专题 01 集合综合归类

题型盘点·直击高考

目录

题型突围·精准提分

题型一：相等集合

指 | 点 | 迷 | 津

集合的相关概念

（1）集合元素的三个特性：互异、无序、确定性.

（2）元素与集合的两种关系：属于，记为 $\in$ ；不属于，记为$\notin$.

（3）集合的四种表示方法：列举法、描述法、韦恩图法、符号法.

1.（2023·浙江·三模）设函数 $y=f(x)$的定义域与值域都是 R，且单调递增，$A=\{x \mid f(x)=x\}, B=\{x \mid f(f(x))=x\}$，则(　　)

A. $A \subsetneq B$　　B. $B \subsetneq A$　　C. A=B　　D. $A \cap B \neq \phi$

【答案】C

【分析】先设 $x_0 \in A$，由元素与集合的关系可得 $x_0 \in B$,即 $A \subseteq B$，
再设 $x_0 \in B$，同理可得 $x_0 \in A$，即 $B \subseteq A$,即可得 $A=B$.

【详解】解：设 $x_0 \in A$，则 $f(x_0)=x_0$，则 $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$ ，即 $x_0 \in B$,即 $A \subseteq B$，
设 $x_0 \in B$，则 $f(f(x_0))=x_0$，不妨设 $f(x_0)=t$，则 $f(t)=x_0$，
当 $x_0>t$ 时，因为函数 $y=f(x)$为单调递增函数，则 $f(x_0)>f(t)$，即 $t>x_0$，与已知矛盾，
当 $x_0<t$ 时，因为函数 $y=f(x)$为单调递增函数，则 $f(x_0)<f(t)$，即 $t<x_0$，与已知矛盾，
当 $x_0=t$ 时，因为函数 $y=f(x)$为单调递增函数，则 $f(x_0)=f(t)$，即 $t=x_0$，与已知相符，
综上可得 $x_0=t$，即 $f(x_0)=x_0$，即 $x_0 \in A$，即 $B \subseteq A$，
即 $A=B$，
故选 C.

【点睛】本题考查了集合的包含关系及元素与集合的关系，属中档题.

2.（21-22 高三上·浙江金华模拟）已知集合 $M=\{\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha\}\left[\alpha \in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right], N=\{a, b, c\}(a, b, c \in \mathbf{R})$，则

满足 $M=N$ 且 $a+b=2c$ 的集合 N 的个数为（　　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

【答案】C

【分析】分 $2\sin\alpha=\cos\alpha+\tan\alpha$、$2\cos\alpha=\sin\alpha+\tan\alpha$、$2\tan\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha$ 三种情况，分别构造函数，利用导数判断函数单调性和零点个数可得答案.

【详解】因为 $a+b=2c$，所以 a、c、b 成等差数列，

因为 $M=N$，所以 M 中的三个元素成等差数列，

因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $0<\sin\alpha,\cos\alpha<1,\tan\alpha>0$，

当 $2\sin\alpha=\cos\alpha+\tan\alpha$ 时，

令 $f(x)=\cos x+\tan x-2\sin x=\dfrac{\cos^2 x+\sin x-\sin 2x}{\cos x}=\dfrac{\sin x(1-\sin x)+1-\sin 2x}{\cos x}$，由 $1-\sin x>0,1-\sin 2x>0$ 得

$f(x)>0$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时 $f(x)>0$，即 $2\sin\alpha=\cos\alpha+\tan\alpha$ 在 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上无解，

此时 $\{\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha\}$ 构不成集合 N；

当 $2\cos\alpha=\sin\alpha+\tan\alpha$ 时，令 $f(x)=\sin x+\tan x-2\cos x\left[x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$，$f'(x)=\cos x+1+\tan^2 x+2\sin x$，

因为 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，

且 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}+\tan\dfrac{\pi}{6}-2\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}=\dfrac{3-4\sqrt{3}}{6}<0$，

