

江苏省徐州、连云港、宿迁三市 2023-2024 学年高三（最后冲刺）数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

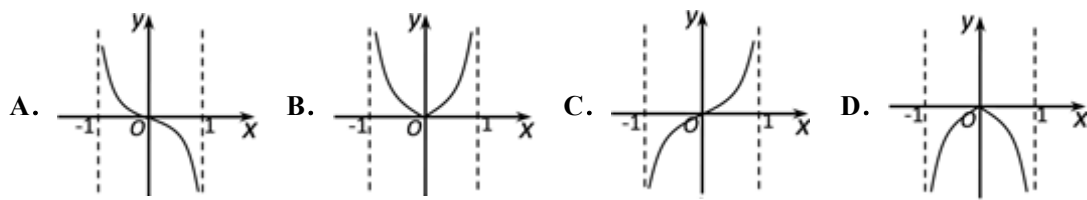
1. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， E ， F ， G 分别是棱 AD ， CC_1 ， C_1D_1 的中点，给出下列四个命题：

- ① $EF \perp B_1C$ ；
- ② 直线 FG 与直线 A_1D 所成角为 60° ；
- ③ 过 E ， F ， G 三点的平面截该正方体所得的截面为六边形；
- ④ 三棱锥 $B-EFG$ 的体积为 $\frac{5}{6}$ 。

其中，正确命题的个数为（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 设函数 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x}$ ，则函数的图像可能为（ ）



3. 若复数 $(2a+i)(1+i)$ (i 为虚数单位) 在复平面内所对应的点在虚轴上，则实数 a 为（ ）

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

4. 在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中， $BD = 2\sqrt{3}$ ，将菱形 $ABCD$ 沿对角线 AC 对折，使二面角 $B-AC-D$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$ ，则所得三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积为（ ）

- A. $\frac{2\pi}{3}$ B. 2π C. 4π D. 6π

5. 若两个非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足 $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = 0$ ，且 $|\vec{a}+\vec{b}| = 2|\vec{a}-\vec{b}|$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值为（ ）

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\pm \frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\pm \frac{1}{2}$

6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 S_n 为前 n 项和， $2a_9 = a_{11} + 12$ ，则 S_{13} 的值是（ ）

- A. 156 B. 124 C. 136 D. 180

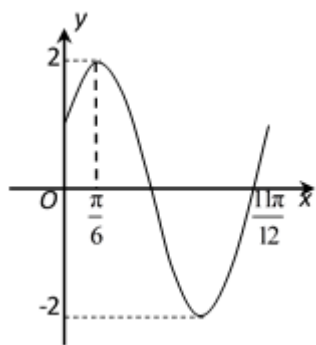
7. 2019 年 10 月 1 日上午, 庆祝中华人民共和国成立 70 周年阅兵仪式在天安门广场隆重举行. 这次阅兵不仅展示了我国的科技军事力量, 更是让世界感受到了中国的日新月异. 今年的阅兵方阵有一个很抢眼, 他们就是院校科研方阵. 他们是由军事科学院、国防大学、国防科技大学联合组建. 若已知甲、乙、丙三人来自上述三所学校, 学历分别有学士、硕士、博士学位. 现知道: ①甲不是军事科学院的; ②来自军事科学院的不是博士; ③乙不是军事科学院的; ④乙不是博士学位; ⑤国防科技大学的是研究生. 则丙是来自哪个院校的, 学位是什么()

- A. 国防大学, 研究生 B. 国防大学, 博士
C. 军事科学院, 学士 D. 国防科技大学, 研究生

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, $\vec{AE} = 2\vec{EB}$, $|\vec{AB}| = \lambda |\vec{AC}|$, 若 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9\vec{AO} \cdot \vec{EC}$, 则实数 $\lambda =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

9. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 且 $f(a+x) + f(a-x) = 0$, 则 $|a|$ 的最小值为 ()



- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

10. 已知四棱锥 $E-ABCD$, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $ED = 1$, 平面 $ECD \perp$ 平面 $ABCD$, 当点 C 到平面 ABE 的距离最大时, 该四棱锥的体积为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. 1

