第1章　随机事件及其概率

1.1　随机事件

1.2　 随机事件的概率

1.3　 条件概率与事件的独立性

1.4　全概率公式与逆概率公式

1.1　　随机事件

一、随机试验

二、样本空间

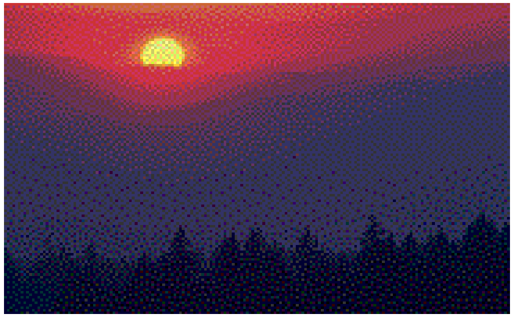
三、随机事件及其发生

四、事件之间的关系和运算

自然界所观察到的现象：确定性现象　随机现象

（1）确定性现象

在一定条件下必然发生的现象称为确定性现象.



实例

“太阳不会从西边升起”,

“水从高处流向低处”,

“同性电荷必然互斥”,

确定性现象的特征　条件完全决定结果

(2) 随机现象

在一定条件下可能出现也可能不出现的现象

称为随机现象.

实例1　在相同条件下掷一枚均匀的硬币，观察正反两面出现的情况.

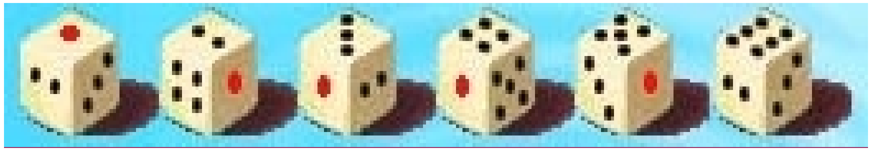
结果有可能出现正面也可能出现反面.

实例2　用同一门炮向同一目标发射同一种炮弹多发，观察弹落点的情况.

结果: 弹落点会各不相同.

实例3　抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

结果有可能为:



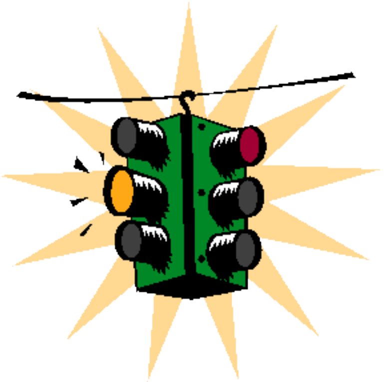
1,　2,　3,
4,　5 或 6.

实例4　从一批含有正品和次品的产品中任意抽取一个产品.

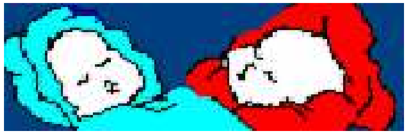
其结果可能为:

正品 、次品.

实例5　过马路交叉口时,可能遇上各种颜色的交通指挥灯.



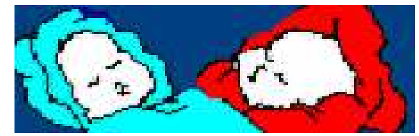
实例6　出生的婴儿可能是男,也可能是女.



实例7　明天的天气可能是晴，也可能是多云或雨.

随机现象的特征  条件不能完全决定结果

实例6　出生的婴儿可能是男,也可能是女.



实例7　明天的天气可能是晴，也可能是多云或雨.

随机现象的特征　条件不能完全决定结果

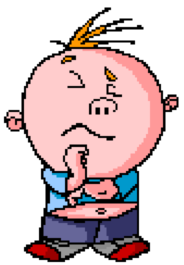
说明

(1) 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系，其数量关系无法用函数加以描述.

(2) 随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量试验或观察中，这种结果的出现具有一定的统计规律性，概率论就是研究随机现象规律性的一门数学学科.

