ 为单调减函数，则当 $x \ge y$ 时，有 $f(x) \le f(y)$；若 f 在区间 (a,b) 对一切 $x, y \in (a,b)$ 为严格单调减函数，当 $x > y$ 时，有 $f(x) < f(y)$.

24.3 若实数函数 $f:(a,b) \to R$ 在区间 (a,b) 为可导函数，当对一切 $x, y \in (a,b), f'(x) \ge 0$，则 f 在区间 (a,b) 为单调递增函数；当对一切 $x, y \in (a,b), f'(x) \le 0$，则 f 在区间 (a,b) 为单调递减函数.

24.4 设两个函数 $f:\left[a,b\right] \to R$ 和 $g:\left[a,b\right] \to R$ 满足下列条件：

1) 函数 f 和 g 在 $\left[a,b\right]$ 区间是连续的，且 $f\left(a\right)=f\left(b\right)$；
2) 函数 f 和 g 在 $\left[a,b\right]$ 区间可导；
3) 导数 $f'(x) > g'(x)$ 对一切 $x \in (a,b)$ 成立，

则对一切 $x \in (a,b)$ 有： $f(x) > g(x)$ （52）

（52）式就是单调函数不等式.

25.3 个对称变量 pqr 法

25.1 设 $x, y, z \in R^+$，对于具有对称形式的不等式，采用下列变量代换：

$p = x+y+z; q = xy+yz+zx; r = xyz$，则 $p, q, r \in R^+$.

代换后的不等式 $f(p,q,r)$，很容易看出满足的不等式关系，这样证明不等式的方法称为 pqr 法.

25.2 常用的代换如下：

1) $\sum\limits_{cyc} x^2 = p^2 - 2q$

2) $\sum\limits_{cyc} x^3 = p(p^2-3q)+3r$

3) $\sum\limits_{cyc} x^2y^2 = q^2 - 2pr$

4) $(x+y)(y+z)(z+x) = pq - r$

5) $\sum\limits_{cyc} (x+y)(y+z) = p^2 + q$

6) $\sum\limits_{cyc} xy(x+y) = pq - 3r$

7) $(x+1)(y+1)(z+1) = 1+p+q+r$

8) $\sum\limits_{cyc} (x+1)(y+1) = 3+2p+q$

9) $\sum\limits_{cyc} x^2(y+z) = \sum\limits_{cyc} xy(y+x) = pq - 3r$

25.3 常用的 pqr 法的不等式

若 $x, y, z \ge 0$，则：

1）$p^3+qr\ge 4pq$

2)$pq\ge 9r$

3)$p^2\ge 3q$

4)$p^3\ge 27r$

5)$q^3\ge 27r^2$

6)$q^2\ge 3pr$

7)$2p^3+9r\ge 7pq$

8)$2p^3+9r^2\ge 7pqr$

9)$p^2q+3pr\ge 4q^2$

26.3 个对称变量 uvw 法

26.1 在$a,b,c\in R^+$的不等式中，采用下列变量代换：

$3u=a+b+c;3v^2=ab+bc+ca;w^3=abc$

上述变换强烈含有“平均”的意味：

u 对应“算术平均值”；v 对应“积均值”；w 对应“几何平均值”.

26.2 当$a,b,c\ge 0$时，则：$u\ge v\ge w$　　　　（53）

（53）式称为傻瓜不等式.

即：“算术平均值”≥“积均值”≥“几何平均值”.

26.3 若$a,b,c\ge 0$，则 u，v^2，$w^3\ge 0$　　　　（54）

（54）式称为正值定理.

26.4 若u，v^2，$w^3\in \mathrm{R}$，任给$a,b,c\in R$，当且仅当$u^2\ge v^2$，

且$w^3\in\left[3uv^2-2u^3-2\sqrt{(u^2-v^2)^3},3uv^2-2u^3+2\sqrt{(u^2-v^2)^3}\right]$时，

则：$3u=a+b+c,3v^2=ab+bc+ca,w^3=abc$ 等式成立。

这称为 uvw 定理.

27. ABC 法

27.1ABC 法即 Abstract Concreteness Method

设$p=x+y+z+yz;q=xy+yz+zx;r=xyz$.

则函数$f(x,y,z)$变换为$f(r,q,p)$.

这与 3 个对称变量 pqr 法类似.

27.2 若函数$f(r,q,p)$是单调的，则当$(x-y)(y-z)(z-x)=0$时，$f(r,q,p)$达到极值.

27.3 若函数$f(r,q,p)$是凸函数，则当$(x-y)(y-z)(z-x)=0$时，$f(r,q,p)$达到极值.

27.4 若函数$f(r,q,p)$是r的线性函数，则当$(x-y)(y-z)(z-x)=0$时，$f(r,q,p)$达到极值.

27.5 若函数$f(r,q,p)$是r的二次三项式，则当$(x-y)(y-z)(z-x)=0$时，$f(r,q,p)$达到极值.

28.SOS 法

23.1 SOS 法即 Sum Of Squares

23.2 本法的全部思想是将给出的不等式改写成以下形式：

$S=S_a(b-c)^2+S_b(a-c)^2+S_c(a-b)^2$　(55)

其中，S_aS_b,S_c分别都是 a,b,c 的函数.

(1)若$S_aS_b,S_c\ge 0$,则$S\ge 0$；

(2)若$a\ge b\ge c$或$a\le b\le c$,且$S_b,S_b+S_a,S_b+S_c\ge 0$,则$S\ge 0$；

(3)若$a\ge b\ge c$或$a\le b\le c$,且$S_\alpha,S_c,S_a+2S_b,S_c+2S_b\ge 0$,则$S\ge 0$；

(4)若$a\ge b\ge c$,且$S_b,S_c,a^2S_b+b^2S_a\ge 0$,则$S\ge 0$；

(5)若$S_a+S_b\ge 0$或$S_b+S_c\ge 0$或$S_c+S_a\ge 0$,且$S_aS_b+S_bS_c+S_cS_a\ge 0$,则$S\ge 0$.

28.3 常用形式

（1）$\sum\limits_{cyc}a^2-\sum\limits_{cyc}ab=\frac{1}{2}\sum\limits_{cyc}(a-b)^2$；

（2） $\sum\limits_{cyc} a^3-3abc=\frac{1}{2}\sum\limits_{cyc} a\sum\limits_{cyc}(a-b)^2$

（3） $\sum\limits_{cyc} a^2b-\sum\limits_{cyc} ab^2=\frac{1}{3}\sum\limits_{cyc}(a-b)^3$

（4） $\sum\limits_{cyc} a^3-\sum\limits_{cyc} a^2b=\frac{1}{3}\sum\limits_{cyc}(2a+b)(a-b)^2$ ；

（5） $\sum\limits_{cyc} a^3b-\sum\limits_{cyc} ab^3=\frac{1}{3}\sum\limits_{cyc} a\sum\limits_{cyc}(b-a)^3$ ；

（6） $\sum\limits_{cyc} a^4-\sum\limits_{cyc} a^2b^2=2\sum\limits_{cyc}(a+b)^2(a-b)^2$

29.SMV 法

29.1 SMV 法即 Strong Mixing Variables Method

本法对多于 2 个变量的对称不等式非常有用.

29.2 设 $(x_1,x_2,\quad,x_n)$ 为任意实数序列，

(1)选择 $i,j\in\{1,2,\quad n\}$ 使 $x_i=min\{x_1,x_2,\quad,x_n\}$，$x_j=max\{x_1,x_2,\quad,x_n\}$；

(2)用其平均数 $\frac{x_i+x_j}{2}$. 代替 x_i 和 x_j，经过多次代换后各项 $x_i(i=1,2,\quad,n)$ 都趋于相同的极限 $x=\frac{x_1+x_2+\quad+x_n}{n}$.

29.3 设实数空间的函数 F 是一个对称的连续函数，满足

$F(a_1,a_2\qquad a_n)\ge F(b_1,b_2,\quad,b_n)$ （56）

其中，$(b_1,b_2,\quad,b_n)$ 序列是由 $(a_1,a_2,\quad,a_n)$ 序列经过预定义变换而得到的.

预定义变换可根据当前的题目灵活采用，如：$\frac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab},\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 等等.

29.01 例题说明

例题：设实数 $a,b,c>0$，证明：$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

解析：采用 SMV 法.

设：$f(a,b,c)=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ ①

则：$f(t,t,c)=\frac{t}{t+c}+\frac{t}{c+t}+\frac{c}{t+t}=\frac{2t}{t+c}+\frac{c}{2t}$ ②

其中，$t=\frac{a+b}{2}$.

由②得：$f(t,t,c)=\frac{2t}{t+c}+(\frac{c}{2t}+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=(\frac{2t}{t+c}+\frac{c+t}{2t})-\frac{1}{2}\ge 2-\frac{1}{2}\ge\frac{3}{2}$

由(56)式得：$f(a,b,c)\ge f(t,t,c)\ge\frac{3}{2}$ 证毕.

30.拉格朗日乘数法

30.1 设函数 $f(x_1,x_2,\quad,x_n)$ 在实数空间的 $\mathrm{I}\in\mathrm{R}$ 连续可导，且 $g_i(x_1,x_2\qquad x_n)=0$，其中（$i=1,2,\quad k$）即有 k 个约束条件，则 $f(x_1,x_2,\quad,x_n)$ 的极值出现在 I 区间的边界或偏导数(函数为 $L=f-\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i g_i$.)全部为零的点上

这就是拉格朗日乘数法.

31.三角不等式

30.1 设 $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\pi)$，且 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，则 a，β，y 就是同一个三角形的内角.

30.2 若α，β，γ为同一个三角形的内角，则有下列不等式：

（1） $sin\alpha+sin\beta+sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$；

2） $cos\alpha+cos\beta+cos\gamma\le\frac{3}{2}$；

3 $sin\alpha sin\beta sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ；

(4) $cos\alpha cos\beta cos\gamma s\frac{1}{8}$；

（5）$sin^2\alpha+sin^2\beta+sin^2\gamma\le\frac{9}{4}$；

（6）$cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma\ge\frac{3}{4}$；

（7）$tan\alpha+tan\beta+tan\gamma\ge3\sqrt{3}$（锐角三角形）；

（8）$cot\alpha+cot\beta+coty\ge\sqrt{3}$；

（9）$sin\frac{\alpha}{2}+sin\frac{\beta}{2}+sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{3}{2}$；

（10）$cos\frac{\alpha}{2}+cos\frac{\beta}{2}+cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$；

（11）$sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}$；

（12）$cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$；

（13）$sin^2\frac{\alpha}{2}+sin^2\frac{\beta}{2}+sin^2\frac{\gamma}{2}\ge\frac{3}{4}$；

（14）$cos^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\beta}{2}+cos^2\frac{\gamma}{2}\le\frac{9}{4}$；

（15）$tan\frac{\alpha}{2}+tan\frac{\beta}{2}+tan\frac{\gamma}{2}\ge\sqrt{3}$；

（16）$cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2}+cot\frac{\gamma}{2}\ge3\sqrt{3}$；

31. 解连不等式 $N<f(x)<M$ 常有以下转化形式

$$N<f(x)<M\Leftrightarrow[f(x)-M][f(x)-N]<0$$

$$\Leftrightarrow|f(x)-\frac{M+N}{2}|<\frac{M-N}{2}\Leftrightarrow\frac{f(x)-N}{M-f(x)}>0\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)-N}>\frac{1}{M-N}.$$

32. 常用不等式：

（1）$a,b\in R\Rightarrow a^2+b^2\ge2ab$（当且仅当 a＝b 时取“=”号）.

（2）$a,b\in R^+\Rightarrow\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$（当且仅当 a＝b 时取“=”号）.

（3）$a^3+b^3+c^3\ge3abc(a>0,b>0,c>0)$.

（4）柯西不等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2,a,b,c,d\in R.$$

（5）$|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$.

33. 极值定理

已知 x,y 都是正数，则有

（1）若积 xy 是定值 p，则当 $x=y$ 时和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$；

（2）若和 $x+y$ 是定值 s，则当 $x=y$ 时积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}s^2$.

推广 已知$x,y\in R$，则有$(x+y)^2=(x-y)^2+2xy$

（1）若积xy是定值,则当$|x-y|$最大时,$|x+y|$最大;

当$|x-y|$最小时,$|x+y|$最小.

（2）若和$|x+y|$是定值,则当$|x-y|$最大时，$|xy|$最小;

当$|x-y|$最小时，$|xy|$最大.

34. 一元二次不等式$ax^2+bx+c>0(或<0)$ $(a\neq 0,\Delta=b^2-4ac>0)$，如果$a$与$ax^2+bx+c$同号，则其解集在两根之外；如果$a$与$ax^2+bx+c$异号，则其解集在两根之间. 简言之：同号两根之外，异号两根之间.

