

绝密★启用并使用完毕前  
时\_\_\_\_分——\_\_\_\_时\_\_\_\_分

测试时间：\_\_\_\_\_年\_\_\_\_月\_\_\_\_日

辽宁省重点高中协作校 2023-2024 学年第二学期高二期末考试模拟

卷 A

本试卷分第 I 卷和第 II 卷两部分，满分 150 分，考试时间 120 分钟

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 命题“ $\forall x \in [-2, 3], x^2 - 2a \leq 0$ ”是真命题的一个必要不充分条件是 ( )。

- A、 $a \leq 4$                       B、 $a \geq 1$                       C、 $a \geq \frac{9}{2}$

D、 $a \geq 5$

2. 函数  $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2}{x}$  的零点所在的大致区间为 ( )。

- A、(0,1)                      B、(1,2)                      C、(2,3)

D、(3,4)

3. 对于集合  $A$  与集合  $B$ ，我们把集合  $\{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$  叫做集合  $A$  与集合  $B$  的差集，记做  $A - B$ 。若集合  $P = \{y | y =$

$\frac{x}{x^2 + 1}, x > 0\}$ 、集合  $Q = \{x | x^2 + (a-1)x - a < 0\}$ ，且  $P - Q = \emptyset$ ，则实数  $a$  的取值范围

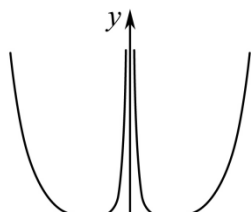
为 ( )。

- A、 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$                       B、 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$                       C、 $[0, +\infty)$

D、 $(0, +\infty)$

4. 土壤中微量元素（如  $N$ 、 $P$ 、 $K$  等）的含量直接影响植物的生长发育，进而影响植物群落内植物种类的分布。某次实验中，为研究某微量元素对植物生长发育的具体影响，实验人员配比了不同浓度的溶液若干，其浓度指标值可近似拟合为  $e$ 、 $e$ 、 $e^2$ 、 $e^3$ 、 $e^5$ 、 $e^8$ 、 $e^{13}$ 、……，并记这个指标值为  $a_n$ ，则  $\sum_{i=1}^{20} (\ln a_i)^2 =$  ( )。

- A、 $\ln a_{19} + \ln a_{20}$                       B、 $\ln a_{19} \cdot \ln a_{20}$                       C、 $\ln a_{20} + \ln a_{21}$



D、 $\ln a_{20} \cdot \ln a_{21}$

5. 已知函数  $f(x)$  的图像如图所示，则该函数的解析式为 ( )。

A、 $f(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}$

B、 $f(x) = \frac{x^2}{e^x + e^{-x}}$

C、 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$

D、 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$

6. 将正整数 20 分解成两个正整数的乘积有  $1 \times 20$ 、 $2 \times 10$ 、 $4 \times 5$  三种，其中  $4 \times 5$  是这三种分解中两数差的绝对值最小的。我们称  $4 \times 5$  为 20 的最佳分解。当  $p \times q$  ( $p \leq q$  且  $p, q \in N^*$ ) 是正整数  $n$  的最佳分解时，定义函数  $f(n) = q - p$ ，则数列  $\{f(3^n)\}$  ( $n \in N^*$ ) 的前 100 项和  $S_{100}$  为 ( )。

A、 $\frac{3^{50} - 1}{2}$

B、 $\frac{3^{50} + 1}{2}$

C、 $3^{50} - 1$

D、 $3^{50} + 1$

7. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ 2 - f(x - \frac{3}{2}), & x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$ ，则关于  $x$  的不等式  $f(x) > |\log_2 x|$  的解集为

( )。

A、 $(\frac{1}{2}, 1)$

B、 $(\frac{1}{2}, 2)$

C、 $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 2)$

D、 $(1, 2)$

8. 设  $a = \frac{1}{e}$ 、 $b = \frac{\ln 2}{2}$ 、 $c = \frac{3(3 - \ln 3)}{e^3}$ ，则 ( )。

A、 $a < b < c$

B、 $b < a < c$

C、 $b < c < a$

D、 $c < b < a$

**二、选择题：** 本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\}$ ，集合  $B = \{x | x^2 + 4mx - 5m^2 < 0, m \neq 0\}$ ，命题  $p: x \in A$ ，命题  $q: x \in B$ ，若  $p$  是  $q$  的充分不必要条件，则实数  $m$  的取值范围可以是

( )。

A、 $(-\infty, -3]$

B、 $(-\infty, -1]$

C、 $(-\infty, 4]$

D、 $[4, +\infty)$

10. 已知数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1=8$ 、 $a_2=1$ ,  $a_{n+2} = \begin{cases} a_n - 2, & n \text{ 为奇数} \\ -a_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 其前  $n$  项和为  $S_n$ ,