如何来研究随机现象?

随机现象是通过随机试验来研究的.



问题　　什么是随机试验?

一、随机试验

在概率论中,把具有以下三个特征的试验称为**随机试验**。

（1）可以在相同的条件下重复地进行；

（2）每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果；

（3）进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

说明

(1) 随机试验简称为试验, 是一个广泛的术语.它包括各种各样的科学实验, 也包括对客观事物进行的“调查”、“观察”或 “测量” 等.

(2) 随机试验通常用 E 来表示.

实例 “抛掷一枚硬币,观察正面、反面出现的情况”.

分析

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 试验的所有可能结果:

正面、反面;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

故为随机试验.

同理可知下列试验都为随机试验.

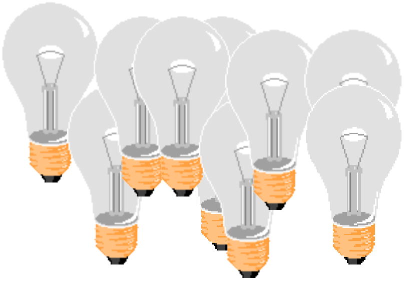
(1) 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

(2) 从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的件数.

(3) 记录某公共汽车站某时刻的等车人数.

(4) 考察某地区 10 月份的平均气温.

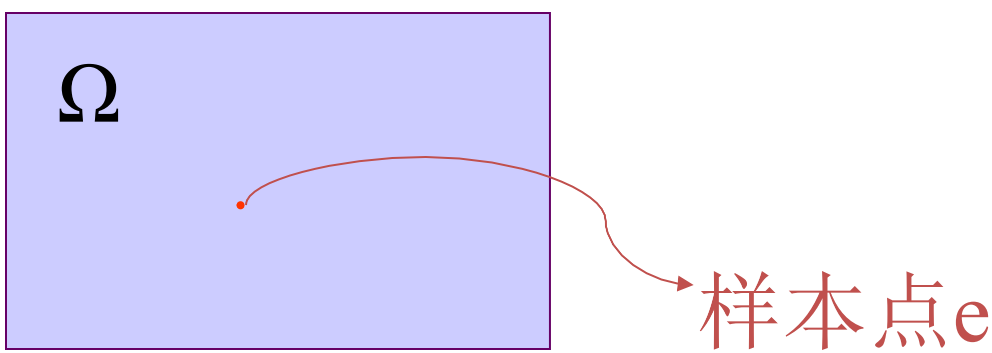
(5) 从一批灯泡中任取一只,测试其寿命.



二、样本空间

现代集合论为表述随机试验提供了一个方便的工具 .

我们把随机试验的每个基本结果称为样本点，记作e 或ω. 全体样本点的集合称为样本空间. 样本空间用Ω表示.



实例1　抛掷一枚硬币,观察正面,反面出现的情况.

$H \rightarrow$ 正面朝上

$T \rightarrow$ 反面朝上

$$\Omega_1 = \{H, T\}.$$

实例2　抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

$$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

实例3　从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的情况.

记 $N \to$ **正品**　$D \to$ **次品**

则 $\Omega_3 = \{ NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DDN, DND, DDD \}.$

实例4　从一批灯泡中任取一只, 测试其寿命.

$$\Omega_4 = \{ t \mid t \ge 0 \}.$$

其中 t **为灯泡的寿命.**

实例5 记录某城市120 急救电话台一昼夜接到的呼唤次数.

$$\Omega_5 = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

说明　1. 试验不同, 对应的样本空间也不同.

2. 同一试验 , 若试验目的不同,则对应的样本空 间也不同.

例如　对于同一试验: “将一枚硬币抛掷三次”.