$x_1<x<x_2\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)<0(x_1<x_2)$；

$x<x_1,或x>x_2\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)>0(x_1<x_2)$.

35. 含有绝对值的不等式

当a＞0时，有

$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a$.

$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x>a$或$x<-a$.

36. 无理不等式

（1）$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)\geq 0\\ f(x)>g(x)\end{cases}$.

（2）$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)\geq 0\\ f(x)>[g(x)]^2\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)<0\end{cases}$.

（3）$\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)>0\\ f(x)<[g(x)]^2\end{cases}$.

37. 指数不等式与对数不等式

(1)当$a>1$时, $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$;

$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\\ f(x)>g(x)\end{cases}$.

(2)当$0<a<1$时, $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$;

$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\\ f(x)<g(x)\end{cases}$

第2 章　　函数

001. 几个近似值：　$\sqrt{2}\approx 1.414$,、$\sqrt{3}\approx 1.732$,、$\sqrt{5}\approx 2.236$, $\pi\approx 3.142$, $e\approx 2.718$, $e^2\approx 7.389$,

$\ln 3\approx 1.0986$, $\ln 2\approx 0.693$,

002. 分数指数幂公式:

(1) $a^{\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ （$a>0,m,n\in N^*$，且$n>1$）.

(2) $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ （$a>0,m,n\in N^*$，且$n>1$）.

003. 二次函数的解析式的三种形式

(1)一般式 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；

(2)顶点式 $f(x)=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$；

(3)零点式 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$

004.方程 $f(x)=0$ 在 (k_1,k_2) 上有且只有一个实根，与 $f(k_1)f(k_2)<0$ 不等价，前者是后者的一个必要而不是充分条件.特别地，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有且只有一个实根在 (k_1,k_2) 内，等价于 $f(k_1)f(k_2)<0$，或 $f(k_1)=0$ 且 $k_1<-\frac{b}{2a}<\frac{k_1+k_2}{2}$，或 $f(k_2)=0$ 且 $\frac{k_1+k_2}{2}<-\frac{b}{2a}<k_2$.

005.闭区间上的二次函数的最值

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在闭区间 $[p,q]$ 上的最值只能在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处及区间的两端点处取得，具体如下：

(1)当 a>0 时，若 $x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$，则 $f(x)_{\min}=f(-\frac{b}{2a}),f(x)_{\max}=\max\{f(p),f(q)\}$；

$x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$，$f(x)_{\max}=\max\{f(p),f(q)\}$，$f(x)_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$.

当 a<0 时，若 $x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$，则 $f(x)_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$，

$x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$，则 $f(x)_{\max}=\max\{f(p),f(q)\}$，$f(x)_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$.

006.一元二次方程的实根分布

依据：若 $f(m)f(n)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 (m,n) 内至少有一个实根 .

设 $f(x)=x^2+px+q$，则

方程 $f(x)=0$ 在区间 $(m,+\infty)$ 内有根的充要条件为 $f(m)=0$ 或 $\begin{cases}p^2-4q\geq 0\\ -\frac{p}{2}>m\end{cases}$；

（2）方程 $f(x)=0$ 在区间 (m,n) 内有根的充要条件为 $f(m)f(n)<0$ 或 $\begin{cases}f(m)>0\\ f(n)>0\\ p^2-4q\geq 0\\ m<-\frac{p}{2}<n\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(m)=0\\ f(n)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(n)=0\\ f(m)>0\end{cases}$；

（3）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-\infty,n)$ 内有根的充要条件为 $f(m)<0$ 或 $\begin{cases}p^2-4q\geq 0\\ -\frac{p}{2}<m\end{cases}$.

007.定区间上含参数的二次不等式恒成立的条件依据

(1)在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间 L（形如 $[\alpha,\beta]$，$(-\infty,\beta]$，$[\alpha,+\infty)$ 不同）上含参数的二次不等式 $f(x,t)\geq 0$（t 为参数）恒成立的充要条件是 $f(x,t)_{\min}\geq 0(x\notin L)$.

(2)在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间上含参数的二次不等式 $f(x,t)\geq 0$（t 为参数）恒成立的充要条件是 $f(x,t)_{man}\leq 0(x\notin L)$.

(3) $f(x)=ax^4+bx^2+c>0$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases}a\geq 0\\ b\geq 0\\ c>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\ b^2-4ac<0\end{cases}$.

008.函数的单调性

(1)设 $x_1\cdot x_2\in[a,b],x_1\neq x_2$ 那么

$(x_1-x_2)\left[f(x_1)-f(x_2)\right]>0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0 \Leftrightarrow f(x)$在$\left[a,b\right]$上是增函数;

$(x_1-x_2)\left[f(x_1)-f(x_2)\right]<0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0 \Leftrightarrow f(x)$在$\left[a,b\right]$上是减函数.

(2)设函数$y=f(x)$在某个区间内可导，如果$f'(x)>0$，则$f(x)$为增函数；如果$f'(x)<0$，则$f(x)$为减函数.

009. 如果函数$f(x)$和$g(x)$都是减函数,则在公共定义域内,和函数$f(x)+g(x)$也是减函数；如果函数$y=f(u)$和$u=g(x)$在其对应的定义域上都是减函数,则复合函数$y=f[g(x)]$是增函数.

010. 奇偶函数的图象特征

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称;反过来，如果一个函数的图象关于原点对称，那么这个函数是奇函数；如果一个函数的图象关于 y 轴对称，那么这个函数是偶函数.

011. 若函数$y=f(x)$是偶函数，则$f(x+a)=f(-x-a)$；若函数$y=f(x+a)$是偶函数，则$f(x+a)=f(-x+a)$

012. 对于函数$y=f(x)$（$x\in R$），$f(x+a)=f(b-x)$恒成立,则函数$f(x)$的对称轴是函数$x=\dfrac{a+b}{2}$；

两个函数$y=f(x+a)$与$y=f(b-x)$ 的图象关于直线$x=\dfrac{a+b}{2}$对称.

013. 若$f(x)=-f(-x+a)$,则函数$y=f(x)$的图象关于点$(\dfrac{a}{2},0)$对称；

若$f(x)=-f(x+a)$,则函数$y=f(x)$为周期为$2a$的周期函数.

014. 多项式函数$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\quad+a_0$的奇偶性

多项式函数$P(x)$是奇函数$\Leftrightarrow$ $P(x)$的偶次项(即奇数项)的系数全为零.

多项式函数$P(x)$是偶函数$\Leftrightarrow$ $P(x)$的奇次项(即偶数项)的系数全为零.

015. 函数$y=f(x)$的图象的对称性

(1)函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=a$对称$\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)$
$\Leftrightarrow f(2a-x)=f(x)$.

(2)函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{a+b}{2}$对称$\Leftrightarrow f(a+mx)=f(b-mx)$
$\Leftrightarrow f(a+b-mx)=f(mx)$.

016. 两个函数图象的对称性

(1)函数$y=f(x)$与函数$y=f(-x)$的图象关于直线$x=0$(即y轴)对称.

(2)函数$y=f(mx-a)$与函数$y=f(b-mx)$的图象关于直线$x=\dfrac{a+b}{2m}$对称.

(3)函数$y=f(x)$和$y=f^{-1}(x)$的图象关于直线 y=x 对称.

017.若将函数$y=f(x)$的图象右移a、上移b个单位，得到函数$y=f(x-a)+b$的图象；若将曲线$f(x,y)=0$的图象右移a、上移b个单位，得到曲线$f(x-a,y-b)=0$的图象.

018. 互为反函数的两个函数的关系$f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$.

019. 若函数$y=f(kx+b)$存在反函数,则其反函数为$y=\dfrac{1}{k}[f^{-1}(x)-b]$,并不是$y=[f^{-1}(kx+b)$,而函数$y=[f^{-1}(kx+b)$是$y=\dfrac{1}{k}[f(x)-b]$的反函数.

020. 几个常见的函数方程

(1)正比例函数$f(x)=cx$，$f(x+y)=f(x)+f(y),f(1)=c$.

(2)指数函数$f(x)=a^x$，$f(x+y)=f(x)f(y),f(1)=a\neq 0$.

(3)对数函数$f(x)=\log_a x$，$f(xy)=f(x)+f(y),f(a)=1(a>0,a\neq 1)$.

(4)幂函数$f(x)=x^\alpha$，$f(xy)=f(x)f(y),f^{'}(1)=\alpha$.

(5)余弦函数 $f(x)=\cos x$，正弦函数 $g(x)=\sin x$， $f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$，

$f(0)=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=1$.

021.几个函数方程的周期(约定 a>0)

（1） $f(x)=f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=a;

（2） $f(x)=f(x+a)=0$，或 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，或 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，

或 $\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}=f(x+a),(f(x)\in[0,1])$，则 $f(x)$ 的周期 T=2a;

(3) $f(x)=1-\dfrac{1}{f(x+a)}(f(x)\neq 0)$，则 $f(x)$ 的周期 T=3a;

(4) $f(x_1+x_2)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{1-f(x_1)f(x_2)}$ 且 $f(a)=1(f(x_1)\cdot f(x_2)\neq 1,0<|x_1-x_2|<2a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=4a;

(5) $f(x)+f(x+a)+f(x+2a)f(x+3a)+f(x+4a)$

$=f(x)f(x+a)f(x+2a)f(x+3a)f(x+4a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=5a;

(6) $f(x+a)=f(x)-f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=6a.

022.根式的性质

（1） $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

（2）当 n 为奇数时， $\sqrt[n]{a^n}=a$；当 n 为偶数时， $\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a,a\geq 0\\-a,a<0\end{cases}$

023.有理指数幂的运算性质

(1) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in Q)$.

(2) $(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in Q)$.

(3) $(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in Q)$.

注： 若 a>0，p 是一个无理数，则 ap 表示一个确定的实数．上述有理指数幂的运算性质，对于无理数指数幂都适用.

024.指数式与对数式的互化式

$\log_a N=b\Leftrightarrow a^b=N\ (a>0,a\neq 1,N>0)$

025.对数的换底公式

$\log_a N=\dfrac{\log_m N}{\log_m a}$ （$a>0$，且 $a\neq 1$，$m>0$，且 $m\neq 1$， $N>0$）.

推论 $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$（$a>0$，且 $a>1$，$m,n>0$，且 $m\neq 1$，$n\neq 1$， $N>0$）.

026.对数的四则运算法则

若 a>0，a≠1，M>0，N>0，则

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a M^n=n\log_a M(n\in R)$

027.设函数 $f(x)=\log_m(ax^2+bx+c)(a\neq 0)$，记 $\Delta=b^2-4ac$．若 $f(x)$ 的定义域为 R，则 $a>0$，且 $\Delta<0$；若 $f(x)$ 的值域为 R，则 $a>0$，且 $\Delta\geq 0$．对于 $a=0$ 的情形，需要单独检验.

028.对数换底不等式及其推广

若 $a>0$，$b>0$，$x>0$，$x\neq\dfrac{1}{a}$，则函数 $y=\log_{ax}(bx)$

(1)当 $a>b$ 时，在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 和 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上 $y=\log_{ax}(bx)$ 为增函数.

(2) 当 $a<b$ 时, 在 $(0,\frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上 $y=\log_{ax}(bx)$ 为减函数.

推论: 设 $n>m>1$, $p>0$, $a>0$, 且 $a\neq 1$, 则

（1） $\log_{m+p}(n+p)<\log_m n$.

（2） $\log_a m\log_a n<\log_a{}^2\frac{m+n}{2}$.