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}+\tan\dfrac{\pi}{3}-2\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}-1>0$，所以 $f(x)$ 在 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 有一个零点，

即 $2\cos\alpha=\sin\alpha+\tan\alpha$ 有一个解，此时 $\{\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha\}$ 构成集合 N；

当 $2\tan\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha$ 时，令 $f(x)=\sin x+\cos x-2\tan x\left[x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$，

$f'(x)=\cos x-\sin x-2\left(1+\tan^2 x\right)=(\cos x-2)-\sin x-2\tan^2 x$，

因为 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，

且 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{6}-2\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}>0$，

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{\pi}{3}-2\tan\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 有一个零点，

即 $2\tan\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha$ 有一个解，此时 $\{\sin\alpha,\tan\alpha,\cos\alpha\}$ 构成集合 N；

综上，集合 N 的个数为 2 个.故选：C.

3．（23-24 高三上·广东深圳·阶段练习）已知集合 $M=\left\{x\middle|x=m+\dfrac{1}{6},m\in\mathrm{Z}\right\}$，$N=\left\{x\middle|x=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3},n\in\mathrm{Z}\right\}$，$P=\left\{x\middle|x=\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{6},p\in\mathrm{Z}\right\}$，则 M，N，P 的关系为（　　）

A．$M=N$□P　　B．$N=P$□M　　C．M□N□P　　D．M□$N=P$

【答案】D

【分析】先将集合 M,N,P 中元素化为统一形式，然后进行判断即可.

【详解】$M=\left\{x\middle|x=m+\dfrac{1}{6}=\dfrac{6m+1}{6}=\dfrac{3\cdot 2m+1}{6},m\in\mathrm{Z}\right\}$，

$N=\left\{x\left|x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3(n-1)+1}{6},n\in Z\right.\right\}=\left\{x\mid x=\frac{3k+1}{6},k\in Z\right\}$,

$P=\left\{x\left|x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3p+1}{6},p\in Z\right.\right\}$,

故 $M\square N=P$,

故选：D.

4.（23-24 高三上·湖南长沙·阶段练习）已知 $M=\{x|x=3m-1,m\in Z\}$，$N=\{x|x=3n+2,n\in Z\}$，$P=\{x|x=6p-1,p\in Z\}$，则下列结论正确的是（　）

A．$M=P\square N$　　B．$P\square M=N$　　C．$M\subseteq N\square P$　　D．$N\subseteq M\square P$

【答案】B

【分析】将集合特征相关表达式变形，可得集合间关系，即可得答案.

【详解】$M=\{x|x=3m-1,m\in Z\}$，$N=\{x|x=3n+2,n\in Z\}=\{x|x=3(n+1)-1,n\in Z\}$，故 $M=N$；

当 $m=2k+1,k\in Z$ 时，$M=\{x|x=6k+2,k\in Z\}$，当 $m=2k,k\in Z$ 时，$M=\{x|x=6k-1,k\in Z\}$，则 $P\square M$.

故选：B.

5.（23-24 高三上·贵州遵义·阶段练习）已知 $a\in R$，$b\in R$，若集合 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}=\{a^2,a-b,0\}$，则 $a^{2023}+b^{2023}$ 的值为（　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

【答案】B

【分析】利用集合相等，求出 $b=0$，再根据互异性求出 a 的取值情况并检验即可.

【详解】根据题意，$a\neq 0$，故 $\frac{b}{a}=0$，则 $b=0$，

则 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}=\{a,0,1\}$，由集合的互异性知 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$，

故 $\{a,0,1\}=\{a^2,a,0\}$，则 $a^2=1$，即 $a=-1$ 或 $a=1$（舍），

当 $a=-1,b=0$ 时，$\{-1,0,1\}=\{1,-1,0\}$，符合题意，

所以 $a^{2023}+b^{2023}=-1$.

故选：B.

