

广东省高州市 2023-2024 学年高一上学期期末教学质量监测

数学试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - x - 2 > 0\}$, $B = \{x \mid y = \log_3 x\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(1, 3)$ B. $(0, 3)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, +\infty)$

【答案】D

【解析】由 $x^2 - x - 2 > 0$ 可得, $x < -1$ 或 $x > 2$, $B = \{x \mid x > 0\}$, 故 $A \cap B = (2, +\infty)$.

故选: D.

2. 若 $m - 2n = 1$, 则 $\frac{4^n}{\sqrt[3]{8^m}} =$ ()

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\sqrt{2}$

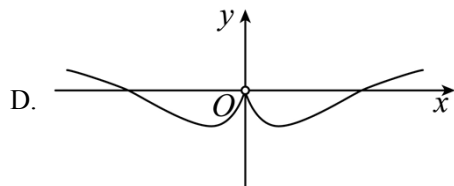
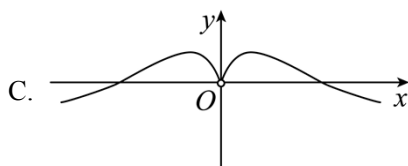
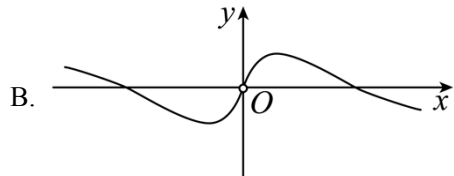
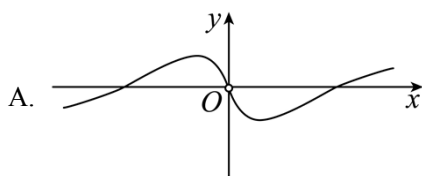
【答案】C

【解析】因为 $m - 2n = 1$, 则 $2n - m = -1$,

所以 $\frac{4^n}{\sqrt[3]{8^m}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt[3]{2^{3m}}} = \frac{2^{2n}}{2^m} = 2^{2n-m} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

故选: C.

3. 函数 $f(x) = \frac{x \ln |x|}{x^2 + 1}$ 的图象大致为 ()



【答案】A

【解析】因为 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于原点对称, 故排除 C, D;

高级中学名校试卷

当 $x=1$ 时, $f(x)=0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $\ln|x| = \ln x < 0$, 所以 $f(x) < 0$, 排除 B.

故选: A.

4. 函数 $f(x) = 2^x + \log_2 x - \frac{19}{2}$ 的零点所在的区间是 ()

- A. (0, 1) B. (1, 2) C. (2, 3) D. (3, 5)

【答案】C

【解析】 $f(x) = 2^x + \log_2 x - \frac{19}{2}$ 是单调递增函数,

$$\text{又 } f(1) = 2^1 + \log_2 1 - \frac{19}{2} < 0, f(2) = 2^2 + \log_2 2 - \frac{19}{2} < 0,$$

$$f(3) = 8 + \log_2 3 - \frac{19}{2} = \log_2 3 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(\log_2 9 - 3) > \frac{1}{2}(\log_2 8 - 3) = 0,$$

$\therefore$ 求所零点在区间 (2, 3).

故选: C.

5. 函数 $f(x) = \sin 2x + 2\cos^2 x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值为 ()

- A. 0 B. $\sqrt{3}-1$ C. 1 D. $\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】因为 $f(x) = \sin 2x + 2\cos^2 x = \sin 2x + \cos 2x + 1 = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$,

$$\text{又 } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \text{ 则 } 2x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], \text{ 所以 } -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1,$$

$$\text{故 } 0 \leq \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leq \sqrt{2} + 1, \text{ 则函数 } f(x) \text{ 的最小值为 } 0.$$

故选: A.