029. 单调性的快速法：①．增 +增 → 增；增 -减 → 增；
②．减 +减 → 减；减 -增 → 减；
③．乘正加常，单调不变；
④．乘负取倒，单调不变；
030. 奇偶性的快速法：①．奇 ±奇 → 奇 ； 偶 ±偶 → 偶；
②．奇 ×（÷）奇 → 偶； 偶 ×（÷）偶 → 偶； 奇 ×（÷）偶 → 奇；
031. 函数的切线方程： $y-y_0=f'(x-x_0)$
032. 函数有零点 $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)_{\min}\le 0\\ f(x)_{\max}\ge 0\end{cases}$
033. 函数无零点 ⇔f(x)max ≤ 0 或 f(x)min ≥ 0
034. 函数周期性：f(a + x) =f(b + x) 的周期 T = |b - a|；
035. 函数对称性：f(a + x) =f(b -x) 的对称轴 x = $\frac{a+b}{2}$ ；
036. 抽象函数对数型：若 f(xy) =f(x) +f(y)，则 f(x) = logax；
037. 抽象函数指数型：若 f(x +y) =f(x)f(y)，则 f(x) = ax；
038. 抽象函数正比型：若 f(x +y) =f(x) +f(y)，则 f(x) = kx；
039. 抽象函数一次型：若 fI (x) = c，则 f(x) = cx + b；
040. 抽象函数导数型：若 $f'(x)=f(x)$，则 f(x) = kex 或 f(x) =0；
041. 两个重要不等式： $\begin{cases}e^x\ge x+1\\ \ln x\le x-1\end{cases}\Rightarrow \ln(x+1)\le x\le e^x-1$ （ 当且仅当 x = 0 时“=”成立 ）
042. 洛必达法则： $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$（ 当 $\frac{f(x)}{g(x)}$ → $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 时使用 ）
043. 恒成立问题： $(1)a\ge f(x)\Leftrightarrow a\ge f(x)_{\max}$ $(2)a<f(x)\Leftrightarrow a<f(x)_{\min}$
044. 证明 f(x) >g(x) 思路：
思路 1：(1)h(x) =f(x) -g(x) ⇔ h(x) > 0(常规首选方法)
思路 2：f(x)min >g(x)max (思路 1 无法完成)

第3 章 数列

001. 数列的同项公式与前 n 项的和的关系

$a_n=\begin{cases}s_1, & n=1\\ s_n-s_{n-1}, & n\ge 2\end{cases}$（ 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 $s_n=a_1+a_2+\quad+a_n$ ）

002. 等差数列通项公式： $a_n=a_1+(n-1)d$

002. 等差数列前 n 项和公式： $s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

26. 等比数列通项公式： $a_n=\begin{cases}a_1,(q=1)\\ a_1q^{n-1},(q\neq 1)\end{cases}$

27. 等比数列前 n 项和公式： $s_n=\begin{cases}na_1,(q=1)\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q},(q\neq 1)\end{cases}$

28. 等差数列的等差中项性质： $m+n=p+q$ 则 $a_m+a_n=a_p+a_q$

29. 等比数列的性质：若 $m+n=p+q$，则 $a_m a_n=a_p a_q$

30. 等差中项：若a, A, b 成等差数列，则$2A = a + b$

31. 等比中项：若a, G, b 成等比数列，则$G^2 = ab$

32. 裂项相消法1：若$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，则有$T_n = 1 - \frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

33. 裂项相消法2：若$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，则有$T_n =\frac{1}{2}\left(1 +\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

34. 裂项相消法3：若$\frac{1}{a_{n+1}a_n}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$，则有$T_n =\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

35. 裂项相消法4：若$\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，则有$T_n =\frac{1}{2}\left(1 -\frac{1}{2n+1}\right)$

36. 错位相减法求和通式：$T_n =\frac{a_1b_1}{1-q}+\frac{dq(b_1-b_n)}{(1 \quad q)^2}-\frac{a_nb_nq}{1 \quad q}$

第4 章　三角函数

001. 三角函数的定义；正弦$\sin\alpha=\frac{y}{r}$　余弦$\cos\alpha=\frac{x}{r}$；　正切$\tan\alpha=\frac{y}{x}$;其中：$r=\sqrt{x^2+y^2}$

002. 常见三角不等式

(1)若$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\sin x<x<\tan x$.

(2) 若$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$1<\sin x+\cos x\le\sqrt{2}$.

(3) $|\sin x|+|\cos x|\ge 1$.

003. 同角三角函数的基本关系式

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\tan\theta\cdot cot\theta=1$.

004. 诱导公式：π 倍加减名不变，符号只需看象限；半π 加减名要变，符号还是看象限。

（奇变偶不变符号看象限，指$\frac{\pi}{2}$的奇偶数倍）

$$\sin(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin\alpha,(\text{n为偶数})\\(-1)^{\frac{n-1}{2}}cos\alpha,(\text{n为奇数})\end{cases}$$

$$cos(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}cos\alpha,(\text{n为偶数})\\(-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin\alpha,(\text{n为奇数})\end{cases}$$

005. 和差公式：$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta \quad \sin\alpha\sin\beta$；

$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1 \quad \tan\alpha\tan\beta}$.

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$（平方正弦公式）；

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

006. 二倍角公式：$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$.

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

007. 降幂公式：①. $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$ ②. $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ ③. $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

008. 辅助角公式：$a\sin\omega x+b\cos\omega x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi).(\tan\varphi=\frac{b}{a},a>0)$

（辅助角φ所在象限由点(a,b)的象限决定, $\tan\varphi=\frac{b}{a}$ ）.

009. 三倍角公式

1) : $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=4\sin\theta\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)\sin(\frac{\pi}{3}+\theta)$.

2) : $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\cos\theta\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)\cos(\frac{\pi}{3}+\theta)$.

3) : $\tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\tan\theta\tan(\frac{\pi}{3}-\theta)\tan(\frac{\pi}{3}+\theta)$.

010. 正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

011. 余弦定理：

1) : $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$;

2) : $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$;

3) : $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

012. 三角形最值原理：三角形中一个角及其对边已知时，另外两边或两角相等时周长取得最小值，面积取得最大值；

013. 三角函数的周期公式

函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$，x∈R 及函数$y=\cos(\omega x+\varphi)$，x∈R(A, ω, φ为常数，且 A≠0，ω>0)的周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$；

函数$y=\tan(\omega x+\varphi)$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$ (A, ω, φ为常数，且 A≠0，ω>0)的周期$T=\frac{\pi}{\omega}$.

014. 面积定理

（1）$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$（$h_a$、$h_b$、$h_c$分别表示 a、b、c 边上的高）.

（2）$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$.

(3) $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{(|OA|\cdot|OB|)^2-(OA\cdot OB)^2}$.

015. 三角形内角和定理

在△ABC 中，有$A+B+C=\pi\Leftrightarrow C=\pi-(A+B)$

$$\Leftrightarrow\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\Leftrightarrow 2C=2\pi-2(A+B).$$

016. 简单的三角方程的通解

(1) $\sin x=a\Leftrightarrow x=k\pi+(-1)^k\arcsin a(k\in Z,|a|\le 1)$.

(2) $\cos x=a\Leftrightarrow x=2k\pi\pm\arccos a(k\in Z,|a|\le 1)$.

(3) $\tan x=a\Rightarrow x=k\pi+\arctan a(k\in Z,a\in R)$.

特别地, 有

(1) $\sin\alpha=\sin\beta\Leftrightarrow\alpha=k\pi+(-1)^k\beta(k\in Z)$.

(2) $\cos\alpha=\cos\beta\Leftrightarrow\alpha=2k\pi\pm\beta(k\in Z)$.

(3) $\tan\alpha=\tan\beta\Rightarrow\alpha=k\pi+\beta(k\in Z)$.

017. 最简单的三角不等式及其解集

(1) $\sin x>a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi+\arcsin a,2k\pi+\pi-\arcsin a),k\in Z$.

(2) $\sin x<a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi-\pi-\arcsin a,2k\pi+\arcsin a),k\in Z$.

(3) $\cos x>a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi-\arccos a,2k\pi+\arccos a),k\in Z$.

(4) $\cos x<a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi+\arccos a,2k\pi+2\pi-\arccos a),k\in Z$.

(5) $\tan x>a(a\in R)\Rightarrow x\in(k\pi+\arctan a,k\pi+\frac{\pi}{2}),k\in Z$.

⑹. $\tan x < a (a \in R) \Rightarrow x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \arctan a), k \in Z$

第5 章　　向量

001.实数与向量的积的运算律

设λ、μ为实数，那么

(1) 结合律：λ(μa)=(λμ)a;

(2)第一分配律：(λ+μ)a=λa+μa;

(3)第二分配律：λ(a+b)=λa+λb.

002.向量的数量积的运算律:

(1) a•b= b•a （交换律）;

(2)（λa）•b= λ（a•b）=λa•b= a•（λb）;

(3)（a+b）•c= a •c +b•c.

003.平面向量基本定理

如果e1、e 2是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量，有且只有一对实数λ1、λ2，使得a=λ1e1+λ2e2.

不共线的向量e1、e2叫做表示这一平面内所有向量的一组基底.

004.向量平行的坐标表示

设$a = (x_1, y_1)$，$b = (x_2, y_2)$，且b≠0，则a b(b≠0) $\Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

005.a与b的数量积(或内积)

a•b=|a||b|cosθ.

006.a•b的几何意义

数量积a•b等于a的长度|a|与b在a的方向上的投影|b|cosθ的乘积.

007.平面向量的坐标运算

⑴设a=(x_1, y_1)，b=(x_2, y_2)，则a+b=$(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

⑵设a=(x_1, y_1)，b=(x_2, y_2)，则a-b=$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

⑶设A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2)，则$AB = OB - OA = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

⑷设a=$(x, y), \lambda \in R$，则λa=$(\lambda x, \lambda y)$.

⑸设a=(x_1, y_1)，b=(x_2, y_2)，则a•b=$(x_1 x_2 + y_1 y_2)$.

008.两向量的夹角公式

$\cos\theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$（a=$(x_1, y_1)$，b=$(x_2, y_2)$）.

009.平面两点间的距离公式

$d_{A,B} = |AB| = \sqrt{AB \cdot AB}$

$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$（A$(x_1, y_1)$，B$(x_2, y_2)$）.

010.向量的平行与垂直

设a=(x_1, y_1)，b=(x_2, y_2)，且b≠0，则

A||b$\Leftrightarrow$b=λa $\Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

a⊥b(a≠0) $\Leftrightarrow$ a•b=0 $\Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

011.线段的定比分公式

设$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$P(x, y)$是线段P_1P_2的分点，λ是实数，且$P_1P = \lambda PP_2$，则

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \Leftrightarrow OP = \frac{OP_1 + \lambda OP_2}{1 + \lambda}$$

$\Leftrightarrow OP = tOP_1 + (1 - t)OP_2$（$t = \frac{1}{1 + \lambda}$）.

012.三角形的重心坐标公式

△ABC 三个顶点的坐标分别为A(x_1, y_1)、B(x_2, y_2)、C(x_3, y_3),则△ABC 的重心的坐标是
$G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$.
013.点的平移公式
$\begin{cases}x^{'}=x+h\\y^{'}=y+k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x^{'}-h\\y=y^{'}-k\end{cases}\Leftrightarrow OP^{'}=OP+PP^{'}$.
注:图形F 上的任意一点P(x,y)在平移后图形$F^{'}$上的对应点为$P^{'}(x^{'},y^{'})$,且$PP^{'}$的坐标为(h,k).
014.“按向量平移”的几个结论
(1)点$P(x,y)$按向量a=(h,k)平移后得到点$P^{'}(x+h,y+k)$.
⑵ 函数$y=f(x)$的图象C按向量a=(h,k)平移后得到图象$C^{'}$,则$C^{'}$的函数解析式为$y=f(x-h)+k$.
⑶ 图象$C^{'}$按向量a=(h,k)平移后得到图象C,若C的解析式$y=f(x)$,则$C^{'}$的函数解析式为$y=f(x+h)-k$.
⑷曲线$C:f(x,y)=0$按向量a=(h,k)平移后得到图象$C^{'}$,则$C^{'}$的方程为$f(x-h,y-k)=0$.
⑸ 向量m=(x,y)按向量a=(h,k)平移后得到的向量仍然为m=(x,y).
015.三角形五“心”向量形式的充要条件
设O为ΔABC所在平面上一点,角A,B,C所对边长分别为a,b,c,则
(1)O为ΔABC的外心$\Leftrightarrow OA^2=OB^2=OC^2$.
(2)O为ΔABC的重心$\Leftrightarrow OA+OB+OC=0$.
(3)O为ΔABC的垂心$\Leftrightarrow OA\cdot OB=OB\cdot OC=OC\cdot OA$.
(4)O为ΔABC的内心$\Leftrightarrow aOA+bOB+cOC=0$.
(5)O为ΔABC的$\angle A$的旁心$\Leftrightarrow aOA=bOB+cOC$.
016. 向量加法的作图:上终下起,中间消去;$AB+BC=AC$
017. 向量减法的作图:起点相同,倒回来读;$AB-AC=CB$
018. a方向上的单位向量:⑴ 向量法:$e=\frac{a}{|a|}$;⑵坐标法:$e=\frac{a}{|a|}=\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}},\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\right)$

