2024 届北京市北方交大附中高三下学期联考数学试题

注意事项:

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。

2．答题时请按要求用笔。

3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。

4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。

5．保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若不相等的非零实数 x，y，z 成等差数列，且 x，y，z 成等比数列，则 $\frac{x+y}{z}=$（　　）

A．$-\frac{5}{2}$　　B．-2　　C．2　　D．$\frac{7}{2}$

2．已知函数 $f(x)=(\ln ax-1)(x^2+ax-4)$，若 $x>0$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的值为（　　）

A．$2e$　　B．$4e$　　C．$\frac{e}{\sqrt{e-2}}$　　D．$\frac{e}{\sqrt{4-e}}$

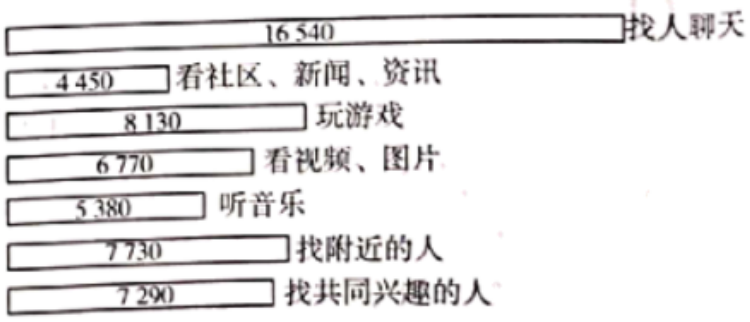
3．近年来，随着 4G 网络的普及和智能手机的更新换代，各种方便的 app 相继出世，其功能也是五花八门.某大学为了调查在校大学生使用 app 的主要用途，随机抽取了 56290 名大学生进行调查，各主要用途与对应人数的结果统计如图所示，现有如下说法：

①可以估计使用 app 主要听音乐的大学生人数多于主要看社区、新闻、资讯的大学生人数；

②可以估计不足 10% 的大学生使用 app 主要玩游戏；

③可以估计使用 app 主要找人聊天的大学生超过总数的 $\frac{1}{4}$.

其中正确的个数为（　　）



A．0　　B．1　　C．2　　D．3

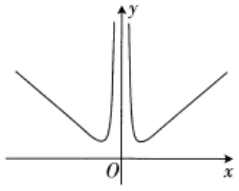
4．已知函数 $f(x)=\ln x+1$，$g(x)=2e^{x-\frac{1}{2}}$，若 $f(m)=g(n)$ 成立，则 $m-n$ 的最小值是（　　）

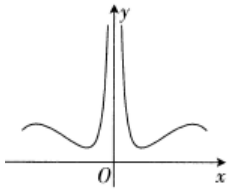
A．$\frac{1}{2}+\ln 2$　　B．$e-2$　　C．$\ln 2-\frac{1}{2}$　　D．$\sqrt{e}-\frac{1}{2}$

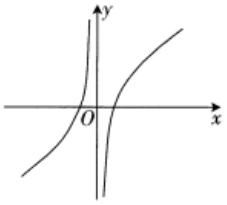
5．已知直线 $2mx+ny=2\,(m>0,n>0)$ 过圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 的圆心，则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为（　　）

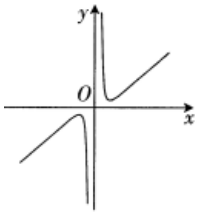
A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．函数 $f\left(x\right)=\left|x\right|-\dfrac{\ln\left|x\right|}{x^2}$ 的图象大致为（　　）

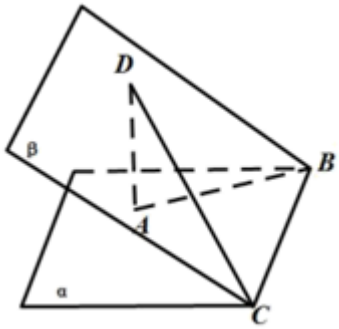
A．

B．

C．

D．

7．如图，平面 α 与平面 β 相交于 BC，$AB\subset\alpha$，$CD\subset\beta$，点 $A\notin BC$，点 $D\notin BC$，则下列叙述错误的是（　　）



