数列中的知识交汇和创新型问题

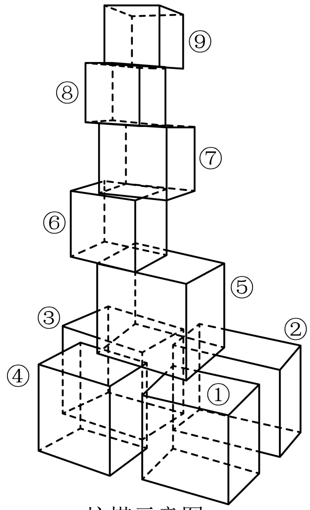
题目 1 王先生今年初向银行申请个人住房贷款100万元购买住房，按复利计算，并从贷款后的次月初开始还贷，分10年还清. 银行给王先生提供了两种还贷方式：①等额本金：在还款期内把本金总额等分，每月偿还同等数额的本金和剩余本金在该月所产生的利息；②等额本息：在还款期内，每月偿还同等数额的贷款(包括本金和利息).

(1) 若王先生采取等额本金的还贷方式，已知第一个还贷月应还15000元，最后一个还贷月应还6500元，试计算王先生该笔贷款的总利息；

(2) 若王先生采取等额本息的还贷方式，贷款月利率为0.3%，. 银行规定每月还贷额不得超过家庭月收入的一半，已知王先生家庭月收入为23000元，试判断王先生该笔贷款能否获批.(不考虑其他因素)

参考数据 $1.003^{119}\approx 1.428$，$1.003^{180}\approx 1.433$，$1.003^{121}\approx 1.437$

题目 2 佛山新城文化中心是佛山地标性公共文化建筑. 在建筑造型上全部都以最简单的方块体作为核心要素，与佛山世纪莲体育中心的圆形莲花造型形成“方”“圆”呼应. 坊塔是文化中心的标志性建筑、造型独特、类似一个个方体错位堆叠，总高度153.6米. 坊塔塔楼由底部4个高度相同的方体组成塔基，支托上部5个方体，交错叠合成一个外形时尚的塔身结构. 底部4个方体高度均为33.6米，中间第5个方体也为33.6米高，再往上2个方体均为24米高，最上面的两个方体均为19.2米高.



坊塔示意图

(1) 请根据坊塔方体的高度数据，结合所学数列知识，写出一个等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，该数列以 33.6 为首项，并使得 24 和 19.2 也是该数列的项；

(2) 佛山世纪莲体育中心上层屋盖外径为 310 米. 根据你得到的等差数列，连续取用该数列前 $m(m \in N^*)$ 项的值作为方体的高度，在保持最小方体高度为 19.2 米的情况下，采用新的堆叠规则，自下而上依次为 $2a_1$、$3a_2$、$4a_3$、……、$(m+1)a_m$（$(m+1)a_m$ 表示高度为 a_m 的方体连续堆叠 $m+1$ 层的总高度），请问新堆叠坊塔的高度是否超过 310 米？并说明理由.

题目 3 在当前市场经济条件下，某服装市场上私营个体商店中的商品所标价格 a 与其实际价值 b 之间存在着相当大的差距. 对购物的消费者来说，这个差距越小越好，而商家则相反，于是就有消费者与商家的“讨价还价”，常见的方法是“对半还价法”，消费者第一次减去定价的一半，商家第一次讨价加上二者差价的一半；消费者第二次还价再减去二者差价的一半，商家第二次讨价，再加上二者差价的一半，如此下去，可得表 1:

表 1

次数	消费者还价	商家讨价
第一次	$b_1=\frac{1}{2}a$	$c_1=b_1+\frac{1}{2}(a-b_1)$
第二次	$b_2=c_1-\frac{1}{2}(c_1-b_1)$	$c_2=b_2+\frac{1}{2}(c_1-b_2)$
第三次	$b_3=c_2-\frac{1}{2}(c_2-b_2)$	$c_3=b_3+\frac{1}{2}(c_2-b_3)$
…	…	…
第 n 次	$b_n=c_{n-1}-\frac{1}{2}(c_{n-1}-b_{n-1})$	$c_n=b_n+\frac{1}{2}(c_{n-1}-b_n)$

消费者每次的还价 $b_n(n\in k)$ 组成一个数列 $\{b_n\}$.