若观察正面 H、反面 T 出现的情况 ,则样本空间为

$$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,TTH,THT,TTT\}.$$

若观察出现正面的次数 , 则样本空间为

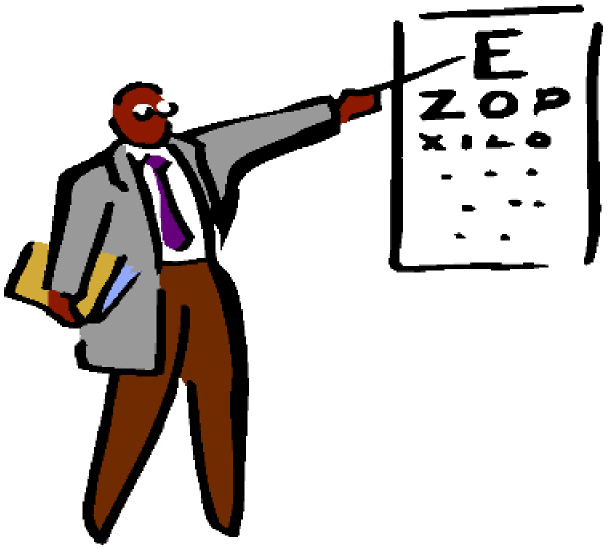
$$\Omega=\{0,1,2,3\}.$$

说明　3. 建立样本空间,事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此, 一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

例如　只包含两个样本点的样本空间

$$\Omega = \{H, T\}$$

它既可以作为抛掷硬币出现正面或出现反面的模型, 也可以作为产品检验中合格与不合格的模型, 又能用于排队现象中有人排队与无人排队的模型等.



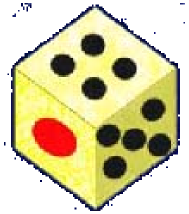
在具体问题的研究中，描述随机现象的第一步就是建立样本空间.

三、随机事件及其发生

随机事件：

通俗地讲　随机事件是指随机试验中可能发生也可能不发生的结果。

根据这个说法不难发现　随机事件和样本空间的子集有一一对应关系！

实例 抛掷一枚骰子，观察出现的点数. 

“点数不大于4”，“点数为偶数” 等都为随机事件.

它们分别可以对应了样本空间$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$的

子集$\{1,2,3,4\}$和$\{2,4,6\}$.

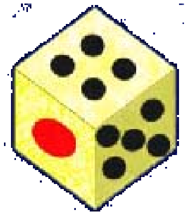
反过来，Ω的每个子集都对应了该试验的一个随机事件.

随机事件的定义

随机试验 E 的样本空间Ω 的子集称为 E 的随机事件，简称事件.

当且仅当子集A中某个样本点出现时，称事件A发生.

实例 抛掷一枚骰子，观察出现的点数.



特别地：

基本事件 由一个样本点组成的单点集

实例 “出现1点”，“出现2点”，…，“出现6点”.

必然事件 随机试验中必然发生的事件.

实例 上述试验中 “点数不大于6” 就是必然事件.

不可能事件 随机试验中不可能发生的事件.

实例 上述试验中 “点数大于6” 就是不可能事件.

几点说明

1) 随机事件可简称为事件, 并以大写英文字母 A, B, C, … 来表示事件

例如　抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

可设　A = “点数不大于4”,

B = “点数为奇数” 等
等.

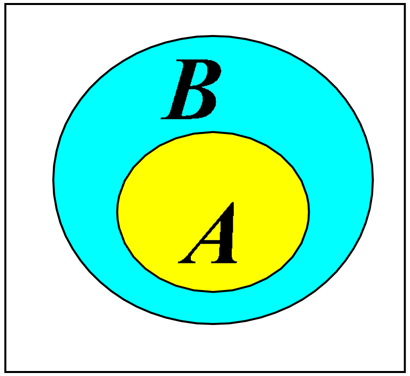
2) 随机试验、样本空间与随机事件的关系

每一个随机试验相应地有一个样本空间, 样本空间的子集就是随机事件.

样本空间Ω作为自身最大的子集包含所有的样本点（基本事件），表示必然事件.