6. 国家新能源车电池衰减规定是在质保期内, 电池的性能衰减不能超过 20%, 否则由厂家免费为车主更换电池. 某品牌新能源车动力电池容量测试数据显示: 电池的性能平均每年的衰减率为 1.5%, 该品牌设置的质保期至多为 () (参考数据: $\lg 2 \approx 0.3010$,

$\lg 985 \approx 2.9934$)

- A. 12 年 B. 13 年 C. 14 年 D. 15 年

【答案】C

高级中学名校试卷

【解 析】设该品牌设置的质保期至多为 x 年，

由题意可得， $(1-1.5\%)^x \geq 1-20\%$ ，则 $0.985^x \geq 0.8$ ，

两边取对数 $\lg 0.985^x \geq \lg 0.8$ ，即 $x \lg 0.985 \geq \lg 0.8$ ，则 $x \lg \frac{985}{1000} \geq \lg \frac{8}{10}$ ，

即 $x(\lg 985 - 3) \geq \lg 8 - \lg 10$ ，则 $x(\lg 985 - 3) \geq 3 \lg 2 - 1$ ，

因为 $\lg 985 \approx 2.9934$ ，所以 $\lg 985 - 3 < 0$ ，则 $x \leq \frac{3 \lg 2 - 1}{\lg 985 - 3} \approx \frac{3 \times 0.3010 - 1}{2.9934 - 3} \approx 14.6970$ ，

又因为 $x \in \mathbb{N}^*$ ，所以 $x = 14$ 。

故选：C。

7. 已知 θ 为钝角， $\cos 2\theta - \sin 2\theta = \cos^2 \theta$ ，则 $\tan 3\theta$ 的值为（ ）

A. $-\frac{4}{3}$

B. -2

C. $-\frac{8}{3}$

D. $-\frac{2}{11}$

【答 案】D

【解 析】由 $\cos 2\theta - \sin 2\theta = \cos^2 \theta$ 得 $-2\sin \theta \cos \theta = \sin^2 \theta$ ，

化简得 $-2\cos \theta = \sin \theta$ ， $\sin \theta > 0$ ，则 $\tan \theta = -2$ ，

则 $\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{4}{3}$ ， $\tan 3\theta = \frac{\tan 2\theta + \tan \theta}{1 - \tan 2\theta \tan \theta} = -\frac{2}{11}$ 。

故选：D。

8. 若关于 x 的不等式 $2x^2 + mx - 3m^2 < 0$ 的解集中恰好有 3 个整数，则实数 m 的取值范围为（ ）

A. $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$

B. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

C. $(-2, -1) \cup (1, 2)$

D. $\left[-\frac{4}{3}, -1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right]$

【答 案】D

【解 析】不等式 $2x^2 + mx - 3m^2 < 0$ 因式分解为 $(x - m)(2x + 3m) < 0$ ，

①当 $m = 0$ 时，不等式为 $2x^2 < 0$ ，不等式无解，不合题意；

②当 $m > 0$ 时，不等式的解为 $-\frac{3}{2}m < x < m$ ，

若不等式的解集中恰好有 3 个整数，这 3 个整数必为 $-1, 0, 1$ ，

$$\text{必有} \begin{cases} 1 < m \leq 2 \\ -2 \leq -\frac{3}{2}m < -1 \end{cases}, \text{解得 } 1 < m \leq \frac{4}{3};$$

③当 $m < 0$ 时, 不等式的解为 $m < x < -\frac{3}{2}m$,

若不等式的解集中恰好有 3 个整数, 这 3 个整数必为 $-1, 0, 1$,

$$\text{必有} \begin{cases} 1 < -\frac{3}{2}m \leq 2 \\ -2 \leq m < -1 \end{cases}, \text{解得 } -\frac{4}{3} \leq m < -1,$$

由①②③可知实数 m 的取值范围为 $\left[-\frac{4}{3}, -1\right) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right]$.

故选: D.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列既是存在量词命题又是真命题的是 ()

A. $\exists x \in \mathbf{R}, |x| < 0$

B. $\exists x \in \mathbf{Z}, \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1$

C. 至少有一个 $x \in \mathbf{Z}$, 使 x 能同时被 3 和 5 整除

D. 每个平行四边形都是中心对称图形

【答案】BC

【解析】对于 A, 因为所有实数的绝对值非负, 即 $|x| \geq 0$, 所以 A 是假命题;

对于 B, 当 $x = 2$ 时, 满足 $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) = \cos \pi = -1$, 所以 B 是真命题;

对于 C, 15 能同时被 3 和 5 整除, 所以 C 是真命题;

对于 D, 是全称量词命题, 所以不符合题意.

故选: BC.