11. 若 $z = (3-i)(a+2i)$ ($a \in R$) 为纯虚数, 则 $z =$ ()

- A. $\frac{16}{3}i$ B. $6i$ C. $\frac{20}{3}i$ D. 20

12. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} y \leq 2 \\ x + y \geq 1 \\ y \geq x \end{cases}$, 则 $z = x + 2y$ 的最小值是 ()

- A. 6
- B. 5
- C. 2
- D. $\frac{3}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知命题 $P: \forall x > 0, x^3 > 0$ ，那么 P 是_____.
14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足公比 $q \neq 1$ ， S_n 为其前 n 项和， S_2, S_4, S_6 构成等差数列，则 $S_{2020} =$ _____.
15. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为棱 AA_1, D_1A_1 的中点，则直线 EF 与直线 A_1B 所成角的正切值为_____.
16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB \perp BC$ ，三角形 PAC 为等边三角形，二面角 $P-AC-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，当三棱锥 $P-ABC$ 的体积最大值为 $\frac{1}{3}$ 时，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = a + 2\ln x, f(x) \leq ax$.
- (1)求 a 的值;
- (2)令 $g(x) = \frac{xf(x)}{x-a}$ 在 $(a, +\infty)$ 上最小值为 m ，证明： $6 < f(m) < 7$.
18. (12 分) 近年空气质量逐步恶化，雾霾天气现象出现增多，大气污染危害加重.大气污染可引起心悸.呼吸困难等心肺疾病.为了解某市心肺疾病是否与性别有关，在某医院随机的对入院 50 人进行了问卷调查得到了如下的列联表：
- | | | | |
|----|-------|--------|----|
| | 患心肺疾病 | 不患心肺疾病 | 合计 |
| 男 | | 5 | |
| 女 | 10 | | |
| 合计 | | | 50 |
- 已知在全部 50 人中随机抽取 1 人，抽到患心肺疾病的人的概率为 $\frac{3}{5}$.
- (1) 请将上面的列联表补充完整，并判断是否有 99.5% 的把握认为患心肺疾病与性别有关？请说明你的理由；
- (2) 已知在不患心肺疾病的 5 位男性中，有 2 位从事的是户外作业的工作.为了指导市民尽可能地减少因雾霾天气对身体的伤害，现从不患心肺疾病的 5 位男性中，选出 3 人进行问卷调查，求所选的 3 人中至少有一位从事的是户外作业的概率.

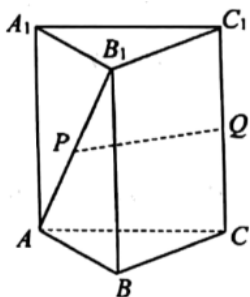
下面的临界值表供参考：

$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
-----------------	------	------	------	-------	-------	-------	-------

k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

(参考公式 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$)

19. (12分) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA=CB$, 点 P, Q 分别为 AB_1, CC_1 的中点. 求证:



- (1) $PQ \parallel$ 平面 ABC ;
- (2) $PQ \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

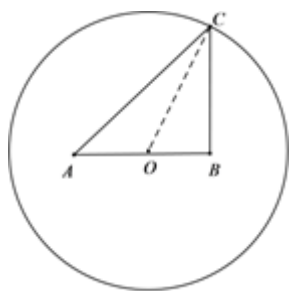
20. (12分) 某公园准备在一圆形水池里设置两个观景喷泉, 观景喷泉的示意图如图所示, A, B 两点为喷泉, 圆心 O 为 AB 的中点, 其中 $OA=OB=a$ 米, 半径 $OC=10$ 米, 市民可位于水池边缘任意一点 C 处观赏.

(1) 若当 $\angle OBC = \frac{2\pi}{3}$ 时, $\sin \angle BCO = \frac{1}{3}$, 求此时 a 的值;

(2) 设 $y = CA^2 + CB^2$, 且 $CA^2 + CB^2 \leq 232$.

(i) 试将 y 表示为 a 的函数, 并求出 a 的取值范围;

(ii) 若同时要求市民在水池边缘任意一点 C 处观赏喷泉时, 观赏角度 $\angle ACB$ 的最大值不小于 $\frac{\pi}{6}$, 试求 A, B 两处喷泉间距离的最小值.



21. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases} x = 1 + 2\cos \alpha \\ y = 2\sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以原点 O 为极点, x 轴正

半轴为极轴, 建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

(I) 求曲线 C 的普通方程与直线 l 的直角坐标方程;

(II)已知直线*l*与曲线*C*交于*A*，*B*两点，与*x*轴交于点*P*，求 $|PA|\cdot|PB|$ 。

22.（10分）第7届世界军人运动会于2019年10月18日至27日在湖北武汉举行，赛期10天，共设置射击、游泳、田径、篮球等27个大项，329个小项.共有来自100多个国家的近万名现役军人同台竞技.前期为迎接军运会顺利召开，武汉市很多单位和部门都开展了丰富多彩的宣传和教育活动，努力让大家更多的了解军运会的相关知识，并倡议大家做文明公民.武汉市体育局为了解广大民众对军运会知识的知晓情况，在全市开展了网上问卷调查，民众参与度极高，现从大批参与者中随机抽取200名幸运参与者，他们得分（满分100分）数据，统计结果如下：

组别	[30,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100)
频数	5	30	40	50	45	20	10

- （1）若此次问卷调查得分整体服从正态分布，用样本来估计总体，设 μ ， σ 分别为这200人得分的平均值和标准差（同一组数据用该区间中点值作为代表），求 μ ， σ 的值（ μ ， σ 的值四舍五入取整数），并计算 $P(51 < X < 93)$ ；
- （2）在（1）的条件下，为感谢大家参与这次活动，市体育局还对参加问卷调查的幸运市民制定如下奖励方案：得分低于 μ 的可以获得1次抽奖机会，得分不低于 μ 的可获得2次抽奖机会，在一次抽奖中，抽中价值为15元的纪念品*A*的概率为 $\frac{2}{3}$ ，抽中价值为30元的纪念品*B*的概率为 $\frac{1}{3}$.现有市民张先生参加了此次问卷调查并成为幸运参与者，记*Y*为他参加活动获得纪念品的总价值，求*Y*的分布列和数学期望，并估算此次纪念品所需要的总金额.

（参考数据： $P(\mu - \delta < X \leq \mu + \delta) \approx 0.6827$ ； $P(\mu - 2\delta < X \leq \mu + 2\delta) \approx 0.9545$ ；

$P(\mu - 3\delta < X \leq \mu + 3\delta) \approx 0.9973$.)

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

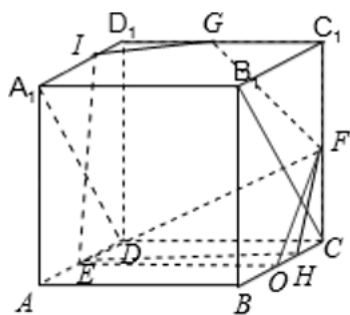
1、C

【解析】

画出几何体的图形，然后转化判断四个命题的真假即可。

【详解】

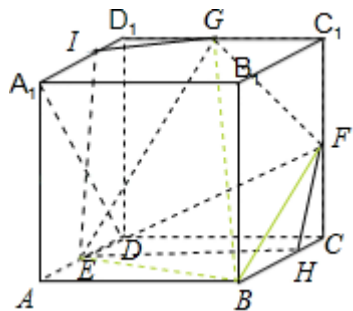
如图；



连接相关点的线段， O 为 BC 的中点，连接 EFO ，因为 F 是中点，可知 $B_1C \perp OF$ ， $EO \perp B_1C$ ，可知 $B_1C \perp$ 平面 EFO ，即可证明 $B_1C \perp EF$ ，所以①正确；

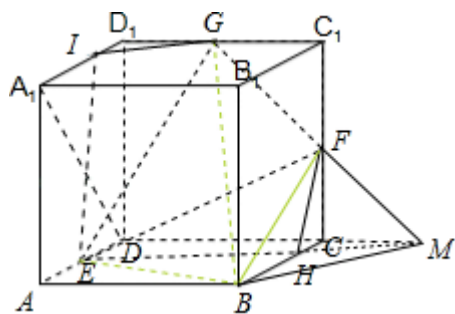
直线 FG 与直线 A_1D 所成角就是直线 A_1B 与直线 A_1D 所成角为 60° ；正确；