空集 ϕ 不含任何样本点表示不可能事件.

四、事件之间的关系和运算



事件之间的关系

$A \subset B$

1. 事件的包含

设 A、B 为两个事件，如果 A 中的基本事件都是 B 的基本事件，则称 A 包含于 B，记为 $A \subset B$，或 B 包含 A，记为 $B \supset A$.

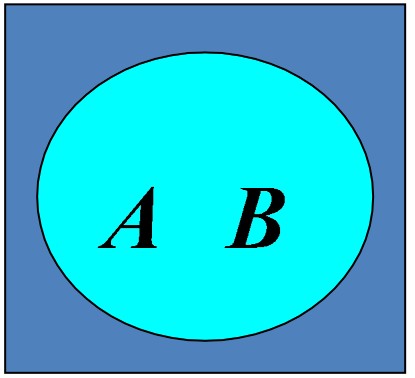
事件 A 发生 ⟶ 事件 B 发生

实例 A="长度不合格" 必然导致 B="产品不合格"

所以 $A \subset B$

2.事件的相等

若两个事件 A 和 B 相互包含，则称这两个事件相等，记为 $A=B$.



$A = B$

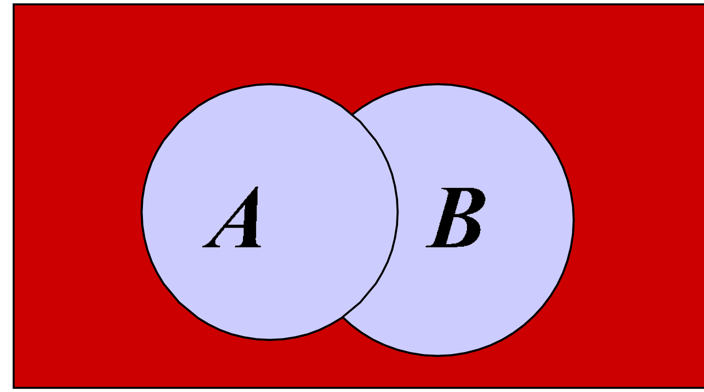
$A \subset B$ 且 $B \subset A$ $\Rightarrow$ $A = B$

A 和 B 同时发生或者同时不发生

3.事件的和（并）

A和B至少有一个发生

$\Leftrightarrow A \cup B$发生

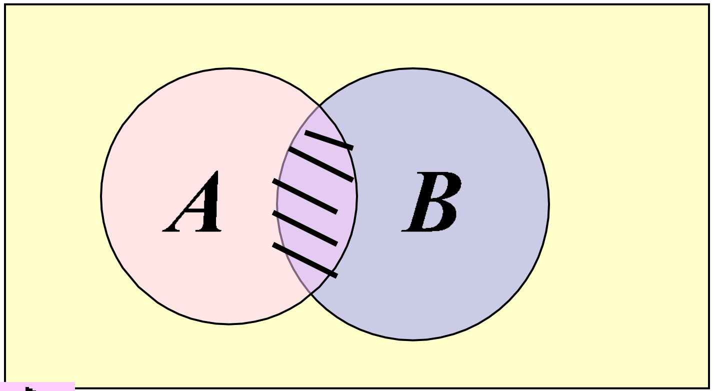


$A \cup B$

将事件 A的基本事件和 B的基本事件合在一起组成的一个新事件，称为A 和B的和事件，记为$A \cup B$，可读成 A并 B或 A加 B.有时也可记为 $A + B$.

实例 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,因此 C=“产品不合格”是A=“长度不合格”与B=“直径不合格”的并，　即 $C = A \cup B$

4.事件的积（交）



$A \cap B$

A和B同时发生$\Leftrightarrow A \cap B$发生

将事件A的和B共有基本事件合在一起组成的一个新事件，称为A和B的和事件，记为$A \cap B$，可读成A交B或A乘B. 有时也可记为 AB.