第6 章　　立体几何

001.证明直线与直线的平行的思考途径
(1)转化为判定共面二直线无交点;
(2)转化为二直线同与第三条直线平行;
(3)转化为线面平行;
(4)转化为线面垂直;
(5)转化为面面平行.
002.证明直线与平面的平行的思考途径
(1)转化为直线与平面无公共点;
(2)转化为线线平行;
(3)转化为面面平行.
003.证明平面与平面平行的思考途径
(1)转化为判定二平面无公共点;
(2)转化为线面平行;
(3)转化为线面垂直.
004.证明直线与直线的垂直的思考途径
(1)转化为相交垂直;
(2)转化为线面垂直;
(3)转化为线与另一线的射影垂直;
(4)转化为线与形成射影的斜线垂直.
005.证明直线与平面垂直的思考途径
(1)转化为该直线与平面内任一直线垂直;
(2)转化为该直线与平面内相交二直线垂直;
(3)转化为该直线与平面的一条垂线平行;
(4)转化为该直线垂直于另一个平行平面;

（5）转化为该直线与两个垂直平面的交线垂直.
006.证明平面与平面的垂直的思考途径
（1）转化为判断二面角是直二面角；
（2）转化为线面垂直.
007.空间向量的加法与数乘向量运算的运算律
(1)加法交换律：a＋b=b＋a.
(2)加法结合律：(a＋b)＋c=a＋(b＋c).
(3)数乘分配律：λ(a＋b)=λa＋λb.
008.平面向量加法的平行四边形法则向空间的推广
始点相同且不在同一个平面内的三个向量之和，等于以这三个向量为棱的平行六面体的以公共始点为始点的对角线所表示的向量.
009.共线向量定理
对空间任意两个向量 a、b(b≠0)，a∥b⇔存在实数λ使 a=λb.
P、A、B三点共线$\Leftrightarrow AP\|AB \Leftrightarrow AP=tAB \Leftrightarrow OP=(1-t)OA+tOB$.
$AB\|CD \Leftrightarrow AB$、$CD$共线且$AB$、$CD$不共线$\Leftrightarrow AB=tCD$且$AB$、$CD$不共线.
010..共面向量定理
向量 p 与两个不共线的向量 a、b 共面的⇔存在实数对x,y,使 $p=ax+by$.
推论 空间一点 P 位于平面 MAB 内的⇔存在有序实数对x,y,使$MP=xMA+yMB$，
或对空间任一定点 O，有序实数对x,y，使$OP=OM+xMA+yMB$.
011.对空间任一点O和不共线的三点 A、B、C，满足$OP=xOA+yOB+zOC$（$x+y+z=k$），
则当$k=1$时，对于空间任一点O，总有 P、A、B、C 四点共面；
当$k\neq 1$时，若$O\in$平面 ABC，则 P、A、B、C 四点共面；若$O\notin$平面 ABC，则 P、A、B、C 四点不共面.
A、B、C、D 四点共面$\Leftrightarrow AD$与AB、AC共面$\Leftrightarrow AD=xAB+yAC\Leftrightarrow$
$OD=(1-x-y)OA+xOB+yOC$（$O\notin$平面 ABC）.
012.空间向量基本定理
如果三个向量 a、b、c 不共面，那么对空间任一向量 p，存在一个唯一的有序实数组 x，y，z，使 p＝xa＋yb＋zc.
推论 设 O、A、B、C 是不共面的四点，则对空间任一点 P，都存在唯一的三个有序实数 x，y，z，使$OP=xOA+yOB+zOC$.
013.射影公式
已知向量AB=a 和轴l，e 是l上与l同方向的单位向量.作 A 点在l上的射影A'，作 B 点在l上的射影B'，则$A'B'=|AB|\cos$〈a，e〉=a·e
014.向量的直角坐标运算
设 a＝(a_1,a_2,a_3)，b＝(b_1,b_2,b_3)则
(1)a＋b＝$(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$；
(2)a－b＝$(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$；
(3)λa＝$(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$（λ∈R)；
(4)a·b＝$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；
015.设 A(x_1,y_1,z_1)，B(x_2,y_2,z_2)，则$AB=OB-OA=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.
016.空间的线线平行或垂直
设$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，**则**$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\lambda x_2\\y_1=\lambda y_2\\z_1=\lambda z_2\end{cases}$；
$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.
017.夹角公式

设 a$=(a_1,a_2,a_3)$，b$=(b_1,b_2,b_3)$，则 cos〈a，b〉$=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

推论 $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$，此即三维柯西不等式.

018.四面体的对棱所成的角

四面体 $ABCD$ 中，AC 与 BD 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|(AB^2+CD^2)-(BC^2+DA^2)|}{2AC\cdot BD}$.

019.异面直线所成角

$$\cos\theta=|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

（其中 θ（$0^\circ<\theta\le 90^\circ$）为异面直线 a,b 所成角，$\vec{a},\vec{b}$ 分别表示异面直线 a,b 的方向向量）

020.直线 AB 与平面所成角

$\beta=arc\sin\dfrac{AB\cdot m}{|AB||m|}$（$m$ 为平面 α 的法向量）.

021.若 ΔABC 所在平面若 β 与过若 AB 的平面 α 成的角 θ，另两边 AC，BC 与平面 α 成的角分别是 θ_1、θ_2，A、B 为 ΔABC 的两个内角，则

$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=(\sin^2 A+\sin^2 B)\sin^2\theta$.

特别地，当 $\angle ACB=90$ 时，有 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=\sin^2\theta$.

022.若 ΔABC 所在平面若 β 与过若 AB 的平面 α 成的角 θ，另两边 AC，BC 与平面 α 成的角分别是 θ_1、θ_2，A'、B' 为 ΔABO 的两个内角，则

$\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2=(\sin^2 A'+\sin^2 B')\tan^2\theta$.

特别地，当 $\angle AOB=90$ 时，有 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=\sin^2\theta$.

023.二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角

$\theta=arc\cos\dfrac{m\cdot n}{|m||n|}$ 或 $\pi-arc\cos\dfrac{m\cdot n}{|m||n|}$（$m$，$n$ 为平面 α，β 的法向量）.

024.三余弦定理

设 AC 是 α 内的任一条直线，且 BC⊥AC，垂足为 C，又设 AO 与 AB 所成的角为 θ_1，AB 与 AC 所成的角为 θ_2，AO 与 AC 所成的角为 θ．则 $\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$.

025. 三射线定理

若夹在平面角为 φ 的二面角间的线段与二面角的两个半平面所成的角是 θ_1，θ_2，与二面角的棱所成的角是 θ，则有 $\sin^2\varphi\sin^2\theta=\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2-2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi$；

$|\theta_1-\theta_2|\le\varphi\le 180-(\theta_1+\theta_2)$（当且仅当 $\theta=90$ 时等号成立）.

026.空间两点间的距离公式

若 A(x_1,y_1,z_1)，B(x_2,y_2,z_2)，则 $d_{A,B}=|AB|=\sqrt{AB\cdot AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

027.点 Q 到直线 l 距离

$h=\dfrac{1}{|a|}\sqrt{(|a||b|)^2-(a\cdot b)^2}$（点 P 在直线 l 上，直线 l 的方向向量 a$=PA$，向量 b$=PQ$）.

028.异面直线间的距离

$d=\dfrac{|CD\cdot n|}{|n|}$（$l_1,l_2$ 是两异面直线，其公垂向量为 n，C、D 分别是 l_1,l_2 上任一点，d 为 l_1,l_2 间的距离）.

029.点 B 到平面 α 的距离

$d=\dfrac{|AB\cdot n|}{|n|}$（$n$ 为平面 α 的法向量，AB 是经过面 α 的一条斜线，$A\in\alpha$）

030. 异面直线上两点距离公式

$$d=\sqrt{h^2+m^2+n^2\quad 2mn\cos\theta}.$$

$$d=\sqrt{h^2+m^2+n^2-2mn\cos\left\langle EA',AF\right\rangle}.$$

$$d=\sqrt{h^2+m^2+n^2-2mn\cos\varphi}\text{（}\varphi=E-AA'-F\text{）}.$$

（两条异面直线 a、b 所成的角为 θ，其公垂线段 AA' 的长度为 h. 在直线 a、b 上分别取两点 E、F，$A'E=m$，$AF=n$，$EF=d$）.

031. 三个向量和的平方公式

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2a\cdot b+2b\cdot c+2c\cdot a$$

$$=a^2+b^2+c^2+2|a|\cdot|b|\cos\left\langle a,b\right\rangle+2|b|\cdot|c|\cos\left\langle b,c\right\rangle+2|c|\cdot|a|\cos\left\langle c,a\right\rangle$$

032. 长度为 l 的线段在三条两两互相垂直的直线上的射影长分别为 l_1、l_2、l_3，夹角分别为 θ_1、θ_2、θ_3，则有

$$l^2=l_1^2+l_2^2+l_3^2\Leftrightarrow\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1\Leftrightarrow\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3=2.$$

（立体几何中长方体对角线长的公式是其特例）.

033. 面积射影定理

$S=\dfrac{S'}{\cos\theta}$.（平面多边形及其射影的面积分别是 S、S'，它们所在平面所成锐二面角的为 θ）.

034. 斜棱柱的直截面

已知斜棱柱的侧棱长是 l，侧面积和体积分别是 $S_{斜棱柱侧}$ 和 $V_{斜棱柱}$，它的直截面的周长和面积分别是 c_1 和 S_1，则

① $S_{斜棱柱侧}=c_1l$.

② $V_{斜棱柱}=S_1l$.

035. 作截面的依据

三个平面两两相交，有三条交线，则这三条交线交于一点或互相平行.

036. 棱锥的平行截面的性质

如果棱锥被平行于底面的平面所截，那么所得的截面与底面相似，截面面积与底面面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比（对应角相等，对应边对应成比例的多边形是相似多边形，相似多边形面积的比等于对应边的比的平方）；相应小棱锥与小棱锥的侧面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比.

037. 欧拉定理(欧拉公式) $V+F-E=2$(简单多面体的顶点数 V、棱数 E 和面数 F).

（1）E=各面多边形边数和的一半. 特别地，若每个面的边数为 n 的多边形，则面数 F 与棱数 E 的关系：$E=\dfrac{1}{2}nF$；

（2）若每个顶点引出的棱数为 m，则顶点数 V 与棱数 E 的关系：$E=\dfrac{1}{2}mV$

038. 球的半径是 R，则

其体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，

其表面积 $S=4\pi R^2$.

039. 球的组合体

(1) 球与长方体的组合体：长方体的外接球的直径是长方体的体对角线长.

(2) 球与正方体的组合体：正方体的内切球的直径是正方体的棱长，正方体的棱切球的直径是正方体的面对角线长，正方体的外接球的直径是正方体的体对角线长.

(3) 球与正四面体的组合体：棱长为 a 的正四面体的内切球的半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$，外接球的半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

040. 柱体、锥体的体积

$V_{柱体}=\frac{1}{3}Sh$（S是柱体的底面积、h是柱体的高）.

$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$（S是锥体的底面积、h是锥体的高）.

041. 从一点O出发的三条射线OA、OB、OC.若$\angle AOB=\angle AOC$,则点A在平面BOC上的射影在$\angle BOC$的平分线上;

042. 异面直线所成角的求法：

⑴平移法：在异面直线中的一条直线中选择一特殊点,作另一条的平行线.

⑵补形法：把空间图形补成熟悉的或完整的几何体,如正方体、平行六面体、长方体等,其目的在于容易发现两条异面直线间的关系;

043. 直线与平面所成角：过斜线上某个特殊点作出平面的垂线段,是产生线面角的关键.

044. 二面角的求法：

⑴定义法;

⑵三垂线法;

⑶垂面法;

⑷射影法：利用面积射影公式$S_{射}=S_{斜}\cos\theta$，其中θ为平面角的大小，此方法不必在图形中画出平面角;

045. 空间距离的求法：

⑴两异面直线间的距离，高考要求是给出公垂线,所以一般先利用垂直作出公垂线,然后再进行计算.

⑵求点到直线的距离,一般用三垂线定理作出垂线再求解.

⑶求点到平面的距离,一是用垂面法,借助面面垂直的性质来作.因此,确定已知面的垂面是关键;二是不作出公垂线,转化为求三棱锥的高,利用等体积法列方程求解.

046. 用向量方法求空间角和距离：

⑴**求异面直线所成的角**：设$\vec{a}$、$\vec{b}$分别为异面直线a、b的方向向量,则两异面直线所成的角$\alpha=\arccos\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

⑵求线面角：设$\vec{l}$是斜线l的方向向量,$\vec{n}$是平面α的法向量,则斜线l与平面α所成的角$\alpha=\arcsin\frac{|\vec{l}\cdot\vec{n}|}{|\vec{l}|\cdot|\vec{n}|}$.