10. 亚马逊大潮是世界潮涌之最, 当潮涌出现时, 其景、其情、其声, 真是“壮观天下无”, 在客观现实世界中, 潮汐的周期性变化现象, 我们通常需要借助于三角函数这一重要数学模型来研究. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象关于直线 $x = \frac{11}{12}\pi$ 对称, 则下列选项正确的是 ()

高级中学名校试卷

A. $\varphi = \frac{\pi}{3}$

B. 直线 $x = \frac{5\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C. $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减

D. 若将函数 $f(x)$ 图象上的所有点向左平移 $m(m > 0)$ 个单位长度后, 得到的函数图象关于 y 轴对称, 则 m 的最小值为 $\frac{5\pi}{12}$

【答案】BCD

【解析】 $\forall \varphi < \frac{\pi}{2}, f(x)$ 图象关于直线 $x = \frac{11}{12}\pi$ 对称,

$\therefore 2x + \varphi = \frac{11}{6}\pi + \varphi \in \left(\frac{4}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi\right), \frac{11}{6}\pi + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \therefore k = 1$, 得 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, 故 A 错误;

所以 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 当 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,

故 B 正确;

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right]$, 由正弦函数单调性知函数 $f(x)$ 单调递减,

故 C 正确;

由题可知平移后函数为 $y = \sin\left[2(x+m) - \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x + 2m - \frac{\pi}{3}\right)$,

则 $2m - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z}), m = \frac{k\pi}{2} + \frac{5}{12}\pi > 0, \therefore m$ 的最小值为 $\frac{5\pi}{12}$, 故 D 正确.

故选: BCD.

11. 已知 a, b 为正实数, 且 $a > 1, b > 1, (a-1)(b-1) = 1$, 则 ()

A. ab 的最大值为 4

B. $2a+b$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$

C. $a+b$ 的最小值为 $3-2\sqrt{2}$

D. $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1}$ 的最小值为 2

【答案】BD

【解析】对于 A, $\mathbf{Q}(a-1)(b-1) = 1, \therefore ab = a+b$,

因为 $ab = a+b \geq 2\sqrt{ab}, \sqrt{ab} \geq 2, ab \geq 4$ (当且仅当 $a=b=2$ 时取“=”),

所以 ab 的最小值为 4, A 错误;

对于 B, 由 $ab = a + b$, 得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1, (2a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 3 + \frac{2a}{b} + \frac{b}{a} \geq 3 + 2\sqrt{2}$,

当且仅当 $a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, b = 1 + \sqrt{2}$ 时取“=”, B 正确;

对于 C, $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 4$ (当且仅当 $a = b = 2$ 时, 取“=”), C 错误;

对于 D, $Q(a - 1)(b - 1) = 1, \therefore \frac{1}{a - 1} + \frac{1}{b - 1} \geq 2\sqrt{\frac{1}{(a - 1)(b - 1)}} = 2$,

当且仅当 $a = b = 2$ 时, 取“=”, D 正确.

故选: BD.

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x \leq 0, \\ \log_2 \frac{1}{x} - 1, & 0 < x < 1, \\ \log_2 x - 1, & x \geq 1, \end{cases}$ 则方程 $f^2(x) = 1 + 2f(x) - a^2$ 的根的个数可能

为 ()

A. 2

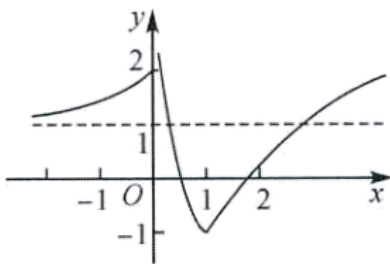
B. 6

C. 5

D. 4

【答案】ACD

【解析】画出 $f(x)$ 的图象如图所示:



令 $t = f(x)$, 则 $t^2 - 2t + a^2 - 1 = 0$, 则 $\Delta = 4(2 - a^2)$,

当 $\Delta = 0$, 即 $a^2 = 2$ 时, $t = 1$, 此时 $f(x) = 1$, 由图 $y = 1$ 与 $y = f(x)$ 的图象有两个交点,

即方程 $f^2(x) - 2f(x) + a^2 - 1 = 0$ 的根的个数为 2, A 正确;

当 $\Delta > 0$, 即 $a^2 < 2$ 时, $t = 1 \pm \sqrt{2 - a^2}$, 又 $0 < \sqrt{2 - a^2} \leq \sqrt{2}$,

故 $1 < 1 + \sqrt{2 - a^2} \leq 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2} \leq 1 - \sqrt{2 - a^2} < 1$,

当 $t = 1 - \sqrt{2 - a^2}$ 时, 即 $f(x) = 1 - \sqrt{2 - a^2} \in (-1, 1)$, 则 x 有 2 解,

高级中学名校试卷

当 $t = 1 + \sqrt{2 - a^2}$ 时, 若 $t \in (1, 2]$, 则 x 有 3 解; 若 $t \in (2, 1 + \sqrt{2}]$, 则 x 有 2 解,

故方程 $f^2(x) - 2f(x) + a^2 - 1 = 0$ 的根的个数为 5 或 4, CD 正确.