实例　某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,设C＝“产品合格”,A＝“长度合格”,B＝“直径合格”.　　则　$C = A \cap B = AB$

推广　称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件;

称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件;

称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

和事件与积事件的运算性质

$$A \cup A = A, \quad A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cup \varnothing = A,$$

$$A \cap A = A, \quad A \cap \Omega = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

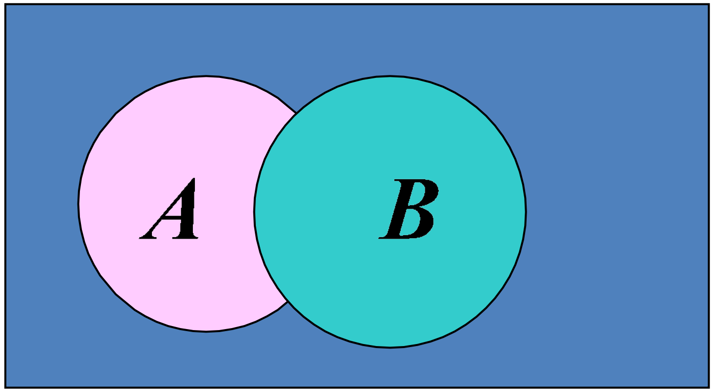
5.事件的差（减）

事件A 发生而事件 B不发生

从事件 A 中将属于事件 B 的基本事件除去,剩下的基本事件组成的新事件称为 A 和 B的差事件,记为 $A-B$.

实例 设 C ＝“长度合格但直径不合格”, A ＝ “长度合格”, B ＝ “直径合格”.

则$C = A - B$



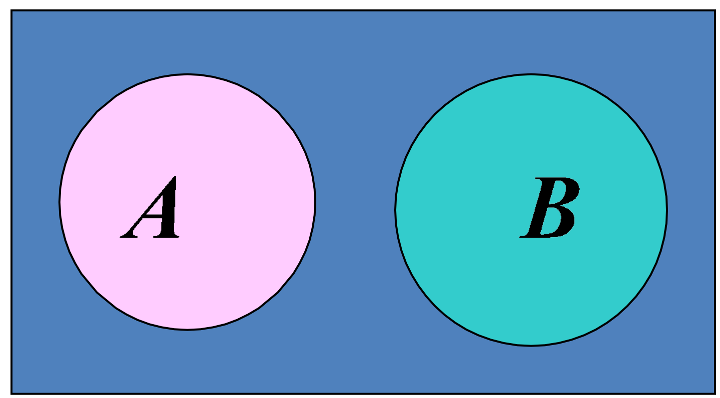
$A-B$

6.事件的互斥（互不相容）

事件 A、B 不可能同时发生

若事件 A 和 B 没有共同的基本事件，则称 A 和 B 互斥，也称互不相容，记为 $A \cap B = \phi$ 或 $AB = \phi$

注意 基本事件是两两互斥的 .



$A \cap B = \phi$ 或 $AB = \phi$

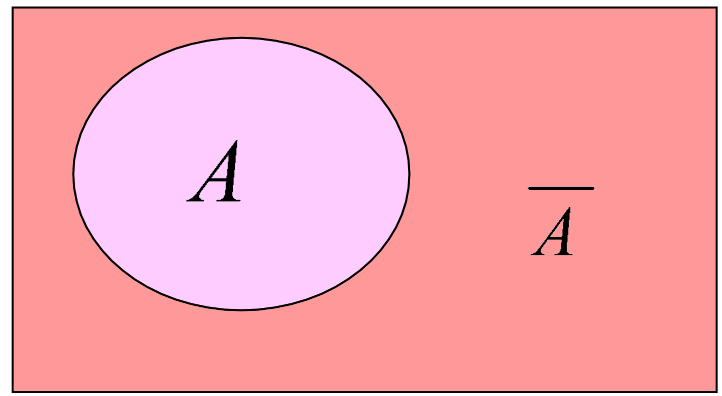
7.事件的逆（对立事件）

事件 A不发生

称必然事件Ω和事件 A的差$\Omega - A$ 为 A的逆事件，记为 $\overline{A}$ ，若B是A的逆事件，则$B = \overline{A} = \Omega - A$