题型二：相等集合求参

指 | 点 | 迷 | 津

1.研究集合问题，要抓住元素，看元素应满足的属性。

2.研究两（多个）集合的关系时，关键是将两集合的关系转化为元素间的关系。

3.集合相等，是所属元素相同，与顺序无关（互异性），与形式无关（数集中与表示数的范围的字母无关）

1.（22-23 高三 ·江苏苏州·阶段练习）设 a、b、c 是两个两两不相等的正整数.若 $\{a+b$，$b+c$，$c+a\}=\{n^2$，$(n+1)^2$，$(n+2)^2\}(n\in N_+)$，则 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值是（　）

A．1000　　B．1297　　C．1849　　D．2020

【答案】B

【分析】不妨设 $a>b>c$，则 $a+b>a+c>b+c$，根据集合相等的定义可得 $b+c=n^2,a+c=(n+1)^2,a+b=(n+2)^2$，分析可得 $(a+b)+(b+c)+(a+c)=2(a+b+c)$ 为偶数，从而可得可得 n 为奇数，再分析计算即可得出答案.

【详解】解：不妨设 $a>b>c$，则 $a+b>a+c>b+c$，

因为 $\{a+b$，$b+c$，$c+a\}=\{n^2$，$(n+1)^2$，$(n+2)^2\}(n\in N_+)$，

所以$b+c=n^2,a+c=(n+1)^2,a+b=(n+2)^2$，

因为$(a+b)+(b+c)+(a+c)=2(a+b+c)$为偶数，

所以n^2，$(n+1)^2$，$(n+2)^2$必为两奇一偶，从而可得n为奇数，

又因为$b+c>2$，所以n为不小于3的奇数，

若$n=3$，则$\{a+b$，$b+c$，$c+a\}=\{3^2$，4^2，$5^2\}$，

故$a+b+c=\frac{1}{2}(3^2+4^2+5^2)=5^2$，且$a+b=5^2$，所以$c=0$，不符合要求，

若$n=5$，则$\{a+b$，$b+c$，$c+a\}=\{5^2$，6^2，$7^2\}$，故$\begin{cases}a+b=7^2\\a+c=6^2\\b+c=5^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=30\\b=19\\c=6\end{cases}$，

此时，$a^2+b^2+c^2=30^2+19^2+6^2=1297$，

所以$a^2+b^2+c^2$的最小值是1297.

故选：B.

【点睛】本题主要考查的时集合相等的定义，解决本题的关键在于先假设$a>b>c$，判断n^2，$(n+1)^2$，$(n+2)^2$三个数中奇偶数的个数，考查了数据分析及逻辑推理能力.

2．（2022·上海杨浦·预测）已知函数$f(x)=m\cdot 2^x+x^2+nx$，记集合$A=\{x\,|\,f(x)=0,x\in\mathbf{R}\}$，集合$B=\{x\,|\,f[f(x)]=0,x\in\mathbf{R}\}$，若$A=B$，且都不是空集，则$m+n$的取值范围是（　　）

A．$[0,4)$　　B．$[-1,4)$　　C．$[-3,5]$　　D．$[0,7)$

【答案】A

【分析】设$a\in A$，代入集合B得到$m=0$，讨论$n=0$和$n\neq 0$两种情况，得到$f(x)=x^2+nx=-n$无解，计算得到答案.

【详解】A,B都不是空集，设$a\in A$，则$f(a)=0$；$a\in B$，则$f(f(a))=f(0)=m=0$.

$f(x)=x^2+nx=0$

当$n=0$时：方程的解为$x=0$　此时$A=B=\{0\}$，满足；

当$n\neq 0$时：$f(x)=x^2+nx=0$的解为$x=0$或$x=-n$

$B=\{x\,|\,f[f(x)]=0,x\in\mathbf{R}\}$，则$f(x)=x^2+nx=0$或$f(x)=x^2+nx=-n$

$A=B$，则$f(x)=x^2+nx=-n$无解，$\Delta=n^2-4n<0\therefore 0<n<4$

综上所述：$0\le n<4$，$m+n\in[0,4)$

故选A

【点睛】本题考查了集合的关系，函数零点问题，综合性强，意在考查学生的综合应用能力.