过 E ， F ， G 三点的平面截该正方体所得的截面为五边形；如图：



是五边形 $EHFGI$ 。所以③不正确；

如图：



三棱锥 $B-EFG$ 的体积为：

由条件易知 F 是 GM 中点，

所以 $V_{B-EFG} = V_{B-EFM} = V_{F-BEM}$ ，

而 $S_{BEM} = S_{\text{梯形}ABMD} - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle EDM} = \frac{2+3}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{5}{2}$ ，

$V_{F-BEM} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{6}$ 。所以三棱锥 $B-EFG$ 的体积为 $\frac{5}{6}$ ，④正确；

故选：C。

【点睛】

本题考查命题的真假的判断与应用，涉及空间几何体的体积，直线与平面的位置关系的应用，平面的基本性质，是中档题.

2、B

【解析】

根据函数为偶函数排除 A, C ，再计算 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \ln 3 > 0$ 排除 D 得到答案.

【详解】

$$f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} \text{ 定义域为: } (-1, 1)$$

$$f(-x) = -x \ln \frac{1-x}{1+x} = x \ln \frac{1+x}{1-x} = f(x), \text{ 函数为偶函数, 排除 } A, C$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \ln 3 > 0, \text{ 排除 } D$$

故选 B

【点睛】

本题考查了函数图像，通过函数的单调性，奇偶性，特殊值排除选项是常用的技巧.

3、D

【解析】

利用复数代数形式的乘除运算化简，再由实部为 0 求得 a 值.

【详解】

解: $Q(2a+i)(1+i) = (2a-1) + (2a+1)i$ 在复平面内所对应的点在虚轴上,

$$\therefore 2a-1=0, \text{ 即 } a=\frac{1}{2}.$$

故选 D.

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的代数表示法及其几何意义，是基础题.

4、D

【解析】

取 AC 中点 N ，由题意得 $\angle BND$ 即为二面角 $B-AC-D$ 的平面角，过点 B 作 $BO \perp DN$ 于 O ，易得点 O 为 $VADC$ 的

中心，则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球球心在直线 BO 上，设球心为 O_1 ，半径为 r ，列出方程 $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-r\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = r^2$

即可得解.

【详解】

如图，由题意易知 $\triangle VABC$ 与 $\triangle VADC$ 均为正三角形，取 AC 中点 N ，连接 BN ， DN ，

则 $BN \perp AC$ ， $DN \perp AC$ ， $\therefore \angle BND$ 即为二面角 $B-AC-D$ 的平面角，

过点 B 作 $BO \perp DN$ 于 O ，则 $BO \perp$ 平面 ACD ，

由 $BN = ND = \sqrt{3}$ ， $\cos \angle BND = \frac{1}{3}$ 可得 $ON = BN \cdot \cos \angle BND = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $OD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

$$OB = \sqrt{3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$\therefore ON = \frac{1}{3}ND$ 即点 O 为 $\triangle VADC$ 的中心，

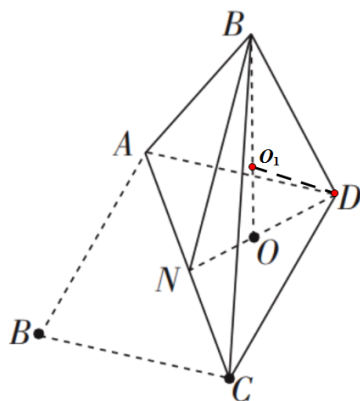
$\therefore$ 三棱锥 $A-BCD$ 的外接球球心在直线 BO 上，设球心为 O_1 ，半径为 r ，

$$\therefore BO_1 = DO_1 = r, \quad OO_1 = \frac{2\sqrt{6}}{3} - r,$$

$$\therefore \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - r\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = r^2 \text{ 解得 } r = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$\therefore$ 三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积为 $S = 4\pi r^2 = 4\pi \times \frac{3}{2} = 6\pi$ 。

故选：D.