⑶求二面角(法一)在α内$\vec{a}\perp l$,在β内$\vec{b}\perp l$,其方向如图(略),则二面角$\alpha-l-\beta$的平面角$\alpha=\arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.(法二)设$\overrightarrow{n_1}$,$\overrightarrow{n_2}$是二面角$\alpha-l-\beta$的两个半平面的法向量,其方向一个指向内侧,另一个指向外侧,则二面角$\alpha-l-\beta$的平面角$\alpha=\arccos\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$.

(4)求点面距离：设$\vec{n}$是平面α的法向量，在α内取一点B，则A到α的距离$d=|\overrightarrow{AB}||\cos\theta|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$(即$\overrightarrow{AB}$在$\vec{n}$方向上投影的绝对值).

047. 正四面体(设棱长为a)的性质：

①全面积$S=\sqrt{3}a^2$;②体积$V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$;③对棱间的距离$d=\frac{\sqrt{2}}{2}a$;④相邻面所成二面角$\alpha=\arccos\frac{1}{3}$;

⑤外接球半径$R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$;⑥内切球半径$r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$;⑦正四面体内任一点到各面距离之和为定值$h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

048. 直角四面体的性质：(直角四面体—三条侧棱两两垂直的四面体).在直角四面体$O-ABC$中,OA,OB,OC两两垂直,令$OA=a,OB=b,OC=c$,则

⑴底面三角形ABC为锐角三角形;

⑵直角顶点O在底面的射影H为三角形ABC的垂心;

⑶$S^2_{\Delta BOC}=S_{\Delta BHC}\cdot S_{\Delta ABC}$;

⑷$S^2_{\Delta AOB}+S^2_{\Delta BOC}+S^2_{\Delta COA}=S^2_{\Delta ABC}$;

(5) $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$；

(6)外接球半径 R= $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

049. 已知长方体的体对角线与过同一顶点的三条棱所成的角分别为 α,β,γ 因此有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 或 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$；若长方体的体对角线与过同一顶点的三侧面所成的角分别为 α,β,γ，则有 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$ 或 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.

050. 正方体和长方体的外接球的直径等与其体对角线长；

051. 球的体积公式 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，表面积公式 $S=4\pi R^2$；掌握球面上两点 A、B 间的距离求法：

(1)计算线段 AB 的长；(2)计算球心角 $\angle AOB$ 的弧度数；(3)用弧长公式计算劣弧 AB 的长.

052. 立体几何常切接问题模型

类型一、三垂直模型（三条线两个垂直，不找球心的位置即可求出球半径）

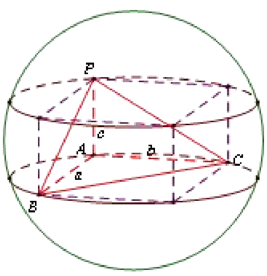


图1

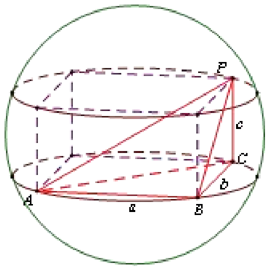


图2

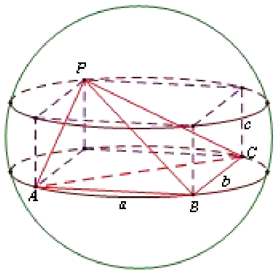


图3

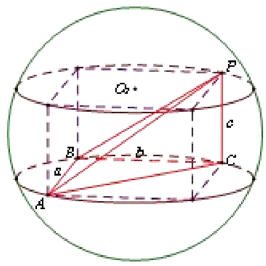


图4

方法：找三条两两垂直的线段，直接用公式 $(2R)^2=a^2+b^2+c^2$，即 $2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，求出 R

类型二、垂面模型（一条直线垂直于一个平面）

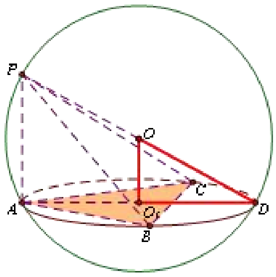


图5

1．题设：如图 5，$PA\perp$ 平面 ABC

解题步骤：

第一步：将 ΔABC 画在小圆面上，A 为小圆直径的一个端点，作小圆的直径 AD，连接 PD，则 PD 必过球心 O；

第二步：O_1 为 ΔABC 的外心，所以 $OO_1\perp$ 平面 ABC，算出小圆 O_1 的半径 $O_1D=r$（三角形的外接圆直径算法：利用正弦定理，得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2r$），$OO_1=\dfrac{1}{2}PA$；

第三步：利用勾股定理求三棱锥的外接球半径：① $(2R)^2=PA^2+(2r)^2\Leftrightarrow 2R=\sqrt{PA^2+(2r)^2}$；

② $R^2=r^2+OO_1^{\ 2}\Leftrightarrow R=\sqrt{r^2+OO_1^{\ 2}}$

2．题设：如图 6，7，8，P 的射影是 ΔABC 的外心 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱相等 $\Leftrightarrow$ 三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ΔABC 在圆锥的底上，顶点 P 点也是圆锥的顶点

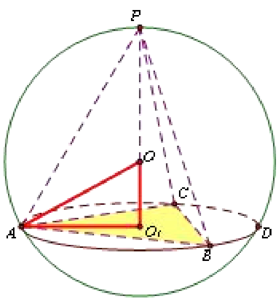


图6

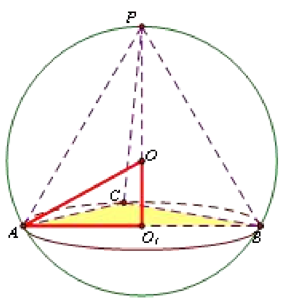


图7-1

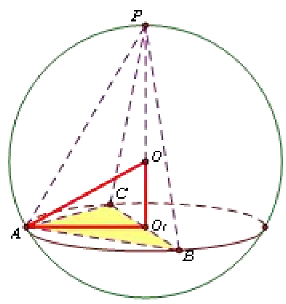


图7-2

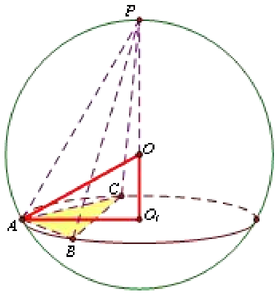


图8

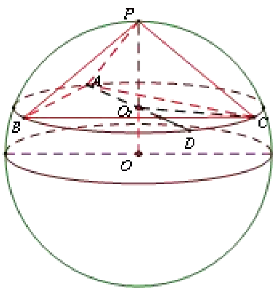


图8-1

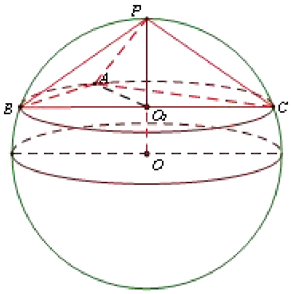


图8-2

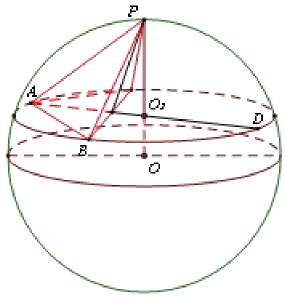


图8-3

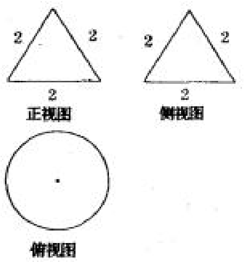
解题步骤：

第一步：确定球心O的位置，取ΔABC的外心O_1，则P,O,O_1三点共线；

第二步：先算出小圆O_1的半径$AO_1=r$，再算出棱锥的高$PO_1=h$（也是圆锥的高）；

第三步：勾股定理：$OA^2=O_1A^2+O_1O^2 \Rightarrow R^2=(h-R)^2+r^2$，解出$R$

类型三、两平面垂直模型



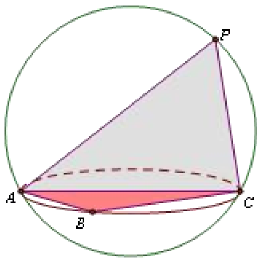


图9-1

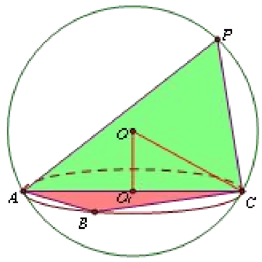


图9-2

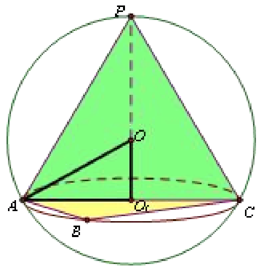


图9-3

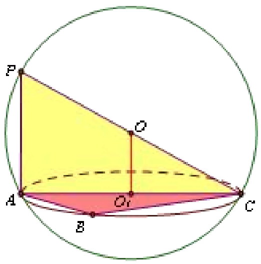


图9-4

1．题设：如图 9-1，平面$PAC\perp$平面ABC，且$AB\perp BC$（即AC为小圆的直径）

第一步：易知球心O必是ΔPAC的外心，即ΔPAC的外接圆是大圆，先求出小圆的直径$AC=2r$；

第二步：在ΔPAC中，可根据正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，求出$R$

2．如图 9-2，平面$PAC\perp$平面ABC，且$AB\perp BC$（即AC为小圆的直径）

$$OC^2=O_1C^2+O_1O^2 \Leftrightarrow R^2=r^2+O_1O^2 \Leftrightarrow AC=2\sqrt{R^2-O_1O^2}$$

053.判定线线平行的方法

(1)利用定义：证明线线共面且无公共点.

(2)利用平行公理：证明两条直线同时平行于第三条直线.

(3)利用线面平行的性质定理：

$a/\!/\alpha$，$a\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=b\Rightarrow a/\!/b$.

(4)利用面面平行的性质定理：

$\alpha/\!/\beta$，$\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b\Rightarrow a/\!/b$.

(5)利用线面垂直的性质定理：

$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha\Rightarrow a/\!/b$.

054.判定线面平行的方法

(1)利用定义：证明直线 a 与平面α没有公共点，往往借助反证法.

(2)利用直线和平面平行的判定定理：

a⊄α，b⊂α，a∥b⇒a∥α.

(3)利用面面平行的性质的推广：

α∥β，a⊂β⇒a∥α.

055.判定面面平行的方法

(1)利用面面平行的定义：两个平面没有公共点.

(2)利用面面平行的判定定理：

a⊂α，b⊂α，a∩b＝A，a∥β，b∥β⇒α∥β.

(3)垂直于同一条直线的两个平面平行，

即 a⊥α，a⊥β⇒α∥β.

(4)平行于同一个平面的两个平面平行，

即α∥γ，β∥γ⇒α∥β.

056.证明直线与平面垂直的方法

(1)利用线面垂直的定义：若一条直线垂直于一个平面内的任意一条直线，则这条直线垂直于这个平面.符号表示：∀a⊂α，l⊥a⇔l⊥α.(其中“∀”表示“任意的”)(a⊥b，a⊥c，b⊂α，c⊂α，b∩c＝M⇒a⊥α).

(2)利用线面垂直的判定定理：若一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直.符号表示：l⊥m，l⊥n，m⊂α，n⊂α，m∩n＝P⇒l⊥α.

(3)若两条平行直线中的一条垂直于一个平面，则另一条也垂直于这个平面.

符号表示：a∥b，a⊥α⇒b⊥α.

(4)利用面面垂直的性质定理：若两平面垂直，则在一个平面内垂直于交线的直线必垂直于另一个平面.符号表示：α⊥β，α∩β＝l，m⊂α，m⊥l⇒m⊥β.

（5）平行线垂直平面的传递性质(a∥b，b⊥α⇒a⊥α).

（6）面面平行的性质(a⊥α，α∥β⇒a⊥β).

（7）面面垂直的性质(α∩β＝l，α⊥γ，β⊥γ⇒l⊥γ).

057.证明平面与平面垂直的方法

(1)利用平面与平面垂直的定义：若两个平面相交，所成的二面角是直二面角，则这两个平面互相垂直.符号表示：α∩β＝l，O∈l，OA⊂α，OB⊂β，OA⊥l，OB⊥l，∠AOB＝90°⇒α⊥β.

(2)利用平面与平面垂直的判定定理：若一个平面通过另一个平面的垂线，则这两个平面互相垂直.符号表示：l⊥α，l⊂β⇒α⊥β.