3．（2024·云南楚雄·模拟预测）已知集合$A=\left\{y\,|\,y=2^{\sqrt{x}}\right\}$，$B=\{x\,|\,x\ge a\}$，若$A=B$，则$a$的值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】A

【分析】求出集合$A=\left\{y\,|\,y=2^{\sqrt{x}}\right\}$，利用$A=B$，求出$a$的值即可.

【详解】结合题意：因为$\sqrt{x}\ge 0$，结合复合函数的单调性可知: $y=2^{\sqrt{x}}$在$[0,+\infty)$单调递增，

所以$y=2^{\sqrt{x}}\ge 2^0=1$，所以$A=\{y\,|\,y\ge 1\}$，

因为$A=B$，所以$a=1$.

故选:A.

4．（23-24高三·江苏常州·模拟）已知函数$f(x)=x^2-2ax+1(a\in\mathrm{R})$，若非空集合$A=\{x|\,f(x)\le 0\},B=\{x|\,f(f(x))\le 1\}$，满足$A=B$，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$\left[-1-\sqrt{2},-1\right]$　　B．$\left[-\sqrt{2},-1\right]$　　C．$\left[1,\sqrt{2}\right]$　　D．$\left[1,1+\sqrt{2}\right]$

【答案】A

【分析】不妨设$f(x)\le 1$的解集为$[m,n]$，从而得$B=\{x|\ m\le f(x)\le n\}$，进而得到$n=0$且$m\le f(x)_{\min}\le 0$，又m，$n(m\le n)$为方程$f(x)=1$的两个根，可得$m=2a$，由此得到关于a的不等式组，解之即可得解..

【详解】因为 $f(x)=x^2-2ax+1$，

不妨设 $f(x)\le 1$ 的解集为 $[m,n]$，则由 $f\left(f\left(x\right)\right)\le 1$ 得 $m\le f\left(x\right)\le n$，

所以 $B=\left\{x|\ f\left(f\left(x\right)\right)\le 1\right\}=\left\{x|\ m\le f\left(x\right)\le n\right\}$，

又 $A=\left\{x|\ f\left(x\right)\le 0\right\}$，$A=B\ne\varnothing$，所以 $n=0$ 且 $m\le f(x)_{\min}<0$，

因为 $f(x)\le 1$ 的解集为 $[m,n]$，所以 m,n 是 $f(x)=1$，即 $x^2-2ax+1=1$ 的两个根，

故 $m+n=2a$，即 $m=2a$，

此时由 $m<n=0$，得 $2a<0$，则 $a<0$，

因为 $f\left(x\right)=x^2-2ax+1$，显然 $\Delta=4a^2+4>0$，且 $f\left(x\right)$ 开口向上，对称轴为 $x=a$，

所以 $f\left(x\right)_{\min}=f\left(a\right)=a^2-2a^2+1=-a^2+1$，则 $2a\le -a^2+1\le 0$，

又 $a<0$，解得 $-\sqrt{2}-1\le a\le -1$，即 $a\in\left[-1-\sqrt{2},-1\right]$.

故选：A.

【点睛】关键点睛：本题解决的关键在于假设 $f(x)\le 1$ 的解集为 $[m,n]$，进而得到 $n=0$ 且 $m\le f(x)_{\min}<0$，从而得解.

5.（23-24 高三·北京·阶段练习）已知函数 $f\left(x\right)=\left(m+1\right)\cdot 2^x+x^2+2nx$，集合 $A=\left\{x\middle|f\left(x\right)=0,x\in\mathbf{R}\right\}$，集合 $B=\left\{x\,|\,f[f(x)]=0,x\in\mathrm{R}\right\}$，若 $A=B$，且都不是空集，则 $m+n$ 的取值范围是（　）

A．$\left[-1,4\right]$　　　　B．$\left[-1,1\right)$

C．$\left[-3,5\right]$　　　　D．$\left[0,4\right)$

【答案】B

【分析】因为集合 A,B 都不是空集，设 $a\in A$，则 $f\left(a\right)=0$，$a\in B$，则 $f\left(f\left(a\right)\right)=f(0)=0$，即可求出 m 的值，然后对 n 分类讨论即可求解.