显然，$\overline{\overline{A}} = A$

$B = \overline{A}$时，A, B互逆



$\overline{A}$

如果A和 B互逆，则也可称 A 和 B互为对立事件

实例 “骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{对立}}$ “骰子不出现1点”

事件的运算规律

由集合的运算律，易给出事件间的运算律. 设 A,B,C 为同一随机试验 E 中的事件，则有

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A,$

$A\cap B=B\cap A;$

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$

(4) 自反律 $\overline{\overline{A}} = A;$

(5) 对偶律 $\overline{(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}},$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

注： 上述各运算律可推广到有限个或可数个事件的情形.

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1}\;\overline{A_2}\;\cdots\;\overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 A_2 \cdots A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$$

（6）吸收律　若$A \subset B$,则$AB = A, A \cup B = B$

（7）替换律

$$AB = A - (A - B) = B - (B - A)$$

$$A \cup B = A \cup (B - A) = B \cup (A - B)$$

$$A - B = A - AB = A \cup B - B = A\overline{B}$$

$$A - B - C = A - (B \cup C) = A\ \overline{B}\ \overline{C}$$

例 1　甲, 乙, 丙三人各射一次靶, 记 A –“甲中靶”, B – “乙中靶”, C – “丙中靶”, 则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件:

(1) “甲未中靶”　$\overline{A}$;

(2) “甲中靶而乙未中靶” $A\overline{B}$;

(3) “三人中只有丙未中靶” $AB\overline{C}$;

(4) “三人中恰好有一人中靶” $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$;

(5) “三人中至少有一人中靶” $A \cup B \cup C$ 或 $\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}$;

(6)“三人中至少有一人未中靶” $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$;

(7)“三人中恰有两人中靶” $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$;

(8)“三人中至少有两人中靶” $AB \cup AC \cup BC$;

(9)“三人中均未中靶” $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(10)“三人中至多一人中靶”

$$A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C};$$

(11)“三人中至多两人中靶” $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

（6）“三人中至少有一人未中靶”

(11)“三人中至多两人中靶”

注: 用其它事件的运算来表示一个事件，方法往往不唯一, 如本例中的 (6)和 (11)实际上是同一事件, 大家应学会用不同方法表达同一事件, 特别在解决具体问题时, 往往要更具需要选择一种恰当的表示方法.

研究随机现象，不仅关心试验中会出现哪些事件，更重要的是想知道事件出现的可能性大小，也就是事件的概率.

概率是随机事件发生可能性大小的度量

事件发生的可能性越大，概率就越大！

1.2　随机事件的概率

一、概率的统计意义

二、 概率的公理化定义

三、概率的性质

四、概率的古典定义

一、概率的统计意义

定义 若在相同条件下进行 n 次试验，其中A发生的次数为$r_n(A)$，则称 $f_n(A)=\dfrac{r_n(A)}{n}$ 为事件A发生的频率.

显然 $0 \le r_n(A) \le n$ $0 \le f_n(A) \le 1;$

实例 将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 7 遍, 观察正面出现的次数及频率.

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	$r_n(A)$	$f_n(A)$	$r_n(A)$	$f_n(A)$	$r_n(A)$	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	[illegible]	[illegible]	249	0.498
3	[illegible]	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	247	0.494
5	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.502
6	2	0.4	18	0.36	262	0.524
7	4	0.8	27	0.54	258	0.516

在$\frac{1}{2}$处波动较大

随n的增大, 频率 $f_n(H)$呈现出稳定性

在$\frac{1}{2}$处波动较小

在$\frac{1}{2}$处波动最小