

重难点突破 05 含参导数的分类讨论

一、当导函数 $f'(x)=0$ 对应 x_1 、 x_2 的值含有参数,不能区分大小时,需要对导函数方程根的大小,即 x_1 、 x_2 的值进行分类讨论,从而得到对应所求函数的单调性.

对导函数方程根分类讨论的解题思路一般为:

- (1)对原函数解析式求导,令导函数 $f'(x)=0$,求出对应的 x_1 和 x_2 ;
- (2)分三种情况分类讨论 x_1 、 x_2 的大小关系,判断不同区间对应导数的正负;
- (3)通过分类讨论情况,综合得到所求的函数单调性及单调区间.

二、当导函数属于一元二次函数类型时,需要对 $f'(x)=0$ 对应的判别式 Δ 的大小进行分类讨论,根据 Δ 与 0 的大小关系判断实数根的个数,从而对函数单调性作出解答.

根据判别式讨论函数单调性问题,基本思路为:

- (1)求出导函数解析式,判断判别式的符号的正负;
- (2)讨论 Δ 大小对应情况,从而确定方程 $f'(x)=0$ 实数根的个数;
- (3)结合实数根对应不同的具体图象,从而判断函数的单调区间.

三、当导函数类型不明确时,参数的不同情况会导致函数导函数类型不同,因此当参数决定导函数类型时,应对参数进行分类讨论从而判断对应函数的单调区间。

以导函数类型为依据的分类讨论解题思路一般为:

- (1)对所求函数求导,得到具体到函数解析式;
- (2)对参数进行分类讨论,探讨不同类别导函数在规定区间的取值,判断对应函数单调区间;
- (3)综合所有情况,对函数的单调区间做出总结,即对应问题所求.

1. (2023 春·商洛期末) 已知函数 $f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-12ax$.

(1) 当 $a=0$ 时, 求 $f(x)$ 在 $[-2, 4]$ 上的最值;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

【解答】解: (1) 已知 $f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-12ax$, 函数定义域为 R ,

当 $a=0$ 时, $f(x)=2x^3-6x^2$,

重难点突破 05 含参导数的分类讨论

一、当导函数 $f'(x)=0$ 对应 x_1 、 x_2 的值含有参数,不能区分大小时,需要对导函数方程根的大小,即 x_1 、 x_2 的值进行分类讨论,从而得到对应所求函数的单调性.

对导函数方程根分类讨论的解题思路一般为:

- (1)对原函数解析式求导,令导函数 $f'(x)=0$,求出对应的 x_1 和 x_2 ;
- (2)分三种情况分类讨论 x_1 、 x_2 的大小关系,判断不同区间对应导数的正负;
- (3)通过分类讨论情况,综合得到所求的函数单调性及单调区间.

二、当导函数属于一元二次函数类型时,需要对 $f'(x)=0$ 对应的判别式 Δ 的大小进行分类讨论,根据 Δ 与 0 的大小关系判断实数根的个数,从而对函数单调性作出解答.

根据判别式讨论函数单调性问题,基本思路为:

- (1)求出导函数解析式,判断判别式的符号的正负;
- (2)讨论 Δ 大小对应情况,从而确定方程 $f'(x)=0$ 实数根的个数;
- (3)结合实数根对应不同的具体图象,从而判断函数的单调区间.

三、当导函数类型不明确时,参数的不同情况会导致函数导函数类型不同,因此当参数决定导函数类型时,应对参数进行分类讨论从而判断对应函数的单调区间。

以导函数类型为依据的分类讨论解题思路一般为:

- (1)对所求函数求导,得到具体到函数解析式;
- (2)对参数进行分类讨论,探讨不同类别导函数在规定区间的取值,判断对应函数单调区间;
- (3)综合所有情况,对函数的单调区间做出总结,即对应问题所求.

1. (2023 春·商洛期末) 已知函数 $f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-12ax$.