【详解】因为集合 A,B 都不是空集，设 $a\in A$，则 $f\left(a\right)=0$，

$a\in B$，则 $f\left(f\left(a\right)\right)=f(0)=m+1=0$，

所以 $m=-1$，$f\left(x\right)=x^2+2nx$，

当 $n=0$ 时，方程的解为 $x=0$，此时 $A=B=\left\{0\right\}$，满足题意；

当 $n\ne 0$ 时，方程的解为 $x=0$ 或 $x=-2n$，

$B=\left\{x\,|\,f[f(x)]=0,x\in\mathrm{R}\right\}$，则 $f(x)=0$ 或 $f(x)=-2n$，

由 $A=B$，则 $f\left(x\right)=x^2+2nx=-2n$ 无解，

则 $\Delta=4n^2-8n<0$，解得 $0<n<2$；

综上 $0\le n<2$，所以 $m+n\in\left[-1,1\right)$，

故选:B.

题型三：集合中的元素

指 | 点 | 迷 | 津

集合中元素个数判断：

1.若集合是点集，则多是图像交点。

2.若集合是数集，多涉及到一元二次方程的根，以及不等式的解集。

1.（21-22 高三上·上海浦东新·阶段练习）已知 $\left\{a_n\right\}$ 是等差数列，$b_n=\sin\left(a_n\right)$，存在正整数 $t\left(t\le 8\right)$，使得 $b_{n+t}=b_n$，$n\in\mathbf{N}^*$.若集合 $S=\left\{x\middle|x=b_n,n\in N^*\right\}$ 中只含有 4 个元素，则 t 的可能取值有（　）个

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【答案】C
【分析】考虑$t\leqslant 3$不符合题意，$t=4,6,7,8$时，列举出满足条件的集合，再考虑$t=5$时不成立，得到答案.
【详解】当$t\leqslant 3$时，$b_{n+t}=b_n$，根据周期性知集合最多有 3 个元素，不符合；

当$t=4$时，$b_{n+4}=b_n$，取$a_n=\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{6}$，此时$S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right\}$，满足条件；

当$t=5$时，$b_{n+5}=b_n$，即$\sin\left(a_n+5d\right)=\sin a_n$，$d=\frac{2k\pi}{5},k\in Z$，在单位圆的五等分点上不可能取到 4 个不同的正弦值，故不满足；

当$t=6$时，$b_{n+6}=b_n$，取$a_n=\frac{\pi}{3}n-\frac{\pi}{6}$，此时$S=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,1\right\}$，满足条件；

当$t=7$时，$b_{n+7}=b_n$，取$a_n=\frac{2\pi}{7}n-\frac{\pi}{2}$，此时$S=\left\{-\sin\frac{3\pi}{14},-1,\sin\frac{\pi}{14},\sin\frac{5\pi}{14}\right\}$，满足条件；

当$t=8$时，$b_{n+8}=b_n$，取$a_n=\frac{\pi}{4}n-\frac{5\pi}{8}$，此时$S=\left\{-\sin\frac{\pi}{8},-\sin\frac{3\pi}{8},\sin\frac{\pi}{8},\sin\frac{3\pi}{8}\right\}$，满足条件；

故选：C

2．(23-24 高三·上海嘉定·）已知集合P，Q中都至少有两个元素，并且满足下列条件：①集合P，Q中的元素都为正数；②对于任意$a,b\in Q\left(a\neq b\right)$，都有$\frac{a}{b}\in P$；③对于任意$a,b\in P\left(a\neq b\right)$，都有$ab\in Q$；则下列说法正确的是（　）