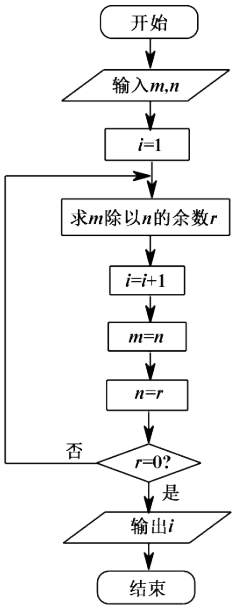
A．直线 AD 与 BC 异面

B．过 AD 只有唯一平面与 BC 平行

C．过点 D 只能作唯一平面与 BC 垂直

D．过 AD 一定能作一平面与 BC 垂直

8．执行如图所示的程序框图，若输入 $m=2020$，$n=520$，则输出的 $i=$（　　）



A．4 **B．5** **C．6** **D．7**

9．已知 x，$y\in R$，则“$x<y$”是“$\dfrac{x}{y}<1$”的（　　）

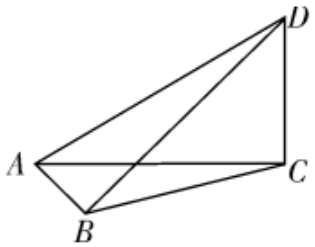
A．充分而不必要条件 **B．必要而不充分条件**

C．充分必要条件 **D．既不充分也不必要条件**

10．若复数 z 满足 $(1+i)z=i$（i 是虚数单位），则 z 的虚部为（　　）

A． $\dfrac{1}{2}$ **B．** $-\dfrac{1}{2}$ **C．** $\dfrac{1}{2}i$ **D．** $-\dfrac{1}{2}i$

11．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=3$，$\angle ABC=120°$，$\angle ACD=90°$，$\angle CDA=60°$，则 BD 的长度为（　　）



A． $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ **B．** $2\sqrt{3}$

C． $3\sqrt{3}$ **D．** $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

12．

中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题：“三百七十八里关，初行健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得到其关，要见次日行里数，请公仔细算相还.”意思为有一个人要走 378 里路，第一天健步行走，从第二天起脚痛，每天走的路程为前一天的一半，走了六天恰好到达目的地，请问第二天比第四天多走了（　　）

A．96 里　　B．72 里　　C．48 里　　D．24 里

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知函数 $f(x)=e^{2x}$，则过原点且与曲线 $y=f\left(x\right)$ 相切的直线方程为_____.

14．从分别写有 1，2，3，4 的 4 张卡片中随机抽取 1 张，放回后再随机抽取 1 张，则抽得的第一张卡片上的数不小于第二张卡片上的数的概率为_____.

15．已知 i 为虚数单位，复数 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$，则 $|z|=$_____.

16．已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，记 $\{S_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n^2}{a_{n+1}-a_n}\left(n\in N^*\right)$，$a_1=1$，则 $S_6=$_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）（1）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1,a_2=\lambda$，且 $a_n{}^2=a_{n+1}a_{n-1}-\lambda a_n a_{n-1}$（$\lambda$ 为非零常数，$n\geq 2,n\in N^*$），求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right\}\left(n\geq 2,n\in N^*\right)$ 的前 n 项和；

（2）已知数列 $\{b_n\}$ 满足：

（ⅰ）对任意的 $n\in N^*,0<b_n\leq b_{n+1}$；

（ⅱ）对任意的 $n\geq 2,n\in N^*$，$b_{n-1}\cdot b_{n+1}=\begin{cases}\mu q_1{}^n, & n=2k+1\left(k\in N^*\right),\\ \mu q_2{}^n, & n=2k\left(k\in N^*\right),\end{cases}\left(\mu>0,q_1>0,q_2>0\right)$，且 $\dfrac{b_2}{b_1}=\sqrt{q_1q_2}$.

①若 $\mu=1,q_1=q_2$，求数列 $\{b_n\}$ 是等比数列的充要条件.

②求证：数列 $b_1,b_2,b_5,b_6,b_9,b_{10},\ldots,b_{4m-3},b_{4m-2},\ldots$ 是等比数列，其中 $m\in N^*$.

18．（12 分）已知函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\sin(x+\dfrac{\pi}{2})+\sin(x+\dfrac{\pi}{3}),x\in R$.

（Ⅰ）求 $f(2019\pi)$ 的值；

（Ⅱ）若 $f(\alpha)=1$，且 $0<\alpha<\pi$，求 $\cos\alpha$ 的值.

19．（12 分）已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，焦距为 2，且经过点 $T\left(-1,-\dfrac{3}{2}\right)$，

斜率为$k\left(k>0\right)$的直线l_1经过点$M\left(0,2\right)$，与椭圆C交于G，H两点.

（1）求椭圆C的方程；

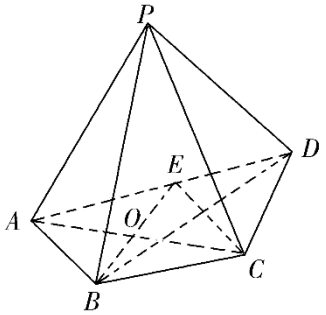
（2）在 x 轴上是否存在点 $P(m,0)$，使得以 PG，PH 为邻边的平行四边形是菱形？如果存在，求出 m 的取值范围，如果不存在，请说明理由.