(1) 写出此数列的前三项，并猜测通项 b_n 的表达式并求出 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$；

(2) 若实际价格 b 与定出 a 的价格之比为 $b:a=0.618:1$，利用“对半还价法”讨价还价，最终商家将能有百分之几的利润?

题目 4 近两年，直播带货逐渐成为一种新兴的营销模式，带来电商行业的新增长点. 某直播平台第 1 年初的启动资金为 500 万元，由于一些知名主播加入，平台资金的年平均增长率可达 40%，每年年底把除运营成本 a 万元，再将剩余资金继续投入直播平台.

(1) 若 $a=100$，在第 3 年年底扣除运营成本后，直播平台的资金有多少万元？

(2) 每年的运营成本最多控制在多少万元，才能使得直播平台在第 6 年年底扣除运营成本后资金达到 3000 万元？(结果精确到 0.1 万元)

题目 5 甲、乙两人同时分别入职 A,B 两家公司，两家公司的基础工资标准分别为：A 公司第一年月基础工资数为 3700 元，以后每年月基础工资比上一年月基础工资增加 300 元；B 公司第一年月基础工资数为 4000 元，以后每年月基础工资都是上一年的月基础工资的 1.05 倍.

(1) 分别求甲、乙两人工作满 10 年的基础工资收入总量(精确到 1 元)

(2) 设甲、乙两人入职第 n 年的月基础工资分别为 a_n、b_n 元，记 $c_n=a_n-b_n$，讨论数列 $\{c_n\}$ 的单调性，指出哪年起到哪年止相同年份甲的月基础工资高于乙的月基础工资，并说明理由.

题目 6 治理垃圾是 S 市改善环境的重要举措. 去年 S 市产生的垃圾量为 200 万吨，通过扩大宣传、环保处理等一系列措施，预计从今年开始，连续 5 年，每年的垃圾排放量比上一年减少 20 万吨，从第 6 年开始，每年的垃圾排放量为上一年的 75%.

(1) 写出 S 市从今年开始的年垃圾排放量与治理年数 $n(n\in N^*)$ 的表达式；

(2) 设 A_n 为从今年开始 n 年内的年平均垃圾排放量. 如果年平均垃圾排放量呈逐年下降趋势，则认为现有的治理措施是有效的；否则，认为无效，试判断现有的治理措施是否有效，并说明理由.

题目 7 为了防止某种新冠病毒感染，某地居民需服用一种药物预防. 规定每人每天定时服用一次，每次服用 m 毫克. 已知人的肾脏每 24 小时可以从体内滤除这种药物的 80%，设第 n 次服药后 (滤除之前) 这种药物在人体内的含量是 a_n 毫克，(即 $a_1=m$).

(1) 已知 $m=12$，求 a_2、a_3；

(2) 该药物在人体的含量超过 25 毫克会产生毒副作用，若人需要长期服用这种药物，求 m 的最大值.

题目 8 保障性租赁住房，是政府为缓解新市民、青年人住房困难，作出的重要决策部署. 2021 年 7 月，国务院办公厅发布《关于加快发展保障性租赁住房的意见》后，国内多个城市陆续发布了保障性租赁住房相关政策或征求意见稿. 为了响应国家号召，某地区计划 2021 年新建住房 40 万平方米，其中有 25 万平方米是保障性租赁住房. 预计在今后的若干年内，该市每年新建住房面积平均比上一年增长 8%，另外，每年新建住房中，保障性租赁住房的面积均比上一年增加 5 万平方米.