则下列说法正确的有 ( )。

A、 $n$  为偶数时,  $a_n = (-1)^{\frac{n-2}{2}}$

B、 $S_{2n} = -n^2 + 9n$

C、 $S_{99} = -2049$

D、 $S_n$  的最大值为 20

11. 已知  $a, b \in R$ , 函数  $f(x) = e^x - ax$ 、函数  $g(x) = b \cdot \sqrt{x^2 + 1}$ , 则下列结论正确的是 ( )。

A、对于任意的实数  $a$ , 存在实数  $b$ , 使得函数  $f(x)$  的图像与函数  $g(x)$  的图像有互相平行的切线

B、对于给定的实数  $x_0$ , 存在实数  $a$ 、 $b$ , 使得  $f(x_0) \leq g(x_0)$  成立

C、若函数  $h(x) = f(x) - g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上的最小值为 0, 则  $a + \sqrt{5}b$  的最大值为  $2\sqrt{e}$

D、存在实数  $a$ 、 $b$ , 使得  $|f(x) - g(x)| \leq e^2 + 2$  对于任意  $x \in R$  恒成立

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 已知公比  $q$  大于 1 的等比数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 + a_3 = 5$ 、 $a_2 = 2$ 。设

$b_n = |2 \log_2 a_n - 7|$ , 则当  $n \geq 5$  时, 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n =$ \_\_\_\_\_。

13. 已知  $f(x)$  是定义在  $R$  上的偶函数, 且  $f(0) = 2$ , 又  $g(x) = f(x-1)$  是奇函数,

$f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(2024) =$

\_\_\_\_\_。

14. 设  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是三个正实数, 且  $a(a+b+c) = bc$ , 则  $\frac{a}{b+c}$  的最大值为\_\_\_\_\_。

---

四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分13分) 去年某地产生的生活垃圾为20万吨，其中14万吨垃圾以填埋方式处理，6万吨垃圾以环保方式处理。预计每年生活垃圾的总量递增5%，同时，通过环保方式处理的垃圾量每年增加1.5万吨。记从今年起每年生活垃圾的总量(单位：万吨)构成数列 $\{a_n\}$ ，每年以环保方式处理的垃圾量(单位：万吨)构成数列 $\{b_n\}$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 为了确定处理生活垃圾的预算，请求出从今年起 $n$ 年内通过填埋方式处理的垃圾总量的计算公式，并计算从今年起5年内通过填埋方式处理的垃圾总量(精确到0.1万吨)。(参考数据： $1.05^4 \approx 1.215$ 、 $1.05^5 \approx 1.276$ 、 $1.05^6 \approx 1.340$ )。

16. (本小题满分15分) 已知函数 $f(x)$ 定义域为 $R$ ，对任意 $x, y \in R$ 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$ ，当 $x > 0$ 时，

$f(x) < 1$ ， $f(1) = 0$ 。

(1) 求 $f(-1)$ ；

(2) 试判断 $f(x)$ 在 $R$ 上的单调性，并证明；

(3) 若 $f(2^{2x} + 2^{-2x}) + 2f[m \cdot (2^x + 2^{-x})] < 4$ 对 $x \in [1, 2]$ 恒成立，求实数 $m$ 的取值范围。

---

17. (本小题满分15分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n = \frac{n}{n+1}$  ( $n \in N^*$ ), 数列  $\{b_n\}$  满

足:  $b_1 = 1$ , 且  $b_{n+1} = \frac{b_n}{b_n + 2}$

( $n \in N^*$ ).

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;

(3) 对于  $n \in N^*$ , 试比较  $b_{n+1}$  与  $a_n$  的大小。

---

18. (本小题满分17分) 根据要求完成下列问题:

(1) 求曲线  $C_1: f(x) = e^{x-3}$  与曲线  $C_2: g(x) = -x^2 + 7x - 11$  的公切线方程。

(2) 设  $a > 0$ 、 $b > 0$ , 若不等式  $e^{x-a} + x^2 + (2b-9)x + (b^2 - 9b + 19) \geq 0$  对一切  $x \in R$  恒成立, 求  $a^2 + 3ab + b^2$  的最大值。

---

19. (本小题满分17分) 已知函数  $f(x) = (x-1) \cdot e^x - a \cdot \ln x$  ( $a \in R$ )。

(1) 当  $a > 0$  时, 证明:  $f(x)$  存在唯一的极小值点;

(2) 若  $f(x)$  有两个零点, 求实数  $a$  的取值范围。



$\therefore f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内连续且单调, 又  $\because f(1) = \ln 2 - 2 < 0$ 、  
 $f(2) = \ln 3 - 1 > 0$ ,

$\therefore f(x)$  的零点所在区间为  $(1, 2)$ , 故选 B。

3. 对于集合  $A$  与集合  $B$ , 我们把集合  $\{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$  叫做集合  $A$  与集合  $B$  的差集, 记做  $A - B$ 。若集合  $P = \{y | y =$