20.（12 分）已知{a_n}是一个公差大于 0 的等差数列，且满足 $a_3a_5=45$，$a_2+a_6=1$.

（Ⅰ）求{a_n}的通项公式；

（Ⅱ）若数列{b_n}满足：$\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\ldots+\frac{b_n}{2^n}=a_n+1(n\in N^*)$，求{$b_n$}的前 n 项和.

21.（12 分）如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$平面 PCD，底面 ***ABCD*** 满足 ***AD*∥*BC***，$AP=AB=BC=\frac{1}{2}AD=2$，$\angle ABC=90°$，***E*** 为 ***AD*** 的中点，***AC*** 与 ***BE*** 的交点为 ***O***.



（1）设 ***H*** 是线段 ***BE*** 上的动点，证明：三棱锥 $H-PCD$ 的体积是定值；

（2）求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

（3）求直线 ***BC*** 与平面 ***PBD*** 所成角的余弦值.

22.（10 分）已知函数 $f(x)=e^x-\frac{k}{2}x^2$ 有两个极值点 x_1，x_2.

（1）求实数 k 的取值范围；

（2）证明：$\frac{f(x_1)}{x_1}+\frac{f(x_2)}{x_2}<k$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

由题意，可得 $y=\dfrac{x+z}{2}$，$z^2=xy$，消去 y 得 $x^2+xz-2z^2=0$,可得 $\dfrac{x}{z}=-2$，继而得到 $y=-\dfrac{z}{2}$，代入即得解

【详解】

由 x，y，z 成等差数列，

所以 $y=\dfrac{x+z}{2}$，又 x，z，y 成等比数列，

所以 $z^2=xy$，消去 y 得 $x^2+xz-2z^2=0$，

所以 $\left(\dfrac{x}{z}\right)^2+\dfrac{x}{z}-2=0$，解得 $\dfrac{x}{z}=1$ 或 $\dfrac{x}{z}=-2$，

因为 x，y，z 是不相等的非零实数，

所以 $\dfrac{x}{z}=-2$，此时 $y=-\dfrac{z}{2}$，

所以 $\dfrac{x+y}{z}=-2-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2}$.

故选：A

【点睛】

本题考查了等差等比数列的综合应用，考查了学生概念理解，转化划归，数学运算的能力，属于中档题.

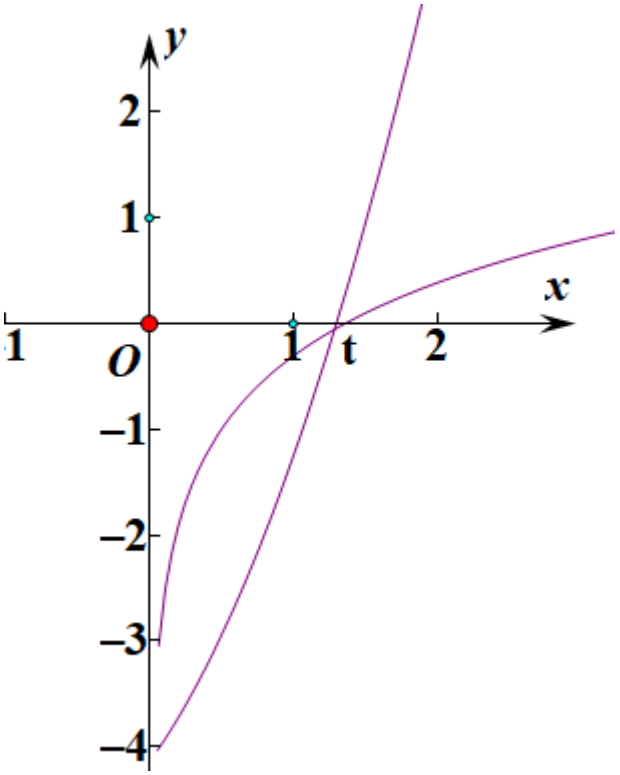
2、D

【解析】

通过分析函数 $y=\ln ax-1(x>0)$ 与 $y=x^2+ax-4(x>0)$ 的图象，得到两函数必须有相同的零点 t，解方程组

$\begin{cases}\ln at-1=0\\ a^2+at-4=0\end{cases}$ 即得解.

【详解】



如图所示，函数 $y=\ln ax-1(x>0)$ 与 $y=x^2+ax-4(x>0)$ 的图象，

因为 $x>0$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，

于是两函数必须有相同的零点 t，

所以 $\begin{cases}\ln at-1=0\\ a^2+at-4=0\end{cases}$

$at=4-t^2=e$，

解得 $a=\frac{e}{\sqrt{4-e}}$.