058. 线线角向量公式：$\cos\theta=\dfrac{|a\ b|}{|a||b|}$

059. 线面角：(1) 向量法公式：$\sin\theta=\dfrac{|a\ m|}{|a||m|}$；**(2) 几何法公式：**$\sin\theta=\dfrac{h}{a}$

060. 二面角：(1) 向量法公式：$\cos\theta = \pm\frac{|m\ n|}{|m||n|}$ ；(2) 几何法公式（射影定理）：$\cos\theta = \frac{S_{射影}}{S_{原图}}$

061. 点面距：(1) 向量法公式：$h_x = \frac{|m \cdot AB|}{|m|}$ ；(2) 几何法公式：$h_x = \frac{S_1 h_1}{S_2}$

062. 多面体的内切球半径：$r = \frac{3V}{S_1 + S_2 + \quad + S_n}$

063. 长方体的外接球半径： $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

064. 直棱锥的外接球半径 $\begin{cases} R^2 = r^2 + (\frac{h}{2})^2 \\ 2r = \frac{a}{\sin A} \end{cases}$

065. 正棱锥的外接球半径：$\begin{cases} R^2 = r^2 + (h-R)^2 \\ 2r = \frac{a}{\sin A} \end{cases}$

066. 正三角形的性质：高：$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，面积：$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

067. 正三角形与圆：内切圆半径：$r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$，外接圆半径：$R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, 且 $\frac{R}{r} = 2$

068. 正四面体的高：斜高：$h_{斜} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，正高：$h_{正} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$

069. 正四面体与球：内切球半径 r，外接球半径 R，且 $\frac{R}{r} = \frac{3}{1}$ 且 $r + R = h_{正}$

第 7 章　解析几何

1）圆的性质和二级结论

001. 圆的定义：若 $PA \perp PB$，则 P 的轨迹为以 AB 为直径的圆

002. 圆的四种方程

(1) 圆的标准方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

(2) 圆的一般方程：$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0\left(D^2 + E^2 - 4F > 0\right)$，特别提醒：只有当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时，方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 才表示圆心为 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$，半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ 的圆。二元二次方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 表示圆的充要条件是，$A = C \neq 0$ 且 $B = 0$，且 $D^2 + E^2 - 4AF > 0$。

(3) 圆的参数方程：$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），其中圆心为 (a, b)，半径为 r。圆的参数方程的主要应用是三角换元： $x^2 + y^2 = r^2 \to \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，$x^2 + y^2 \le t \to \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}\left(0 < r \le \sqrt{t}\right)$；

(4) 圆的直径式方程 $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$（圆的直径的端点是 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$）.

003. 圆系方程

(1) 过点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 的圆系方程是

$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) + \lambda[(x-x_1)(y_1-y_2) - (y-y_1)(x_1-x_2)] = 0$

$\Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) + \lambda(ax + by + c) = 0$，其中 $ax + by + c = 0$ 是直线 AB 的方程，λ 是待定的系数.

⑵过直线$l: Ax+By+C=0$与圆$C: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$的交点的圆系方程是
$x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$，λ是待定的系数.
⑶ 过圆$C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$与圆$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$的交点的圆系方程是
$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$，λ是待定的系数.

004. 点与圆的位置关系

点$P(x_0,y_0)$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的位置关系有三种

若$d=\sqrt{(a-x_0)^2+(b-y_0)^2}$，则

$d>r \Leftrightarrow$ 点P在圆外；$d=r \Leftrightarrow$ 点P在圆上；$d<r \Leftrightarrow$ 点P在圆内

005. 直线与圆的位置关系

直线$Ax+By+C=0$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的位置关系有三种：
$d>r \Leftrightarrow$ 相离 $\Leftrightarrow \Delta<0$；
$d=r \Leftrightarrow$ 相切 $\Leftrightarrow \Delta=0$；
$d<r \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow \Delta>0$.

其中$d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

006. 两圆位置关系的判定方法

设两圆圆心分别为O1，O2，半径分别为r1，r2，$|O_1O_2|=d$

⑴ $d>r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外离 $\Leftrightarrow$ 4条公切线；
⑵ $d=r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外切 $\Leftrightarrow$ 3条公切线；
⑶ $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow$ 2条公切线；
⑷ $d=|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内切 $\Leftrightarrow$ 1条公切线；
⑸ $0<d<|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内含 $\Leftrightarrow$ 无公切线.

007. 圆的切线方程

⑴已知圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

①若已知切点(x_0,y_0)在圆上，则切线只有一条，其方程是 $x_0x+y_0y+\dfrac{D(x_0+x)}{2}+\dfrac{E(y_0+y)}{2}+F=0$.

当(x_0,y_0)圆外时， $x_0x+y_0y+\dfrac{D(x_0+x)}{2}+\dfrac{E(y_0+y)}{2}+F=0$表示过两个切点的切点弦方程.

②过圆外一点的切线方程可设为$y-y_0=k(x-x_0)$，再利用相切条件求k，这时必有两条切线，注意不要漏掉平行于y轴的切线.

③斜率为k的切线方程可设为$y=kx+b$，再利用相切条件求b，必有两条切线.

⑵已知圆$x^2+y^2=r^2$.

①过圆上的$P_0(x_0,y_0)$点的切线方程为$x_0x+y_0y=r^2$；

②斜率为k的圆的切线方程为$y=kx\pm r\sqrt{1+k^2}$

008. 圆的弦长公式：$l=2\sqrt{r^2-d^2}$

009. $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$为直径端点的圆方程$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$；

切线长：过圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$（$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$）外一点$P(x_0,y_0)$引圆的切线的长为： $\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2+Dx_0+Ey_0+F=0}$ （$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2-r^2}$）

010. 弦长问题：①圆的弦长的计算：常用弦心距d，弦长一半$\frac{1}{2}a$及圆的半径r所构成的直角三角形来解：$r^2=d^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2$；②过两圆$C_1: f(x,y)=0$、$C_2: g(x,y)=0$交点的圆(公共弦)系为$f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$，当$\lambda=-1$时，方程$f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$为两圆公共弦所在直线方程.

2）直线的性质及二级结论

001. 直线的五种方程

（1）点斜式 $y-y_1=k(x-x_1)$（直线l过点$P_1(x_1,y_1)$，且斜率为k）.

（2）斜截式 $y=kx+b$（b 为直线l在 y 轴上的截距）.

（3）两点式 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$（$y_1\neq y_2$）（$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$（$x_1\neq x_2$））.

(4)截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$（$a$、$b$分别为直线的横、纵截距，$a$、$b\neq 0$）

（5）一般式 $Ax+By+C=0$（其中 A、B 不同时为 0）.

002.两条直线的平行和垂直

(1)若$l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$

①$l_1\parallel l_2\Leftrightarrow k_1=k_2,b_1\neq b_2$；

②$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

(2)若$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$，且 A1、A2、B1、B2 都不为零,

①$l_1\parallel l_2\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$；或$l_1//l_2\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0$

②$l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$；

003.夹角公式

(1) $\tan\alpha=|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}|$.（$l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$，$k_1k_2\neq -1$）

(2) $\tan\alpha=|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}|$.（$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$，$A_1A_2+B_1B_2\neq 0$）.

直线$l_1\perp l_2$时，直线$l_1:y=k_1x+b_1$与$l_2:y=k_2x+b_2$的夹角是$\frac{\pi}{2}$.

004. l_1到l_2的角公式

(1) $\tan\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$.（$l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$，$k_1k_2\neq -1$）

(2) $\tan\alpha=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$.（$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$，$A_1A_2+B_1B_2\neq 0$）.

直线$l_1\perp l_2$时，直线l_1到l_2的角是$\frac{\pi}{2}$.

005.四种常用直线系方程

(1)定点直线系方程:经过定点$P_0(x_0,y_0)$的直线系方程为$y-y_0=k(x-x_0)$（除直线$x=x_0$），其中k是待定的系数；经过定点$P_0(x_0,y_0)$的直线系方程为$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$，其中A,B是待定的系数.

(2)共点直线系方程：经过两直线$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$的交点的直线系方程为$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$（除$l_2$），其中 λ 是待定的系数.

(3)平行直线系方程：直线$y=kx+b$中当斜率 k 一定而 b 变动时，表示平行直线系方程. 与直线$Ax+By+C=0$平行的直线系方程是$Ax+By+\lambda=0$（$\lambda\neq 0$），λ 是参变量.

(4)垂直直线系方程：与直线$Ax+By+C=0$ （A≠0，B≠0)垂直的直线系方程是$Bx-Ay+\lambda=0$，λ 是参变量.

006. 点点距公式：$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

007. 点到直线的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$（点 $P(x_0,y_0)$，直线 l： $Ax+By+C=0$）.

008. 知直线横截距 x_0，常设其方程为 $x=my+x_0$（它不适用于斜率为 0 的直线），

与直线 $l:Ax+By+C=0$ 垂直的直线可表示为 $Bx-Ay+C_1=0$.

009. 两平行线 $l_1:Ax+By+C_1=0$，$l_2:Ax+By+C_2=0$ 间的距离为 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

010. 若直线 $l_1:Ax+By+C_1=0$ 与直线 $l_2:Ax+By+C_2=0$ 平行，

则 $A_1B_2-A_2B_1=0$（斜率）且 $B_1C_2-B_2C_1\neq 0$（在轴上截距）　（充要条件）

012. 斜率公式 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$）.

013. $Ax+By+C>0$ 或 <0 所表示的平面区域

设直线 $l:Ax+By+C=0$，则 $Ax+By+C>0$ 或 <0 所表示的平面区域是：

若 $B\neq 0$，当 B 与 $Ax+By+C$ 同号时，表示直线 l 的上方的区域；当 B 与 $Ax+By+C$ 异号时，表示直线 l 的下方的区域. 简言之, 同号在上, 异号在下.

若 $B=0$，当 A 与 $Ax+By+C$ 同号时，表示直线 l 的右方的区域；当 A 与 $Ax+By+C$ 异号时，表示直线 l 的左方的区域. 简言之, 同号在右, 异号在左.

014. $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$ 或 <0 所表示的平面区域

设曲线 $C:(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$（$A_1A_2B_1B_2\neq 0$），则

1) $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$ 或 <0 所表示的平面区域是：

2) $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$ 所表示的平面区域上下两部分；

3) $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)<0$ 所表示的平面区域上下两部分.

3）椭圆的性质及二级结论

001. 椭圆的第一定义：若 $PF_1+PF_2=2a,(2a>|F_1F_2|)$，则 P 的轨迹为以 F_1F_2 为焦点, $2a$ 为长轴的椭圆（标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$）

002. 椭圆第二定义：动点 M 与定点 F（焦点）的距离和它到一条定直线（准线）l 的距离之比为定值常数 $\dfrac{|MF|}{d}=e=\dfrac{c}{a},(0<e<1)$，这个点的轨迹是椭圆。

003. 点 P 处的切线 PT 平分在 ΔPF_2F_2 点 P 处的外角。（椭圆的光学性质）

004. PT 平分在 ΔPF_2F_2 点 P 处的外角，则焦点在直线 PT 上的射影 H 点的轨迹是以长轴为直径的圆，除去长轴的两个端点。（中位线）

005. 以焦点弦 PQ 为直径的与对应准线相离。（第二定义）

006. 以焦点半径 PF_1 为直径的圆必与以长轴为直径的圆内切（第二定义）

007. 设 A_1,A_2 为椭圆的左右顶点，则 ΔPF_2F_2 在边 $\mathrm{PF_2}$（或 $\mathrm{PF_1}$）上的旁切圆，必与所在的直线切与 A_2（或 A_1）。

008. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个顶点 $A_1(-a,0),A_2(a,0)$，与 y 轴平行的直线交椭圆于 P_1,P_2 时，A_1P_1 与 A_2P_2 交点的轨迹方程是 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

证明：$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，交点 $P(x_0,y_0)$，由 $\begin{cases} y=\dfrac{y_1}{x_1+a}(x+a) \\ y=\dfrac{-y_2}{x_2+a}(x+a) \end{cases}$，得 $y_0{}^2=\dfrac{-y_1{}^2}{x_1{}^2-a^2}(x_0{}^2-a^2)$，

又 $\dfrac{x_1^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_1^{\ 2}}{b^2}=1$，则 $\dfrac{x_0^{\ 2}}{a^2}-\dfrac{y_0^{\ 2}}{b^2}=1$

009. 若 $\mathrm{p}_0(x_{0,}y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上，则过 p_0 的椭圆的切线方程是 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$。（求导或用联立方程组法）

010. 若 $\mathrm{p}_0(x_{0,}y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 外，则过 p_0 做椭圆的两条切线切点为 P_1,P_2，则切点弦 P_1P_2 的直线方程是 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$。

011. AB 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的不平行于对称轴的弦，M 为 AB 的中点，则 $K_{OM}\cdot K_{AB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$。

012. 若 $\mathrm{p}_0(x_{0,}y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内，则被 P_0 所平分的中点弦的方程是 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=\dfrac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_0^{\ 2}}{b^2}$。