(1) 当 $a=0$ 时, 求 $f(x)$ 在 $[-2, 4]$ 上的最值;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

【解答】解: (1) 已知 $f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-12ax$, 函数定义域为 R ,

当 $a=0$ 时, $f(x)=2x^3-6x^2$,

可得 $f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x - 2)$,

当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以当 $x = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值, 极大值 $f(0) = 0$,

当 $x = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值, 极小值 $f(2) = -8$,

又 $f(-2) = -40$, $f(4) = 32$,

所以 $f(x)$ 在 $[-2, 4]$ 上的最大值为 32, 最小值为 -40;

(2) 易知 $f'(x) = 6x^2 + 6(a - 2)x - 12a = 6(x + a)(x - 2)$,

若 $-a < 2$, 即 $a > -2$ 时,

当 $x < -a$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $-a < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

若 $-a = 2$, 即 $a = -2$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 单调递增;

若 $-a > 2$, 即 $a < -2$ 时,

当 $x < 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $2 < x < -a$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > -a$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

综上, 当 $a > -2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -a)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(-a, 2)$ 上单调递减;

当 $a = -2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增;

当 $a < -2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 和 $(-a, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(2, -a)$ 上单调递减.

2. (2023 春·荔湾区期末) 已知函数 $f(x) = axe^x - \frac{1}{2}(x+1)^2, a \in R$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

【解答】解: (1) $f(x) = axe^x - \frac{1}{2}(x+1)^2$,

$$f'(x) = a(e^x + xe^x) - \frac{1}{2} \cdot 2(x+1) = a(x+1)e^x - (x+1) = (x+1)(ae^x - 1),$$

当 $a=0$ 时, $ae^x - 1 < 0$,

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = -1$,

所以在 $(-\infty, -1)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

在 $(-1, +\infty)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = -1$ 或 $\ln \frac{1}{a}$,

①若 $-1 < \ln \frac{1}{a}$, 即 $0 < a < e$ 时,

在 $(-\infty, -1)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

在 $(-1, \ln \frac{1}{a})$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

在 $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

②若 $-1 > \ln \frac{1}{a}$, 即 $a > e$ 时,

在 $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

在 $(\ln \frac{1}{a}, -1)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

在 $(-1, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

③若 $-1 = \ln \frac{1}{a}$, 即 $a = e$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 单调递增,

综上所述, 当 $a=0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减,

当 $0 < a < e$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(\ln \frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, \ln \frac{1}{a})$ 上单调递减,

当 $a > e$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln \frac{1}{a})$, $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\ln \frac{1}{a}, -1)$ 上单调递减,

当 $a = e$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增.

3. (2023 春·朝阳期末) 已知函数 $f(x) = \ln(x-1) - a^2x (a \in R)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;

【解答】解: (1) 因为 $f(x) = \ln(x-1) - a^2x$,

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{1}{x-1} - a^2 = \frac{1-a^2(x-1)}{x-1} = \frac{-a^2x+a^2+1}{x-1},$$

$$\text{当 } a=0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{1}{x-1},$$

所以在 $(0,1)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

在 $(1,+\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时, 令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = \frac{a^2+1}{a^2} = 1 + \frac{1}{a^2},$$

所以在 $(1, 1+\frac{1}{a^2})$ 上, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

在 $(1+\frac{1}{a^2}, +\infty)$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

所以当 $a=0$ 时, $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

当 $a \neq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(1, 1+\frac{1}{a^2})$ 上单调递增, 在 $(1+\frac{1}{a^2}, +\infty)$ 上单调递减.

4. (2023 春·铁西区校级期中) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3a^2x + 1 (a \in R)$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[-4, 4]$ 上的最大值和最小值;

(2) 试讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

【解答】解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$,

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1),$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x=1 \text{ 或 } x=-3,$$