故选: ACD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 设命题 $p: \exists x \in \mathbf{Z}, x^2 \geq x$, 则命题 p 的否定为_____.

【答案】 $\forall x \in \mathbf{Z}, x^2 < x$

【解析】 因为命题 $p: \exists x \in \mathbf{Z}, x^2 \geq x$ 是特称量词命题,

所以其否定是全称量词命题, 即为 $\forall x \in \mathbf{Z}, x^2 < x$.

故【答案】为: $\forall x \in \mathbf{Z}, x^2 < x$.

14. 若 $x \log_3 2 = 2$, 则 $2^x + 2^{-x}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{82}{9}$

【解析】 因为 $x \log_3 2 = 2$, 则 $\log_3 2^x = 2$, 所以 $2^x = 9$,

则 $2^{-x} = (2^x)^{-1} = \frac{1}{9}$, 所以 $2^x + 2^{-x} = 9 + \frac{1}{9} = \frac{82}{9}$.

故【答案】为: $\frac{82}{9}$.

15. 已知函数 $f(x) = 2 \tan\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 (\omega > 0)$, 其最小正周期为 2π , 则 $f(x)$ 的一个对称中心的坐标为_____.

【答案】 $\left(-\frac{2\pi}{3}, 1\right)$, (【答案】不唯一, 横坐标只需符合 $x = k\pi - \frac{2}{3}\pi$)

【解析】 根据 $T = \frac{\pi}{\omega} = 2\pi$, 得 $\omega = \frac{1}{2}$, 则 $f(x) = 2 \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + 1$,

令 $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{k}{2}\pi (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\frac{x}{2} = \frac{k}{2}\pi - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$,

所以 $x = k\pi - \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$.

故【答案】为: $\left(-\frac{2\pi}{3}, 1\right)$ (【答案】不唯一, 横坐标只需符合 $x = k\pi - \frac{2}{3}\pi$).

16. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=3$, 且函数 $g(x)=f(x)-2x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减, 则不等式 $f(x-1)>2x-1$ 的解集为_____.

【答案】 $(-\infty,-1)$

【解析】 因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(-x)=-f(x)$,

由 $g(x)=f(x)-2x$, 则 $g(-x)=f(-x)-2(-x)=-f(x)+2x=-g(x)$,

所以 $g(x)$ 也为奇函数,

又函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减,

由对称性可知, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减,

又因为 $f(2)=3$, 所以 $g(2)=f(2)-2\times 2=3-4=-1$

所以 $f(x-1)>2x-1\Rightarrow f(x-1)-2(x-1)>1$,

即 $g(x-1)>-g(2)=g(-2)$, 所以 $x-1<-2\Rightarrow x<-1$.

故【答案】为: $(-\infty,-1)$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 非空集合 $A=\{x\mid x\leq a\}$, $B=\{x\mid -7-x\leq 3x+1\leq 2x+2\}$.

(1) 当 $a=-1$ 时, 求 $A\cap B, A\cup B$;

(2) 若 $B\subseteq(\complement_{\mathbf{R}}A)$, 求实数 a 的取值范围.

解: (1) 因为非空集合 $B=\{x\mid -7-x\leq 3x+1\leq 2x+2\}$,

由 $\begin{cases} -7-x\leq 3x+1 \\ 3x+1\leq 2x+2 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x\geq -2 \\ x\leq 1 \end{cases}$, 则 $B=\{x\mid -2\leq x\leq 1\}$,

又 $A=\{x\mid x\leq a\}$, 当 $a=-1$ 时, $A=\{x\mid x\leq -1\}$,

所以 $A\cap B=\{x\mid -2\leq x\leq -1\}$, $A\cup B=\{x\mid x\leq 1\}$.