【点睛】

本题考查了立体图形外接球表面积求解，考查了空间想象能力，属于中档题.

5、A

【解析】

设平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ，由已知条件得出 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，在等式 $|\vec{a} + \vec{b}| = 2|\vec{a} - \vec{b}|$ 两边平方，利用平面向量数量积的运算律可求得 $\cos \theta$ 的值，即为所求.

【详解】

设平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ， $\vec{Q}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$ ，可得 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，
在等式 $|\vec{a} + \vec{b}| = 2|\vec{a} - \vec{b}|$ 两边平方得 $\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 4\vec{a}^2 - 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2$ ，化简得 $\cos \theta = \frac{3}{5}$ 。

故选：A.

【点睛】

本题考查利用平面向量的模求夹角的余弦值，考查平面向量数量积的运算性质的应用，考查计算能力，属于中等题。

6、A

【解析】

因为 $a_7 + a_{11} = 2a_9 = a_{11} + 12$ ，可得 $a_7 = 12$ ，根据等差数列前 n 项和，即可求得答案。

【详解】

$$Q \ a_7 + a_{11} = 2a_9 = a_{11} + 12,$$

$$\therefore a_7 = 12,$$

$$\therefore S_{13} = \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = 13a_7 = 13 \times 12 = 156.$$

故选：A.

【点睛】

本题主要考查了求等差数列前 n 项和，解题关键是掌握等差中项定义和等差数列前 n 项和公式，考查了分析能力和计算能力，属于基础题。

7、C

【解析】

根据①③可判断丙的院校；由②和⑤可判断丙的学位。

【详解】

由题意①甲不是军事科学院的，③乙不是军事科学院的；

则丙来自军事科学院；

由②来自军事科学院的不是博士，则丙不是博士；

由⑤国防科技大学的是研究生，可知丙不是研究生，

故丙为学士。

综上可知，丙来自军事科学院，学位是学士。

故选：C.

【点睛】

本题考查了合情推理的简单应用，由条件的相互牵制判断符合要求的情况，属于基础题.

8、D

【解析】

将 $\vec{AO}$ 、 $\vec{EC}$ 用 $\vec{AB}$ 、 $\vec{AC}$ 表示，再代入 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9\vec{AO} \cdot \vec{EC}$ 中计算即可.

【详解】

由 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ ，知 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，

所以 $\vec{AO} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$ ，又 $\vec{AE} = 2\vec{EB}$ ，

所以 $\vec{EC} = \vec{AC} - \vec{AE} = \vec{AC} - \frac{2}{3}\vec{AB}$ ， $9\vec{AO} \cdot \vec{EC} = 3(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AC} - \frac{2}{3}\vec{AB})$

$= \vec{AB} \cdot \vec{AC} - 2\vec{AB}^2 + 3\vec{AC}^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ，所以 $2\vec{AB}^2 = 3\vec{AC}^2$ ， $\lambda = \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{AC}|} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

故选：D

【点睛】

本题考查平面向量基本定理的应用，涉及到向量的线性运算，是一道中档题.

9、A

【解析】

a 是函数 $f(x)$ 的零点，根据五点法求出图中零点及 y 轴左边第一个零点可得.

【详解】

由题意 $\frac{3}{4}T = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6}$ ， $T = \pi$ ， $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 y 轴右边的第一个零点为 $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$ ，在 y 轴左边第一个零点是

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12},$$

$\therefore |a|$ 的最小值是 $\frac{\pi}{12}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查三角函数的周期性，考查函数的对称性. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的零点就是其图象对称中心的横坐标.

10、B

【解析】

过点 E 作 $EH \perp CD$ ，垂足为 H ，过 H 作 $HF \perp AB$ ，垂足为 F ，连接 EF . 因为 $CD \parallel$ 平面 ABE ，所以点 C 到平面 ABE

的距离等于点 H 到平面 ABE 的距离 h . 设 $\angle CDE = \theta (0 < \theta \leq \frac{\pi}{2})$ ，将 h 表示成关于 θ

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/407160041006006102>