013. 若 $\mathrm{p}_0(x_{0,}y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内，则过 P_0 的弦中点的轨迹方程是 $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$。

014. 若 PQ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上对中心张直角的弦，则 $\dfrac{1}{r_1^{\ 2}}+\dfrac{1}{r_2^{\ 2}}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$（$r_1=|\mathrm{OP}|,\ \mathrm{r}_2=|O\mathrm{Q}|$）。

015. 若椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上中心张直角的弦 L 所在直线方程 $\mathrm{Ax+By=1(AB\neq 0)}$，则（1）$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=A^2+B^2$；（2）$L=\dfrac{2\sqrt{a^4A^2+b^4B^2}}{a^2A^2+b^2B^2}$；

016. 给定椭圆 $C_1:b^2x^2+a^2y^2=1(a>b>0)$，$C_2:b^2x^2+a^2y^2=\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}ab\right)^2$，则

（i）对 C_1 上任意给定的点 $P(x_0,y_0)$，它的任一直角弦必须经过 C_2 上一定点 $M(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0,-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_0)$。

（ii）对 C_2 上任一点 $P'(x_0',y_0')$ 在 C_1 上存在唯一的点 M'，使得 M' 的任一直角弦都经过 P' 点。

017. 设 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆（或圆）$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点，P_1P_2 为曲线 C 的动弦，且弦 PP_1，PP_2 的斜率存在，记为 K_1，K_2 则直线 P_1P_2 通过定点 $M(mx_0,-my_0)(m\neq 1)$ 的充要条件是 $K_1K_2=-\dfrac{1+m}{1-m}\cdot\dfrac{b^2}{a^2}$。

018. 过椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上任一点 $A\left(x_0,y_0\right)$ 任意作两条倾斜角互补的直线交椭圆于 B、C 点，直线 BC 有定向且 $K_{BC}=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$(常数)。

019. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 为椭圆上任意一点 $\angle\mathrm{F_1PF_2}=\gamma$，则椭圆的焦点三角形面积为 $\mathrm{S}_{\ \mathrm{F_1PF_2}}=b^2\tan\dfrac{\gamma}{2}$，$P\left(\pm\dfrac{a}{c}\sqrt{c^2-b^2\tan^2\dfrac{\gamma}{2}},\pm\dfrac{b^2}{c}\tan\dfrac{\gamma}{2}\right)$，$|PF_1||PF_2|=\dfrac{2b^2}{1+\cos\gamma}$。

（余弦定理+面积公式+半角公式）

020. 若 P 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上异于长轴端点的任一点，F_1，F_2 是焦点，$\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=\beta$ 则 $\dfrac{a-c}{a+c}=\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}$。

021.椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦半径公式：$|MF_1|=a+ex_0$，$|MF_2|=a-ex_0$，

($F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $M(x_0,y_0)$)。（第二定义）

022.若椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，左准线为L，则当$\sqrt{2}-1\le e<1$时，可在椭圆上求一点$P$，使得$PF_1$是P到对应准线距离$d$与$PF_2$的比例中项。

023.P为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任一点，$F_1$，$F_2$为两焦点，$A$为椭圆内一定点，则

$2a-|AF_2|\le|PA|+|PF_1|\le 2a+|AF_2|$，当且仅当$A,F_2,P$三点共线时等号成立。

024.过椭圆焦半径的端点作椭圆的切线交相应准线于一点，则该点与焦点的连线必与焦半径互相垂直。

025.过椭圆焦半径的端点作椭圆的切线，与以长轴为直径的圆相交，则相应焦点的连线必与切线垂直。

026.椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上存在两点关于直线$l:y=k(x-x_0)$对称的充要条件是

$x_0^2\le\dfrac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^2+b^2k^2}$。

027.P是椭圆$\begin{cases}x=a\cos\varphi\\ y=b\sin\varphi\end{cases}(a>b>0)$(该方程为椭圆参数方程)上一点，则点P对椭圆两焦点张直角的充要条件是$e^2=\dfrac{1}{1+\sin^2\varphi}$。

028.设A，B为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=k(k>0,k\ne1)$上两点，其直线AB与椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$相交于P，Q，则AP=BQ

029.在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$中，定长$2m(0<m\le a)$为的弦中点轨迹方程为

$m^2=\left[1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\right]\left(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\right)$,其中$\tan\alpha=-\dfrac{bx}{ay}$,当$y=0$时，$\alpha=90^{\circ}$。

030.设S为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的通径，定长线段L的两端点A，B在椭圆上移动，记

$|AB|=l,M\left(x_0,y_0\right)$是AB中点，则当$l\ge\Phi S$时，有$(x_0)_{\max}=\dfrac{a^2}{c}-\dfrac{l}{2e}(c^2=a^2-b^2,e=\dfrac{c}{a})$；当$l<\Phi S$时，有$(x_0)_{\max}=\dfrac{b}{2a}\sqrt{4b^2-l^2},(x_0)_{\min}=0$。

031.椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$与直线$Ax+By+C=0$有公共点的充要条件是$A^2a^2+B^2b^2\ge C^2$。

032.椭圆$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$与直线$Ax+By+C=0$有公共点的充要条件是

$A^2a^2+B^2b^2\ge(Ax_0+By_0+C)^2$

033.设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点$F_1,F_2$，P（异于长轴端点）为椭圆上任意一点，在$\Delta PF_1F_2$中，记$\angle F_1PF_2=\alpha$，$\angle PF_1F_2=\beta$，$\angle F_1F_2P=\gamma$，则有$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma}=\dfrac{c}{a}=e$。

034.经过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴的两端点$A_1$和$A_2$的切线，与椭圆上任一点的切线相交于$P_1$和$P_2$，则$|P_1A_1|\cdot|P_2A_2|=b^2$。

035.点差法的斜率公式：$k_{椭圆}=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$

036. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，O 为坐标原点，P、Q 为椭圆上两动点，且$OP\perp OQ$。

（1）$\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$；（2）$|OP|^2+|OQ|^2$的最小值为$\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$；（3）$S_{\Delta OPQ}$的最小值是$\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$；

037. 通用弦长公式：$l=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

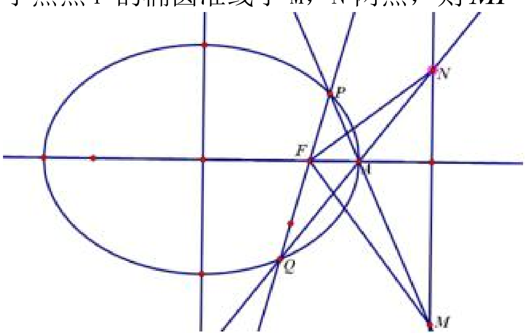
038.. 椭圆的离心率公式： $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$

039..MN 是经过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$焦点的任一弦，若 AB 过椭圆中心 O 且平行于 MN 的弦，则 $|AB|^2=2a|MN|$。

040.MN 是经过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$焦点的任一弦，若过椭圆中心 O 的半径$OP\perp MN$，则 $\dfrac{2}{a|MN|}+\dfrac{1}{|OP|^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$。

041.设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$M(m,0)$或$(0,m)$为其对称轴上除中心和顶点外的任一点，过 M 引一条直线与椭圆相交于 P、Q 两点，则直线A_1P，A_2Q（A_1,A_2为对称轴上的两顶点）的交点 N 在直线$l:x=\dfrac{a^2}{m}(\text{或}y=\dfrac{b^2}{m})$上；

042.设过椭圆焦点 F 作直线与椭圆相交于 P，Q 两点，A 为椭圆长轴上一个顶点，连接 AP 和 AQ 分别交相应于焦点 F 的椭圆准线于 M，N 两点，则$MF\perp NF$.



证明：$x=ky+c$，

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\left(a^2+b^2k^2\right)y^2+2b^2cky+b^2c^2+a^2b^2=0$，

$y_Py_O=\dfrac{b^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2k^2},y_P+y_O=\dfrac{-2b^2cky}{a^2+b^2k^2}$，

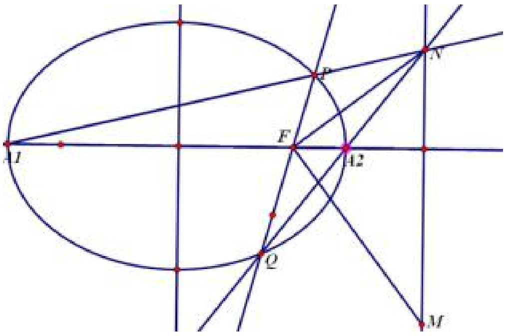
$x_Px_O=\dfrac{a^2c^2-a^2b^2k^2}{a^2+b^2k^2},x_P+x_O=\dfrac{2a^2c}{a^2+b^2k^2}$，

$\dfrac{y_N}{y_P}=\dfrac{\dfrac{a^2}{c}+a}{a+x_P},\dfrac{y_M}{y_Q}=\dfrac{\dfrac{a^2}{c}+a}{a+x_Q}$，

$MF\perp NF\Rightarrow MF\ \ NF=0\Rightarrow\left(x_M-c\right)\left(x_N-c\right)+y_My_N=0$

易得：$\left(x_M-c\right)\left(x_N-c\right)=-\dfrac{b^4}{c^2}$

043.过椭圆一个焦点 F 的直线与椭圆交于两点 P，Q，A_1,A_2为椭圆长轴上的顶点，A_1P和A_2Q交于点 M，A_2P和A_1Q交于点 N，则$MF\perp NF$。（其实就在准线上，下面证明他在准线上）



证明：首先证明准线，A_1P和PA_2公共点，

设$P\left(x_P,y_P\right)$，$Q\left(x_Q,y_Q\right)$，不妨设$x_P>x_Q$，

$k_1=\dfrac{y_P}{x_P-a}$，$k_2=\dfrac{y_Q}{x_Q-a}$，

由$\begin{cases} y=k_1\left(x-a\right) \\ y=k_2\left(x+a\right) \end{cases}$，

得交点$x=\dfrac{a\left(k_1+k_2\right)}{k_1-k_2}=a\ \dfrac{x_Py_Q+x_Qy_P+a\left(y_P-y_Q\right)}{-x_Py_Q+x_Qy_P+a\left(y_P+y_Q\right)}$，由$\begin{cases} y=k\left(x+c\right) \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$，

得$\left(b^2+a^2k^2\right)x^2+2a^2k^2cx+a^2c^2k^2-a^2b^2=0$，令$M=b^2+a^2k^2$，$N=\sqrt{b^2+a^2k^2-c^2k^2}$，

$x_Px_Q=\dfrac{a^2c^2k^2-a^2b^2}{M}$，$x_P+x_Q=\dfrac{-2a^2k^2c}{M}$，$y_P+y_Q=\dfrac{2b^2ck}{M}$，$y_P-y_Q=\dfrac{2abkN}{M}$，

$x_Py_Q+x_Qy_P=\dfrac{-2a^2b^2k}{M}$，$-x_Py_Q+x_Qy_P=\dfrac{-2abckN}{M}$，则$x=\dfrac{\dfrac{-2a^2b^2k}{M}+\dfrac{2a^2bkN}{M}}{\dfrac{-2abckN}{M}+\dfrac{2ab^2ck}{M}}a=-\dfrac{a^2}{c}$，

再根据上一条性质可得结论。

044. 设椭圆方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则斜率$k(k\neq 0)$为的平行弦的中点必在直线$l:y=kx$的共轭直线$y=k'x$上，而且$kk'=-\dfrac{b^2}{a^2}$。

045. 设 A、B、C、D 为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的四点，AB，CD 所在直线的倾斜角分别为$\alpha$，$\beta$直线 AB 与 CD 相交于 P，且 P 不在椭圆上，则$\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=\dfrac{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}$.

046. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 P 为其上一点$F_1,F_2$为椭圆的焦点，$\angle F_1PF_2$的外（内）角平分线为$l$，作$F_1,F_2$分别垂直$l$于 R、S，当 P 跑遍整个椭圆时，R、S 形成的轨迹方程是

$x^2+y^2=a^2(c^2y^2=\dfrac{\left[a^2y^2+b^2x(x\pm c)\right]^2}{a^2y^2+b^2(x\pm c)^2})$.

047. 设ΔABC内接于椭圆Γ，且 AB 为Γ的直径，l为 AB 的共轭直径所在的直线，l分别交直线 AC、BC 于 E 和 F，又 D 为l上一点，则 CD 与椭圆l相切的充要条件是 D 为 EF 的中点.

048. 过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点 F 作直线交该椭圆右支于$M,N$两点，弦 MN 的垂直平分线交$x$轴于 P，则$\dfrac{|PF|}{|MN|}=\dfrac{e}{2}$.