(1) 到哪一年底，该市历年所建保障性租赁住房的累计面积 (以 2021 年为累计的第一年) 将首次不少于 475 万平方米?

(2) 到哪一年底，当年建造的保障性租赁住房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于 85%?

题目 9 某市2013年发放汽车牌照12万张，其中燃油型汽车牌照10万张，电动型汽车2万张，为了节能减排和控制总量，从2013年开始，每年电动型汽车牌照按50%增长，而燃油型汽车牌照每一年比上一年减少0．5万张，同时规定一旦某年发放的牌照超过15万张，以后每一年发放的电动车的牌照的数量维持在这一年的水平不变.

(1) 记2013年为第一年，每年发放的燃油型汽车牌照数量构成数列$\{a_n\}$，每年发放电动型汽车牌照数为构成数列$\{b_n\}$，完成下列表格，并写出这两个数列的通项公式；

$a_1=10$	$a_2=9.5$	$a_3=$_	$a_4=$_
$b_1=2$	$b_2=3$	$b_3=$_.	$b_4=$_

(2) 从2013年算起，累计各年发放的牌照数，哪一年开始超过200万张？

题目 10 市民小张计划贷款60万元用于购买一套商品住房，银行给小张提供了两种贷款方式：

①等额本金：每月的还款额呈递减趋势，且从第二个还款月开始，每月还款额与上月还款额的差均相同；

②等额本息：每月的还款额均相同.

银行规定，在贷款到账日的次月当天开始首次还款(如2020年7月7日贷款到账，则2020年8月7日首次还款)．已知该笔贷款年限为20年，月利率为0.4%.

(1) 若小张采取等额本金的还款方式，已知第一个还款月应还4900元，最后一个还款月应还2510元，试计算该笔贷款的总利息.

(2) 若小张采取等额本息的还款方式，银行规定，每月还款额不得超过家庭平均月收入的一半．已知小张家庭平均月收入为1万元，判断小张申请该笔贷款是否能够获批(不考虑其他因素).

参考数据：1.0042.61.

(3) 对比两种还款方式，从经济利益的角度考虑，小张应选择哪种还款方式.

题目 11 流行性感冒是由流感病毒引起的急性呼吸道传染病. 某市去年 11 月份曾发生流感，据统计，11 月 1 日该市的新感染者有 30 人，以后每天的新感染者比前一天的新感染者增加 50 人. 由于该市医疗部门采取措施，使该种病毒的传播得到控制，从 11 月 $k+1(9\leqslant k\leqslant 29,k\in N^*)$ 日起每天的新感染者比前一天的新感染者减少 20 人.

(1) 若 $k=9$，求 11 月 1 日至 11 月 10 日新感染者总人数；

(2) 若到 11 月 30 日止，该市在这 30 天内的新感染者总人数为 11940 人，问 11 月几日，该市新感染者人数最多？并求这一天的新感染者人数.

题目 12 某知识测试的题目均为多项选择题，每道多项选择题有 A，B，C，D 这 4 个选项，4 个选项中仅有两个或三个为正确选项. 题目得分规则为：全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分. 已知测试过程中随机地从四个选项中作选择，每个选项是否为正确选项相互独立. 若第一题正确选项为两个的概率为 $\frac{1}{3}$，并且规定若第 $\mathrm{i}(\mathrm{i}=1,2,\cdots,n-1)$ 题正确选项为两个，则第 $\mathrm{i}+1$ 题正确选项为两个的概率为 $\frac{1}{3}$；第 $\mathrm{i}(\mathrm{i}=1,2,\cdots,n-1)$ 题正确选项为三个，则第 $\mathrm{i}+1$ 题正确选项为三个的概率为 $\frac{1}{3}$.

(1) 若第二题只选了"C"一个选项，求第二题得分的分布列及期望；

(2) 求第 n 题正确选项为两个的概率；

(3) 若第 n 题只选择 B、C 两个选项，设 Y 表示第 n 题得分，求证：$E(Y)\leqslant\frac{17}{18}$.