所以在 $(-3,1)$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

在 $(-4,-3)$, $(1,4)$ 上, $f'(x)$ 单调递增,

$$f(-4) = -\frac{64}{3} + 16 + 12 + 1 = \frac{23}{3},$$

$$f(-3) = -9 + 9 + 9 + 1 = 10,$$

$$f(1) = \frac{1}{3} + 1 - 3 + 1 = -\frac{2}{3},$$

$$f(4) = \frac{64}{3} + 16 - 12 + 1 = \frac{79}{3},$$

$$\text{所以 } f(x)_{\max} = \frac{79}{3}, \quad f(x)_{\min} = -\frac{2}{3}.$$

$$(2) \quad f'(x) = x^2 + 2ax - 3a^2 = (x+3a)(x-a),$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x = -3a \text{ 或 } x = a,$$

$$\text{当 } -3a = a, \text{ 即 } a = 0 \text{ 时, } f'(x) = x^2 \geq 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增,

$$\text{当 } -3a < a, \text{ 即 } a > 0 \text{ 时,}$$

$$\text{在 } (-\infty, -3a), (a, +\infty) \text{ 上, } f'(x) > 0, \quad f(x) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{在 } (-3a, a) \text{ 上, } f'(x) < 0, \quad f(x) \text{ 单调递减,}$$

$$\text{当 } -3a > a, \text{ 即 } a < 0 \text{ 时,}$$

$$\text{在 } (-\infty, a), (-3a, +\infty) \text{ 上, } f'(x) > 0, \quad f(x) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{在 } (a, -3a) \text{ 上, } f'(x) < 0, \quad f(x) \text{ 单调递减,}$$

综上所述, 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增,

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -3a), (a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-3a, a)$ 上单调递减,

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, a), (-3a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(a, -3a)$ 上单调递减.

$$5. \quad (2023 \text{ 春} \cdot \text{越秀区校级月考}) \text{ 设函数 } f(x) = \ln x + ax, \quad g(x) = x^2 + \frac{a^2}{4}.$$

(1) 求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: 当 $a \neq 1$ 时, $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象有 2 条公切线.

$$\text{【解答】解: (1) } h(x) = f(x) - g(x) = \ln x + ax - x^2 - \frac{a^2}{4},$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} + a - 2x = \frac{-2x^2 + ax + 1}{x},$$

$$\text{令 } t(x) = -2x^2 + ax + 1, \quad x > 0,$$

$$\Delta = a^2 - 4 \times (-2) \times 1 = a^2 + 8 > 0, \quad \text{且 } t(0) = 1,$$

方程 $-2x^2 + ax + 1 = 0$ 的根为 $x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 8}}{4}$ 或 $x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 8}}{4}$, $x_1 > 0 > x_2$,

所以在 $(0, \frac{a + \sqrt{a^2 + 8}}{4})$ 上 $t(x) > 0$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

在 $(\frac{a + \sqrt{a^2 + 8}}{4}, +\infty)$ 上 $t(x) < 0$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

(2) 证明: 设 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, g(x_2))$ 分别是 $f(x)$, $g(x)$ 图象上的点,

所以 $f(x)$ 在 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线方程为 $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$, 即

$$y - (\ln x_1 + ax_1) = (\frac{1}{x_1} + a)(x - x_1),$$

所以 $f(x)$ 在 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线方程为 $y = (\frac{1}{x_1} + a)x - 1 + \ln x_1$,

$g(x)$ 在 $(x_2, g(x_2))$ 处的切线方程为 $y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)$, 即 $y - (x_2^2 + \frac{a^2}{4}) = 2x_2(x - x_2)$,

所以 $g(x)$ 在 $(x_2, g(x_2))$ 处的切线方程为 $y = 2x_2x - x_2^2 + \frac{a^2}{4}$,

$$\text{若 } f(x) \text{ 和 } g(x) \text{ 有公切线, 则 } \begin{cases} \frac{1}{x_1} + a = 2x_2 \\ -1 + \ln x_1 = -x_2^2 + \frac{a^2}{4} \end{cases},$$

$$\text{所以 } a = 2x_1 - 2x_1 \ln x_1 - \frac{1}{2x_1},$$

若 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象有 2 条公切线. 则 $a = 2x_1 - 2x_1 \ln x_1 - \frac{1}{2x_1}$ 有两个根,

$$\text{令 } F(x) = 2x - 2x \ln x - \frac{1}{2x},$$

$$F'(x) = 2 - 2(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) - \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -2 \ln x + \frac{1}{2x^2},$$

$$F''(x) = -\frac{2}{x} + \frac{1}{2} \cdot (-2 \cdot \frac{1}{x^3}) = -\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} < 0,$$