故选：D

【点睛】

本题主要考查函数的图象的综合应用和函数的零点问题，考查不等式的恒成立问题，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

3、C

【解析】

根据利用 app 主要听音乐的人数和使用 app 主要看社区、新闻、资讯的人数作大小比较，可判断①的正误；计算使用 app 主要玩游戏的大学生所占的比例，可判断②的正误；计算使用 app 主要找人聊天的大学生所占的比例，可判断③的正误.综合得出结论.

【详解】

使用 app 主要听音乐的人数为 5380，使用 app 主要看社区、新闻、资讯的人数为 4450，所以①正确；

使用 app 主要玩游戏的人数为 8130，而调查的总人数为 56290，$\frac{8130}{56290}\approx 0.14$，故超过 10% 的大学生使用 app 主要玩游戏，所以②错误；

使用 app 主要找人聊天的大学生人数为 16540，因为 $\frac{16540}{56290}>\frac{1}{4}$，所以③正确.

故选：C.

【点睛】

本题考查统计中相关命题真假的判断，计算出相应的频数与频率是关键，考查数据处理能力，属于基础题.

4、A

【解析】

分析：设 $f(m)=g(n)=t$，则 $t>0$，把 m,n 用 t 表示，然后令 $h(t)=m-n$，由导数求得 $h(t)$ 的最小值.

详解：设 $f(m)=g(n)=t$，则 $t>0$，$m=e^{t-1}$，$n=\ln\frac{t}{2}+\frac{1}{2}=\ln t-\ln 2+\frac{1}{2}$，

$\therefore m-n=e^{t-1}-\ln t+\ln 2-\frac{1}{2}$，令 $h(t)=e^{t-1}-\ln t+\ln 2-\frac{1}{2}$，

则 $h'(t)=e^{t-1}-\frac{1}{t}$，$h''(t)=e^{t-1}+\frac{1}{t^2}>0$，$\therefore h'(t)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，

又 $h'(1)=0$，$\therefore$当 $t\in(0,1)$ 时，$h'(t)<0$，当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$h'(t)>0$，

即 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$h(1)$ 是极小值也是最小值，

$h(1)=\frac{1}{2}+\ln 2$，$\therefore m-n$ 的最小值是 $\frac{1}{2}+\ln 2$.

故选 A.

点睛：本题易错选 B，利用导数法求函数的最值，解题时学生可能不会将其中求 $b-a$ 的最小值问题，通过构造新函数，转化为求函数 $h(t)$ 的最小值问题，另外通过二次求导，确定函数的单调区间也很容易出错.

5、D

【解析】

圆心坐标为 $(1,2)$，代入直线方程，再由乘 1 法和基本不等式，展开计算即可得到所求最小值.

【详解】

圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 的圆心为 $(1,2)$，

由题意可得 $2m+2n=2$，即 $m+n=1$，m，$n>0$，

则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})(m+n)=2+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\ldots 4$，当且仅当 $\frac{n}{m}=\frac{m}{n}$ 且 $m+n=1$ 即 $m=n=\frac{1}{2}$ 时取等号，

故选：D.

【点睛】

本题考查最值的求法，注意运用乘 1 法和基本不等式，注意满足的条件：一正二定三等，同时考查直线与圆的关系，考查运算能力，属于基础题.

6、A

【解析】

根据函数 $f\left(x\right)$ 的奇偶性和单调性，排除错误选项，从而得出正确选项.

【详解】

因为 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 是偶函数，排除 C 和 D.

当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=x-\frac{\ln x}{x^2}$，$f'\left(x\right)=\frac{x^3+2\ln x-1}{x^3}$，

令 $f'\left(x\right)<0$，得 $0<x<1$，即 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上递减；令 $f'\left(x\right)>0$，得 $x>1$，即 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上递增.所以 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，排除 B.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查函数图像的识别，考查利用导数研究函数的单调区间和极值，属于中档题.

7、D

【解析】

根据异面直线的判定定理、定义和性质，结合线面垂直的关系，对选项中的命题判断.

【详解】

A.假设直线 AD 与 BC 共面，则 A，D，B，C 共面，则 AB，CD 共面，与 $AB\subset\alpha$，$CD\subset\beta$ 矛盾， 故正确.

B. 根据异面直线的性质知，过 AD 只有唯一平面与 BC 平行，故正确.

C. 根据过一点有且只有一个平面与已知直线垂直知，故正确.

D. 根据异面直线的性质知，过 AD 不一定能作一平面与 BC 垂直，故错误.

故选：D

【点睛】

本题主要考查异面直线的定义，性质以及线面关系，还考查了理解辨析的能力，属于中档题.

8、C

【解析】

根据程序框图程序运算即可得.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/407002162062006060