$\frac{x}{x^2 + 1}, x > 0\}$ 、集合  $Q = \{x | x^2 + (a - 1)x - a < 0\}$ , 且  $P - Q = \emptyset$ , 则实数  $a$  的取值范围为 ( )。

A、 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$                       B、 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$                       C、 $[0, +\infty)$

D、 $(0, +\infty)$

**【答案】C**

**【解析】** 根据差集的定义, 由  $P - Q = \emptyset$  可得  $P \subseteq Q$ ,

$$\because x > 0, y = \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}, \text{ 又 } \because x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2, \text{ 当且仅当 } x = \frac{1}{x},$$

即  $x = 1$  时, 等号成立,

$$\therefore 0 < \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2}, \therefore P = (0, \frac{1}{2}],$$

由  $x^2 + (a - 1)x - a < 0$  得  $(x + a)(x - 1) < 0$ ,

当  $-a > 1$ , 即  $a < -1$  时,  $Q = (1, -a)$ , 集合  $P$ 、 $Q$  没有任何包含关系, 不满足题意,

当  $-a = 1$ , 即  $a = -1$  时,  $Q = \emptyset$ , 集合  $P$ 、 $Q$  没有任何包含关系, 不满足题意,

当  $-a < 1$ , 即  $a > -1$  时,  $Q = (-a, 1)$ , 若  $P \subseteq Q$ , 则  $-a \leq 0$ , 即  $a \geq 0$ ,

综上所述,  $a \geq 0$ , 即实数  $a$  的取值范围为  $[0, +\infty)$ , 故选 C。

4. 土壤中微量元素 (如  $N$ 、 $P$ 、 $K$

等)的含量直接影响植物的生长发育,进而影响植物群落内植物种类的分布。某次实验中,为研究某微量元素对植物生长发育的具体影响,实验人员配比了不同浓度的溶液若干,其浓度指标值可近似拟合为 $e$ 、 $e$ 、 $e^2$ 、 $e^3$ 、 $e^5$ 、 $e^8$ 、 $e^{13}$ 、……,并记这个指标值为 $a_n$ ,则 $\sum_{i=1}^{20}(\ln a_i)^2 = (\quad)$ 。

- A、 $\ln a_{19} + \ln a_{20}$                       B、 $\ln a_{19} \cdot \ln a_{20}$                       C、 $\ln a_{20} + \ln a_{21}$   
D、 $\ln a_{20} \cdot \ln a_{21}$

**【答案】D**

**【解析】**由数据可知从第三项开始,第 $i$ 项是前两项之积,

即 $a_1 = a_2 = e$ ,  $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$ , 取对数得 $\ln a_1 = \ln a_2 = 1$ ,

$$\ln a_{n+2} = \ln a_n + \ln a_{n+1},$$

设 $b_n = \ln a_n$ , 则 $b_1^2 = b_1 \cdot b_2$ ,  $b_2^2 = b_2 \cdot (b_3 - b_1) = b_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot b_1$ ,

$$b_3^2 = b_3 \cdot (b_4 - b_2) = b_3 \cdot b_4 - b_2 \cdot b_3,$$

……,  $b_{20}^2 = b_{20} \cdot (b_{21} - b_{19}) = b_{20} \cdot b_{21} - b_{19} \cdot b_{20}$ , 累加得

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_{20}^2 = b_{20} \cdot b_{21},$$

$\therefore (\ln a_1)^2 + (\ln a_2)^2 + (\ln a_3)^2 + \cdots + (\ln a_{20})^2 = \ln a_{20} \cdot \ln a_{21}$ , 即

$$\sum_{i=1}^{20} (\ln a_i)^2 = \ln a_{20} \cdot \ln a_{21}, \text{ 故选 D.}$$

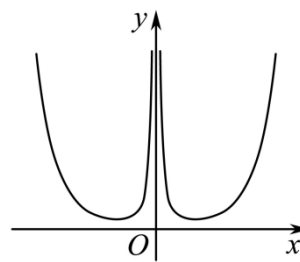
5. 已知函数 $f(x)$ 的图像如图所示,则该函数的解析式为( )。

A、 $f(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}$

B、 $f(x) = \frac{x^2}{e^x + e^{-x}}$

C、 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$

D、 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$



**【答案】D**

**【解析】**由函数的图像可知 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 排除B选项,

由函数的图像可知 $f(x)$ 为偶函数, 而 $f(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}$ 和 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 为