所以 $F'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{又 } F'(1) > 0, \quad F'(2) < 0,$$

所以存在 $x_0 \in (1, 2)$ 使得 $F'(x_0) = 0$, 即 $-2 \ln x_0 + \frac{1}{2x_0^2} = 0$, 即 $\ln x_0 = \frac{1}{4x_0^2}$,

所以在 $(0, x_0)$ 上 $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增,

在 $(x_0, +\infty)$ 上 $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减,

$$\text{所以 } F(x)_{\max} = F(x_0) = 2x_0 - 2x_0 \ln x_0 - \frac{1}{2x_0} = 2x_0 - 2x_0 \cdot \frac{1}{4x_0^2} - \frac{1}{2x_0} = 2x_0 - \frac{1}{x_0},$$

因为 $x_0 \in (1, 2)$,

$$\text{所以 } F(x)_{\max} = 2x_0 - \frac{1}{x_0} \in (1, \frac{7}{2}),$$

所以当 $a \geq 1$ 时, 方程 $a = 2x_1 - 2x_1 \ln x_1 - \frac{1}{2x_1}$ 有两个根, 得证.

6. (2023 春·仁寿县校级期中) 已知函数 $f(x) = x - a \ln x$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 求 a 的取值范围.

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

【解答】解: (1) 由题意得 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x}$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 满足题意;

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = \frac{x-a}{x} \geq 0$ 得 $x \geq a$ (不符合题意, 舍去) 或 $x \leq a$,

要使 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $a \geq 1$, 即 $0 < a \leq 1$,

综上所述, a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$;

(2) 由 (1) 得当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 单调递增,

由 $f'(x) = \frac{x-a}{x} < 0$ 得 $0 < x < a$, 即 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递减.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, a)$.

7. (2023·中卫一模) 已知函数 $f(x) = 2x^2 - a \ln x^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

【解答】解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = 2x^2 - 2a \ln x$, 则 $f'(x) = 4x - \frac{2a}{x} = \frac{4(x^2 - \frac{1}{2}a)}{x}$,

当 $a \leq 0$ 时 $f'(x) > 0$, 可知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \frac{\sqrt{2a}}{2}$, 今 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{\sqrt{2a}}{2}$.

因为 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数,

所以当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\frac{\sqrt{2a}}{2}, 0)$, $(\frac{\sqrt{2a}}{2}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, -\frac{\sqrt{2a}}{2})$, $(0, \frac{\sqrt{2a}}{2})$;

8. (2023 春·怀仁市期末) 已知函数 $f(x) = (x-2)e^x - \frac{a}{2}x^2 + ax$, $a \in R$.

(1) 若 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

【解答】解: (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = (x-2)e^x$, $f'(x) = (x-1)e^x$, $f'(0) = (0-1)e^0 = -1$,

$f(0) = -2$,

$\therefore$ 切线方程为: $y - (-2) = (-1)(x - 0)$, 即 $x + y + 2 = 0$.

(2) 因为 $f(x) = (x-2)e^x - \frac{a}{2}x^2 + ax$, $a \in R$,

所以 $f'(x) = (x-1)e^x - ax + a = (x-1)(e^x - a)$.

① 当 $a = 0$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < 1$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减;

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 1$, $\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

② 当 $0 < a < e$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $\ln a < x < 1$, $\therefore f(x)$ 在 $(\ln a, 1)$ 上单调递减;

令 $f'(x) > 0$, 得 $x < \ln a$ 或 $x > 1$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

③ 当 $a = e$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $x \in R$ 时恒成立, $\therefore f(x)$ 在 R 单调递增;

④ 当 $a > e$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < \ln a$, $\therefore f(x)$ 在 $(1, \ln a)$ 上单调递减;

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \ln a$ 或 $x < 1$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

综上所述: 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $0 < a < e$ 时, $f(x)$ 在 $(\ln a, 1)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, \ln a)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/408054033067006130>