(2) 因为 $B\subseteq(\complement_{\mathbf{R}}A)$, $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x>a\}$, $B=\{x\mid -2\leq x\leq 1\}$, 所以 $a<-2$,

故实数 a 的取值范围为 $a\in(-\infty,-2)$.

18. 已知函数 $f(x) = 2\sin(-3x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象的一个对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调减区间;

(2) 求 $f(x)$ 的最小值, 并求出此时 x 的取值集合.

解: (1) 因为 $f(x) = 2\sin(-3x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象的一个对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$,

$$\text{所以 } -3 \times \left(-\frac{\pi}{12}\right) + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } \varphi = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 又 } 0 < \varphi < \pi, \text{ 所以 } \varphi = \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{所以 } f(x) = 2\sin\left(-3x + \frac{3\pi}{4}\right) = -2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 3x - \frac{3\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的单调减区间是 } \left[\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z}).$$

$$(2) \text{ 当 } \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) = 1 \text{ 时, } f(x)_{\min} = -2,$$

$$\text{令 } 3x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的最小值是 } -2, \text{ 此时 } x \text{ 的取值集合是 } \left\{x \mid x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

19. (1) 已知 α 角以 x 轴的非负半轴为始边, $P(-1, 2)$ 为终边上一点. 求

$$\frac{\sin(\pi - \alpha) \cos(\alpha - 2\pi) \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) \tan(\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) \cos(3\pi - \alpha) \sin(-\alpha)}$$
 的值;

(2) 已知 α, β 都是锐角, $\cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$, 求 $\cos \beta$ 的值.

$$\text{解: (1) } \frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\alpha-2\pi)\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\tan(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)\cos(3\pi-\alpha)\sin(-\alpha)}$$

$$= \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (-\sin\alpha) \cdot (-\tan\alpha)}{\sin\alpha \cdot (-\cos\alpha) \cdot (-\sin\alpha)}$$

$$= \tan\alpha = \frac{2}{-1} = -2.$$

$$(2) \text{ 由 } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ 可得 } -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{又由 } \cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}, \text{ 有 } \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

$$\cos\beta = \cos[\alpha - (\alpha - \beta)] = \cos\alpha \cos(\alpha - \beta) + \sin\alpha \sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{12 + 3\sqrt{7}}{20}.$$

20. 国庆黄金周期间, 旅游潮、探亲潮必将形成高交通压力现象. 已知某火车站候车厅, 候车人数与时间 t 相关, 时间 t (单位: 小时) 满足 $0 < t \leq 24$, $t \in \mathbb{N}$. 经测算, 当 $16 \leq t \leq 24$ 时, 候车人数为候车厅满厅状态, 满厅人数为 5000 人, 当 $0 < t < 16$, 候车人数相对于满厅人数会减少, 减少人数与 $t(16-t)$ 成正比, 且时间为 6 点时, 候车人数为 3800 人, 记候车厅候车人数为 $f(t)$.

(1) 求 $f(t)$ 的表达式, 并求当天中午 11 点时, 候车厅候车人数;

(2) 铁路系统为了体现“人性化”管理, 每整点时会给旅客提供的免费面包数量为

$$P = \frac{f(t) - 3000}{t} + 400, \text{ 则当 } t \text{ 为何值时需要提供的免费面包数量最少.}$$

解: (1) 当 $0 < t < 16$ 时, 设 $f(t) = 5000 - kt(16-t)$, $f(6) = 3800$, 则 $k = 20$,

$$f(t) = \begin{cases} 5000 - 20t(16-t), & (0 < t < 16) \\ 5000, & (16 \leq t \leq 24) \end{cases}, (t \in \mathbb{N}),$$

$$f(11) = 5000 - 20 \times 11 \times 5 = 3900,$$

故当天中午 11 点时, 候车厅候车人数为 3900 人.

(2) 当 $0 < t < 16$,

$$P = \frac{5000 - 20t(16 - t) - 3000}{t} + 400 = 20\left(t + \frac{100}{t}\right) + 80 \geq 20 \times 2\sqrt{t \times \frac{100}{t}} + 80 = 480,$$

当且仅当 $t = 10$ 时等号成立;

$$\text{当 } 16 \leq t \leq 24 \text{ 时, } P = \frac{5000 - 3000}{t} + 400 \geq \frac{2000}{24} + 400 \approx 483,$$

又 $483 > 480$, 所以当 $t = 10$ 时, 需要提供的面包数量最少.

21. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) - f(x) = 2x - 1$, 且 $f(1) = -4$.

(1) 求 $f(x)$ 的〔解析〕式;

(2) 当 $x \in [-2, 2]$ 时, 不等式 $f(x) > 4x + m$ 恒成立; 求实数 m 的取值范围;

(3) 设 $h(m) = f(2m + a)$, $m \in [-3, 3]$ 求 $h(m)$ 的最大值.

解: (1) 由于 $f(x)$ 是二次函数, 可设 $f(x) = ax^2 + bx + c$,

$$\text{Q } f(x+1) - f(x) = 2x - 1 \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) = 2x - 1 \text{ 恒成立,}$$

$$2ax + a + b = 2x - 1, \text{ 又 } \text{Q } f(1) = -4,$$

$$\therefore \begin{cases} a + b + c = -4, \\ 2a = 2, \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = -2, \\ c = -3. \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

(2) 当 $x \in [-2, 2]$ 时, $f(x) > 4x + m$ 恒成立,

$$\text{即 } x^2 - 6x - 3 > m \text{ 恒成立,}$$

$$\text{令 } g(x) = x^2 - 6x - 3 = (x - 3)^2 - 12,$$

$$\text{当 } x \in [-2, 2] \text{ 时, } g(x) \text{ 单调递减, } g(x)_{\min} = g(2) = -11,$$

所以 $m < -11$.

$$(3) h(m) = f(2m + a) = (2m + a)^2 - 2(2m + a) - 3 = 4m^2 + (4a - 4)m + a^2 - 2a - 3,$$

$m \in [-3, 3]$, 对称轴为 $m_0 = \frac{1-a}{2}$,

①当 $\frac{1-a}{2} \geq 0$, 即 $a \leq 1$ 时, $h(m)_{\max} = h(-3) = a^2 - 14a + 45$;

②当 $\frac{1-a}{2} < 0$, 即 $a > 1$ 时, $h(m)_{\max} = h(3) = a^2 + 10a + 21$,

综上所述 $h(m)_{\max} = \begin{cases} a^2 + 10a + 21, & a > 1, \\ a^2 - 14a + 45, & a \leq 1. \end{cases}$

22. 若函数 $f(x)$ 满足: 对于任意正数 m, n , 都有 $f(m) > 0, f(n) > 0$, 且 $f(m) + f(n) < f(m+n)$, 则称函数 $f(x)$ 为“速增函数”.

(1) 试判断函数 $f_1(x) = x^3$ 与 $f_2(x) = \log_2(x+1)$ 是否为“速增函数”;

(2) 若函数 $g(x) = 2^x - 1 + 2a(2^{-x} - 1)$ 为“速增函数”, 求 a 的取值范围.

解: (1) 对于函数 $f_1(x) = x^3$,

当 $m > 0, n > 0$ 时, 有 $f_1(m) = m^3 > 0, f_1(n) = n^3 > 0$;

因为 $f_1(m) + f_1(n) - f_1(m+n) = m^3 + n^3 - (m+n)^3 = -3nm^2 - 3n^2m < 0$,

所以 $f_1(m) + f_1(n) < f_1(m+n)$,

故根据“速增函数”的定义可得: $f_1(x) = x^3$ 是“速增函数”,

对于函数 $f_2(x) = \log_2(x+1)$,

当 $m = n = 1$ 时, 有 $f_2(m) + f_2(n) = 2 > \log_2 3 = f_2(m+n)$,

故根据“速增函数”的定义可得: $f_2(x) = \log_2(x+1)$ 不是“速增函数”.

(2) 因为 $g(x) = 2^x - 1 + 2a(2^{-x} - 1)$ 是“速增函数”,

根据“速增函数”的定义可得:

当 $n > 0$ 时, $g(n) = 2^n - 1 + 2a(2^{-n} - 1) > 0$ 恒成立;

当 $n > 0, m > 0$ 时, $g(n) + g(m) < g(n+m)$ 恒成立,

由当 $n > 0$ 时, $g(n) = 2^n - 1 + 2a(2^{-n} - 1) > 0$ 恒成立可得:

$(2^n - 1)(2^n - 2a) > 0$ 对一切正数 n 恒成立,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/407130131160006062>