---

奇函数，排除 A 和 C 选项，

故选 D。

6. 将正整数 20 分解成两个正整数的乘积有  $1 \times 20$ 、 $2 \times 10$ 、 $4 \times 5$  三种, 其中  $4 \times 5$  是这三种分解中两数差的绝对值最小的。我们称  $4 \times 5$  为 20 的最佳分解。当  $p \times q$  ( $p \leq q$  且  $p, q \in N^*$ ) 是正整数  $n$  的最佳分解时, 定义函数  $f(n) = q - p$ , 则数列  $\{f(3^n)\}$  ( $n \in N^*$ ) 的前 100 项和  $S_{100}$  为 ( )。

A、 $\frac{3^{50}-1}{2}$                       B、 $\frac{3^{50}+1}{2}$                       C、 $3^{50}-1$

D、 $3^{50}+1$

【答案】C

【解析】当  $n$  为偶数时,  $f(3^n) = 3^{\frac{n}{2}} - 3^{\frac{n}{2}} = 0$ , 当  $n$  为奇数时,

$$f(3^n) = 3^{\frac{n+1}{2}} - 3^{\frac{n-1}{2}} = 2 \times 3^{\frac{n-1}{2}},$$

$\therefore$

$$S_{100} = 2 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + \dots + 2 \times 3^{49} = 2 \times (3^0 + 3^1 + \dots + 3^{49}) = 2 \times \frac{3^{50}-1}{2} = 3^{50}-1, \text{ 故选 C.}$$

7. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ 2 - f(x - \frac{3}{2}), & x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$ , 则关于  $x$  的不等式  $f(x) > |\log_2 x|$  的解集为

( )。

A、 $(\frac{1}{2}, 1)$                       B、 $(\frac{1}{2}, 2)$                       C、 $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 2)$

D、 $(1, 2)$

【答案】B

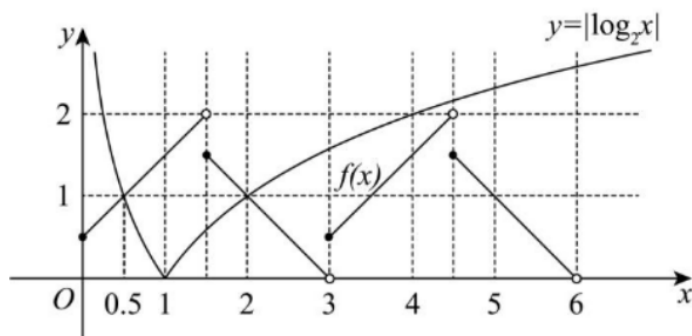
【解析】当  $0 \leq x < \frac{3}{2}$  时,  $f(x) = x + \frac{1}{2}$ ,

$$\text{当 } \frac{3}{2} \leq x < 3 \text{ 时, } f(x) = 2 - (x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}) = 3 - x,$$

$$\text{当 } 3 \leq x < \frac{9}{2} \text{ 时, } f(x) = 2 - f(x - \frac{3}{2}) = 2 - [2 - f(x - 3)] = f(x - 3) = x - \frac{5}{2},$$

做函数  $f(x)$  在  $[0, \frac{9}{2})$  内的图像如图所示，在同一坐标系中作出函数

$g(x) = |\log_2 x|$  的图像，



由图像可知关于  $x$  的不等式  $f(x) > |\log_2 x|$  的解集为  $(\frac{1}{2}, 2)$ ，故选 B。

8. 设  $a = \frac{1}{e}$ 、 $b = \frac{\ln 2}{2}$ 、 $c = \frac{3(3 - \ln 3)}{e^3}$ ，则 ( )。

A、 $a < b < c$

B、 $b < a < c$

C、 $b < c < a$

D、 $c < b < a$

【答案】D

【解析】由题意可知  $a = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e}$ 、 $b = \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$ 、 $c = \frac{3(3 - \ln 3)}{e^3} = \frac{\ln \frac{e^3}{3}}{\frac{e^3}{3}}$ ，

构造函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，定义域为  $(0, +\infty)$ ， $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，令  $f'(x) = 0$ ，

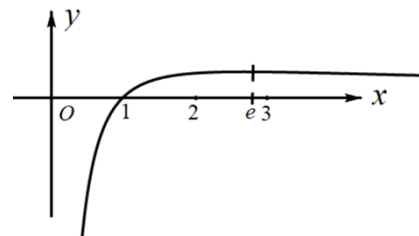
解得  $x = e$ ，

当  $0 < x < e$  时， $f'(x) > 0$ ， $\therefore f(x)$  在  $(0, e)$  内单调递增，

当  $x > e$  时， $f'(x) < 0$ ， $\therefore f(x)$  在  $(e, +\infty)$  内单调递减，

$\therefore$  当  $x = e$  时  $f(x)$  取得极大值，也是最大值， $f(e) = \frac{1}{e}$ ，

又  $f(1) = 0$ ，当  $x \rightarrow 0^+$  时  $f(x) < 0$ ，当  $x \rightarrow +\infty$  时  $f(x) > 0$ ，



---

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/40711512500006142>