A．若P有 2 个元素，则Q有 3 个元素
B．若P有 2 个元素，则$P\cup Q$有 4 个元素
C．若P有 2 个元素，则$P\cap Q$有 1 个元素
D．存在满足条件且有 3 个元素的集合P

【答案】C
【分析】若集合P中有2个元素，设$P=\{a,b\}$，根据集合中元素的特性和题设条件进行分析推导，可判断出选项 ABC；假若P有3个元素，设$P=\{a,b,c\}$，再根据题设条件推导分析，可得到P中还有第四个元素，推出矛盾，从而可判断出 D 选项.
【详解】若P有 2 个元素，设$P=\{a,b\}\left(a>0,b>0,a\neq b\right)$，则$ab\in Q$，
因为Q至少有2个元素，所以Q中除ab外至少还有一个元素，

不妨设$x\in \mathbf{Q}$，$x\neq ab$，则$x>0,\frac{x}{ab}\in P,\frac{ab}{x}\in P$，

若$\frac{x}{ab}=\frac{ab}{x}$，则$x^2=(ab)^2$且$x>0,ab>0$，

所以$x=ab$，与假设矛盾，所以$\frac{x}{ab}\neq\frac{ab}{x}$，

所以$\frac{x}{ab}=a,\frac{ab}{x}=b$或$\frac{x}{ab}=b,\frac{ab}{x}=a$，

当$\frac{x}{ab}=a,\frac{ab}{x}=b$时，则$x=a,ab=1$，所以$b=\frac{1}{a}$，
若$a=1$，则$a=b=1$，与$a\neq b$矛盾，所以$a\neq 1$，同理可知$b\neq 1$，

所以此时$P=\left\{a,\frac{1}{a}\right\},Q=\{1,a\}$，$P\cup Q=\left\{a,1,\frac{1}{a}\right\},P\cap Q=\{a\}$；

当$\frac{x}{ab}=b,\frac{ab}{x}=a$时，则$x=b,ab=1$，所以$a=\frac{1}{b}$，
若$a=1$，则$a=b=1$，与$a\neq b$矛盾，所以$a\neq 1$，同理可知$b\neq 1$，

此时$P=\left\{b,\frac{1}{b}\right\},Q=\{1,b\}$，$P\cup Q=\left\{b,1,\frac{1}{b}\right\},P\cap Q=\{b\}$；

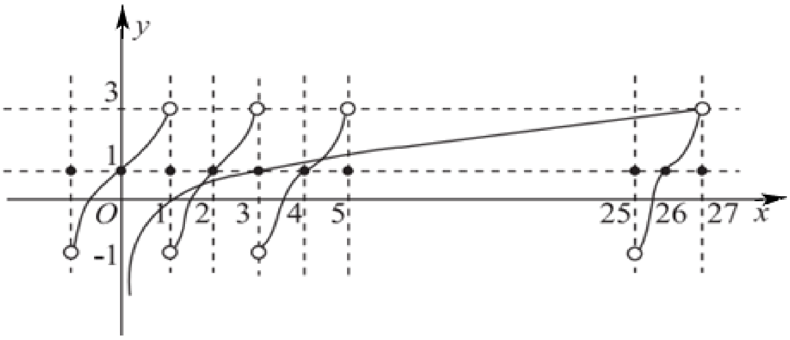
由上可知，当P有 2 个元素，则Q有2个元素，$P\cup Q$有3个元素，$P\cap Q$有1个元素，