题目 13 甲、乙两人进行象棋比赛，赛前每人发 3 枚筹码. 一局后负的一方，需将自己的一枚筹码给对方；若平局，双方的筹码不动，当一方无筹码时，比赛结束，另一方最终获胜. 由以往两人的比赛结果可知，在一局中甲胜的概率为 0.3、乙胜的概率为 0.2.

(1) 第一局比赛后，甲的筹码个数记为 X，求 X 的分布列和期望；

(2) 求四局比赛后，比赛结束的概率；

(3) 若 $P_i(\mathrm{i}=0,1,\cdots,6)$ 表示“在甲所得筹码为 i 枚时，最终甲获胜的概率”，则 $P_0=0,P_6=1$. 证明：$\{P_{i+1}-P_i\}(\mathrm{i}=0,1,2,\cdots,5)$ 为等比数列.

题目 14 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n,a_1=2$，对任意的正整数 n，点 (a_{n+1},S_n) 均在函数 $f(x)=x$ 图象上.

(1) 证明：数列 $\{S_n\}$ 是等比数列；

(2) 问 $\{a_n\}$ 中是否存在不同的三项能构成等差数列？说明理由.

题目 15 如果数列 $\{a_n\}$ 对任意的 $n\in N^*$，$a_{n+2}-a_{n+1}>a_{n+1}-a_n$，则称 $\{a_n\}$ 为“速增数列”.

(1) 请写出一个速增数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，并证明你写出的数列符合要求；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为“速增数列”，且任意项 $a_n\in Z$，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_k=2023$，求正整数 k 的最大值.

题目 16 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 2(n\in N^*)$，则称 $\{a_n\}$ 是“紧密数列”.

(1) 若 $a_n=\frac{n^2+2n}{4^n}$，判断 $\{a_n\}$ 是否是“紧密数列”，并说明理由；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 $S_n=\frac{1}{4}(n^2+3n)$，判断 $\{a_n\}$ 是否是“紧密数列”，并说明理由；

(3) 设数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{S_n\}$ 都是“紧密数列”，求 q 的取值范围.

题目 17 已知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是各项均为正整数的无穷数列，若 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是递增数列，且 $\{a_n\}$ 中任意两个不同的项的和不是 $\{b_n\}$ 中的项，则称 $\{a_n\}$ 被 $\{b_n\}$ 屏蔽. 已知数列 $\{c_n\}$ 满足 $\frac{1}{c_1}+\frac{3}{c_2}+\cdots+\frac{2n-1}{c_n}=n(n\in N^*)$.

(1) 求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $\{d_n\}$ 为首项与公比均为 c_1+1 的等比数列，求数列 $\{c_n\cdot d_n\}$ 的前 n 项和 S_n，并判断 $\{S_n\}$ 能否被 $\{c_n\}$ 屏蔽，请说明理由.

题目 18 设 $y=f(x)$ 是定义域为 R 的函数，如果对任意的 x_1、$x_2\in R(x_1\neq x_2)$，$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$ 均成立，则称 $y=f(x)$ 是“平缓函数”.

(1) 若 $f_1(x)=\frac{1}{x^2+1}$，$f_2(x)=\sin x$，试判断 $y=f_1(x)$ 和 $y=f_2(x)$ 是否为“平缓函数”？并说明理由；(参考公式：$x>0$ 时，$\sin x<x$ 恒成立)

(2) 若函数 $y=f(x)$ 是“平缓函数”，且 $y=f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数，证明：对任意的 x_1、$x_2\in R$，均有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$；

(3) 设 $y=g(x)$ 为定义在 R 上函数，且存在正常数 $A>1$ 使得函数 $y=A\cdot g(x)$ 为“平缓函数”. 现定义数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=0$，$x_n=g(x_{n-1})(n=2,3,4,\cdots)$，试证明：对任意的正整数 n，$g(x_n)\leqslant\frac{A|g(0)|}{A-1}$.