049. 设$A(x_1,y_1)$是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任一点，过 A 作一条斜率为$-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$的直线 L，又设 d 是原点到直线 L 的距离，$r_1,r_2$分别是 A 到椭圆两焦点的距离则$\sqrt{r_1r_2}d=ab$.

050. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$和$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda(0<\lambda<1)$，一直线顺次与它们相交于 A、B、C、D 四点，则$|AB|=|CD|$。

051. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A,B$是椭圆上的两点，线段$AB$的垂直平分线与$x$轴相交于点$P(x_0,0)$，则$-\dfrac{a^2-b^2}{a}<x_0<\dfrac{a^2-b^2}{a}$。

052. AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的不平行于对称轴的弦， $M(x_0,y_0)$ 为 AB 的中点，则 $k_{OM}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}$，即即 $k_{AB}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$。 （点差法）

053. 设 A,B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴两端点， P 是椭圆上的一点， $\angle PAB=\alpha$，$\angle PBA=\beta$ ， $\angle BPA=\gamma$， c,e 分别是椭圆的半焦距离心率，则有：

（1） $|PA|=\frac{2ab^2|\cos\alpha|}{a^2-c^2\cos^2\gamma}$.

（2） $\tan\alpha\tan\beta=1-e^2$.

（3） $S_{\Delta PAB}=\frac{2a^2b^2}{b^2-a^2}\cot\gamma$.

054. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右准线 l 与 x 轴相交于点 E，过椭圆右焦点 F 的直线与椭圆相交于 A,B 两点，点 C 在右准线 l 上，且 $BC\perp x$ 轴，则直线 AC 经过线段 EF 的中点.

055. 椭圆焦三角形中，内点到一焦点的距离与以该焦点为端点的焦半径之比为常数 e （离心率).

（注:在椭圆焦三角形中，非焦顶点的内、外角平分线与长轴交点分别称为内、外点.）(角分线定理+合比公式）

056. 椭圆焦三角形中，内心将内点与非焦顶点连线段分成定比.（角分线定理）

057. 椭圆焦三角形中，半焦距必为内、外点到椭圆中心的比例中项. （角分线定理）

058. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $P_0(x_0,y_0)$，以直线与椭圆交于 M,N 两点，恒有 $P_0M\perp P_0N$，则直线恒过 $\left(x_0\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},y_0\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right)$.

059. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，不再椭圆上的一点 P，过 P 做倾斜角互补的两直线，与椭圆交于 A,B,C,D 四点，则 A,B,C,D 四点共圆.

4）双曲线的性质及二级结论

001. 双曲线的定义：若 $\left||PF_1|-|PF_2|\right|=2a,(2a<|F_1F_2|)$ ，则 P 的轨迹为以 F_1F_2 为焦点，$2a$ 为实轴.

1）双曲线点差法的斜率公式：$k_{双曲线}=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$，2）标准方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 3） $\frac{|PF_1|}{d_1}=e>1$

002. 通用弦长公式：$l=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

003. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 为双曲线上任意一点：$\angle F_1PF_2=\gamma$，

则双曲线的焦点角形的面积为 $S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\cot\dfrac{\gamma}{2}$．（同上）

004．双曲线的焦渐距为：b(虚半轴)

005．双曲线的离心率公式：$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+k_{渐}^2}$

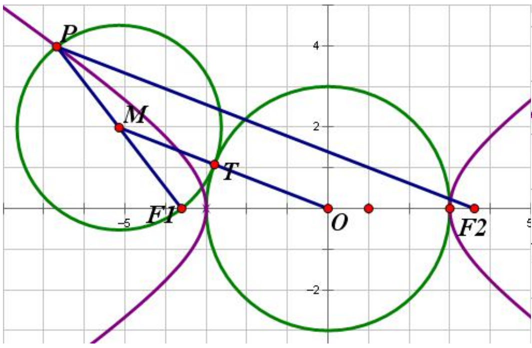
006．点 P 处的切线 PT 平分 ΔPF_1F_2 在点 P 处的**内角**．（同上）

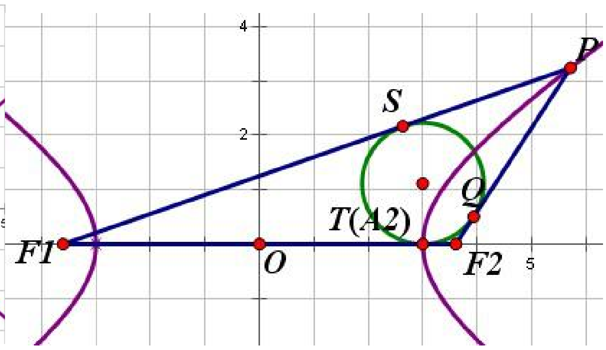
007．PT 平分 ΔPF_1F_2 在点 P 处的内角，则焦点在直线 PT 上的射影点 H 的轨迹是以长轴为直径的圆，除去长轴的两端点．（同上）

008．以焦点弦 PQ 为直径的圆必与对应准线相交．（同上）

009. 以焦点半径 PF_1 为直径的圆必与以实轴为直径的圆相切．（内切：P 在右支；外切：P 在左支）

如图，两圆圆心距为 $d=|OM|=\dfrac{|PF_2|}{2}=\dfrac{2a+|PF_1|}{2}=a+\dfrac{|PF_1|}{2}=a+r$，故两圆外切。





如图，由切线长定理：$|F_1S|+|F_1T|=|PF_1|-|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c$，$|F_1S|=|F_1T|=a+c$

而 $|F_1T|=a+c=|F_1A_2|$，T 与 A_2 重合，故内切圆与 x 轴切于右顶点，同理可证 P 在其他位置情况

010. 若 $P_0(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上，则过 P_0 的双曲线的切线方程是：$\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$（同上）

证明：$P_0(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上 $\therefore\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，对 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 求导得：

$\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{2yy'}{b^2}=0\ \therefore y'=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$ $\therefore$ 切线方程为 $y-y_0=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$ 即 $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$

011．若 $P_0(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 外，则过 P_0 作双曲线的两条切线切点为 P_1,P_2，则切点弦 P_1P_2 的直线方程是 $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$．（同上）

证明：设 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，由 10 得：$\dfrac{x_0x_1}{a^2}-\dfrac{y_0y_1}{b^2}=1,\dfrac{x_0x_2}{a^2}-\dfrac{y_0y_2}{b^2}=1$，因为点 P_1,P_2 在直线 P_1P_2 上，且同时满足方程 $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，所以 $P_1P_2:\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

012．双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦半径公式：$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$

当 $M(x_0,y_0)$ 在右支上时，$|MF_1|=ex_0+a$，$|MF_2|=ex_0-a$．

当 $M(x_0,y_0)$ 在左支上时，$|MF_1|=-ex_0+a$，$|MF_2|=-ex_0-a$（同上）

证明：由第二定义得：M 在右支时，$|MF_1|=e\left(x_0+\dfrac{a^2}{c}\right)=ex_0+a,|MF_2|=e\left(x_0-\dfrac{a^2}{c}\right)=ex_0-a$

M 在左支时，$|MF_1|=e\left(-x_0-\dfrac{a^2}{c}\right)=-a-ex_0,|MF_2|=e\left(\dfrac{a^2}{c}-x_0\right)=a-ex_0$

013. 设过双曲线焦点 F 作直线与双曲线相交 P,Q 两点，A 为双曲线长轴上一个顶点，连结 AP 和 AQ 分别交相应于焦点 F 的双曲线准线于 M,N 两点，则 $MF\perp NF$．（同上）

证明：如图，A 为左顶点时，设 $\angle PFx=\theta,\angle MFP=\varphi$，则 $\angle AFP=\pi-\theta,\angle HFM=\pi-\theta-\varphi$

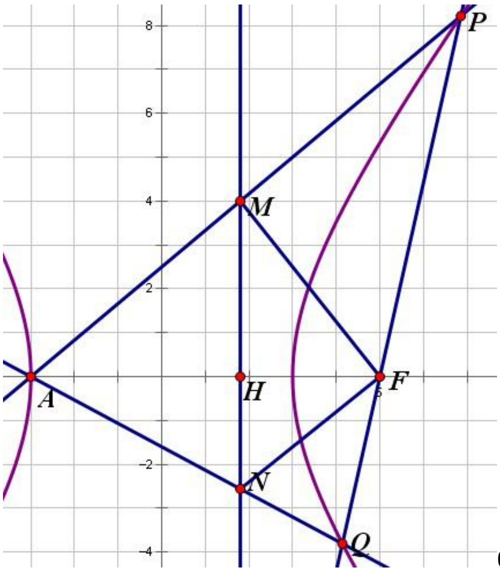
$$AF=a+c,FH=c-\frac{a^2}{c}=\frac{b^2}{c}=\frac{b^2}{ae}=\frac{p}{e},FM=-\frac{p}{e\cos(\theta+\varphi)}\left(p=\frac{b^2}{a}\right)。$$

对 F-AMP 由张角定理：$\dfrac{\sin(\pi-\theta)}{FM}=\dfrac{\sin\varphi}{FA}+\dfrac{\sin(\pi-\theta-\varphi)}{FP}$

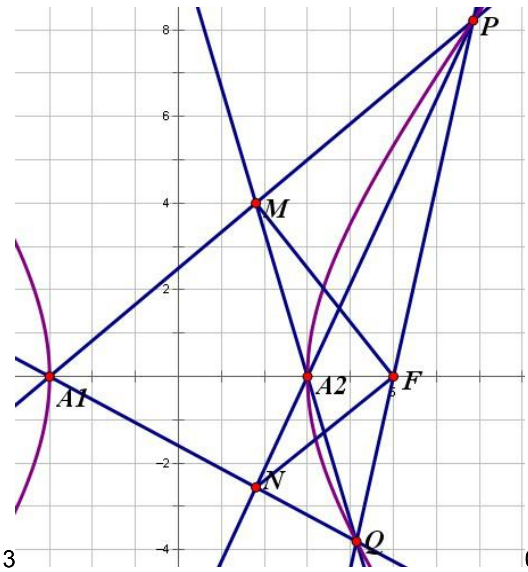
$$\Rightarrow(c-a)\sin\varphi=c\sin(\theta+\varphi)\cos\theta-c\sin\theta\cos(\theta+\varphi)-a\sin(\theta+\varphi)\Rightarrow\sin\varphi=\sin(\theta+\varphi)$$

$0<\theta<\pi\ \therefore\varphi=\pi-\theta-\varphi$ 即 FM 平分 $\angle AFP$，同理 FN 平分 $\angle AFQ$。$\therefore\angle MFN=90$ 即 MF⊥NF

当 A 为右顶点时，由 39 可知左顶点 A'与 P、M；与 Q、N 分别共线，于是回到上一种情况。



013



014 图

014. 过双曲线一个焦点 F 的直线与双曲线交于两点 P,Q，且 A_1,A_2 为双曲线实轴上的顶点，A_1P 和 A_2Q 交于点 M，A_2P 和 A_1Q 交于点 N，则 $MF\perp NF$．（同上）

证明：如图，设 $\angle PFx=\theta,\angle MFP=\varphi$，则 $\angle A_1FP=\pi-\theta,\angle A_2FQ=\theta$

对 F-QA₂M 和 F-A₁MP 由张角定理：

$$\frac{\sin(\pi-\varphi)}{FA_2}=\frac{\sin\theta}{FM}+\frac{\sin(\pi-\theta-\varphi)}{FQ},\frac{\sin(\pi-\theta)}{FM}=\frac{\sin\varphi}{FA_1}+\frac{\sin(\pi-\theta-\varphi)}{FP}$$

两式相加并化简得：$\dfrac{\sin\varphi}{FA_2}-\dfrac{\sin\varphi}{FA_1}=\dfrac{\sin(\theta+\varphi)}{FQ}+\dfrac{\sin(\theta+\varphi)}{FP}\Rightarrow\sin\varphi=\sin(\theta+\varphi)$

$0<\theta<\pi\ \therefore\varphi=\pi-\theta-\varphi$ 即 FM 平分 $\angle PFA_1$，同理 FN 平分 $\angle QFA_1$。$\therefore\angle MFN=90$ 即 MF⊥NF

015. AB 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的不平行于对称轴的弦，$M(x_0,y_0)$ 为 AB 的中点，则 $K_{OM}\cdot K_{AB}=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，即 $K_{AB}=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$。（同上）

016. 若 $P_0(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 内，则被 P_0 所平分的中点弦的方程是：

$\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=\dfrac{x_0{}^2}{a^2}-\dfrac{y_0{}^2}{b^2}$（同上）

证明：：$y-y_0=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)\Rightarrow a^2y_0y-a^2y_0^2-b^2x_0x+b^2x_0^2=0$