故 A 错误，B 错误，C 正确；
不妨假设 P 有 3 个元素，设 $P=\{a,b,c\}$，则 a,b,c 为互不相等的正数，
由③可知：$ab\in Q,ac\in Q,bc\in Q$，
又因为 a,b,c 为互不相等的正数，所以 ab,ac,bc 也为互不相等的正数，
由②可知：$\frac{b}{a},\frac{c}{a},\frac{a}{b},\frac{c}{b},\frac{a}{c},\frac{b}{c}$ 都是集合 $P=\{a,b,c\}$ 的元素，
因为 a,b,c 为互不相等的正数，所以 $\frac{b}{a},\frac{c}{a},\frac{a}{b},\frac{c}{b},\frac{a}{c},\frac{b}{c}$ 都是不等于1的正数，所以 $\frac{b}{a}\neq\frac{a}{b},\frac{c}{a}\neq\frac{a}{c},\frac{c}{b}\neq\frac{b}{c}$，
又因为 b,c 为互不相等的正数，所以 $\frac{a}{b}\neq\frac{a}{c},\frac{c}{a}\neq\frac{b}{a}$，
考虑到 $\frac{b}{a}\neq\frac{a}{b}$ 和 $\frac{a}{b}\neq\frac{a}{c}$，若 $\frac{b}{a}\neq\frac{a}{c}$，则 $\frac{a}{b},\frac{b}{a},\frac{a}{c}$ 为互不相等的正数，
又因为 $\frac{b}{a}\neq\frac{a}{c}$，所以 $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{a}$，所以 $\frac{c}{a}$ 是与 $\frac{a}{b},\frac{b}{a},\frac{a}{c}$ 不相等正数，
因为 $\frac{c}{a},\frac{a}{b},\frac{b}{a},\frac{a}{c}$ 都是集合 P 的元素，所以集合 P 中至少有 4 个元素，这与假设矛盾，
因此考虑 $\frac{b}{a}=\frac{a}{c}$ 的情况，所以 $a^2=bc$，同理可得 $b^2=ac,c^2=ab$，所以 $a^3=b^3=c^3=abc$，
所以 $a=b=c$，这与集合中元素的互异性矛盾，所以 P 有 3 个元素不可能成立，故 D 错误；
故选：C.
【点睛】关键点点睛：本题考查元素与集合的关系以及集合运算后集合中元素个数的判断，本题的难点在于如何通过假设推导出矛盾，解答过程中主要利用集合中元素的互异性去检验元素，从而达到确定集合中元素个数的目的.

3.（2022·全国·模拟预测）若函数 $y=f(x)$ 满足对 $\forall x\in \mathrm{R}$ 都有 $f(x)+f(2-x)=2$，且 $y=f(x)-1$ 为 R 上的奇函数，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}+\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)+1$，则集合 $A=\{x|f(x)=\log_3 x\}$ 中的元素个数为（　）

A．11　　B．12　　C．13　　D．14

【答案】C
【分析】根据已知可推出函数 $f(x)$ 周期性，单调性以及函数值情况，由此可作出函数的图象，将问题转化为函数图象的交点问题解决.
【详解】由 $y=f(x)-1$ 为 R 上的奇函数,
$\Rightarrow f(x)-1=-[f(-x)-1]=-f(-x)+1\Rightarrow f(x)+f(-x)=2$ ①,
又 $f(x)+f(2-x)=2\Rightarrow f(-x)+f(2+x)=2$ ②,
由②－①$\Rightarrow f(2+x)-f(x)=0\Rightarrow f(x+2)=f(x)\Rightarrow y=f(x)$ 为周期为 2 的周期函数,
而又 $f(x)+f(2-x)=2\Rightarrow f(1)+f(1)=2\Rightarrow f(1)=1$,
当 $x\in(-1,1)$ 时 $f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}+\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)+1\Rightarrow f(0)=1\Rightarrow$ 当 $x\in \mathrm{Z}$ 时, $f(x)=1$.
又当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}+\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)+1$ 单调递增，且 $-1<f(x)<3$.
故可作出函数 $y=f(x),y=\log_3 x$ 的大致图象如图：



而集合 A 中的元素个数为函数 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=\log_3 x$ 图象交点的个数，
由以上分析结合函数 $y=\log_3 x$ 性质可知，3 为集合 A 中的一个元素，
且 y=f（x）与 $y=\log_3 x$ 在（1，3），（3，5），…，（23，25）中各有一个交点，
∴集合 $A=\left\{x\left|f\left(x\right)=\log_3 x\right.\right\}$ 中的元素个数为 13.
故选：C.

4.（22-23 高三·北京·模拟）对于集合 $M=\left\{a\left|a=x^2-y^2,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，给出如下三个结论：①如果 $P=\left\{b\left|b=2n+1,n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，那么 $P\subseteq M$；②如果 $c=4n+2,n\in\mathbf{Z}$，那么 $c\notin M$；③如果 $a_1\in M$，$a_2\in M$，那么 $a_1a_2\in M$.其中正确结论的个数是

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】D

【分析】①根据 $2n+1=(n+1)^2-n^2$，得出 $2n+1\in M$，即 $P\subseteq M$；
②根据 $c=4n+2$，证明 $4n+2Ï\ M$，即 $c\notin M$；
③根据 $a_1\in M$，$a_2\in M$，证明 $a_1a_2\in M$.

【详解】解：集合 $M=\{a\,|\,a=x^2-y^2$，$x\in\mathbf{Z}$，$y\in Z\}$，
对于①，$b=2n+1$，$n\in Z$，
则恒有 $2n+1=(n+1)^2-n^2$，
$\therefore 2n+1\in M$，即 $P=\{b\,|\,b=2n+1$，$n\in Z\}$，则 $P\subseteq M$，①正确；
对于②，$c=4n+2$，$n\in Z$，
若 $4n+2Î\ M$，则存在 x，$y\in Z$ 使得 $x^2-y^2=4n+2$，
$\therefore 4n+2=(x+y)(x-y)$，
又 $x+y$ 和 $x-y$ 同奇或同偶，
若 $x+y$ 和 $x-y$ 都是奇数，则 $(x+y)(x-y)$ 为奇数，而 $4n+2$ 是偶数；
若 $x+y$ 和 $x-y$ 都是偶数，则 $(x+y)(x-y)$ 能被 4 整除，而 $4n+2$ 不能被 4 整除，
$\therefore 4n+2\notin M$，即 $c\notin M$，②正确；
对于③，$a_1\in M$，$a_2\in M$，
可设 $a_1=x_1^2-y_1^2$，$a_2=x_2^2-y_2^2$，x_i、$y_i\in Z$；
则 $a_1a_2=(x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)$
$=(x_1x_2)^2+(y_1y_2)^2-(x_1y_2)^2-(x_2y_1)^2$
$=(x_1x_2+y_1y_2)^2-(x_1y_2+x_2y_1)^2\in M$
那么 $a_1a_2\in M$，③正确.
综上，正确的命题是①②③.
故选 D .

【点睛】本题考查了元素与集合关系的判断、以及运算求解能力和化归思想，是难题.

5.（22-23 高三·山东青岛·阶段练习）对于正实数 α，记 M_α 为满足下述条件的函数 $f(x)$ 构成的集合：$\forall x_1,x_2\in R$ 且 $x_2>x_1$，有 $-\alpha(x_2-x_1)<f(x_2)-f(x_1)<\alpha(x_2-x_1)$.下列结论中正确的是

A．若 $f(x)\in M_{\alpha_1},g(x)\in M_{\alpha_2}$，则 $f(x)+g(x)\in M_{\alpha_1+\alpha_2}$

B．若 $f(x)\in M_{\alpha_1},g(x)\in M_{\alpha_2}$ 且 $\alpha_1>\alpha_2$，则 $f(x)-g(x)\in M_{\alpha_1-\alpha_2}$

C．若 $f(x)\in M_{\alpha_1},g(x)\in M_{\alpha_2}$，则 $f(x)\cdot g(x)\in M_{\alpha_1\cdot\alpha_2}$

D．若 $f(x)\in M_{\alpha_1},g(x)\in M_{\alpha_2}$ 且 $g(x)\neq 0$，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\in M_{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$

【答案】A

【详解】试题分析: 对于 $-\alpha(x_2-x_1)<f(x_2)-f(x_1)<\alpha(x_2-x_1)$ 即有 $-\alpha<\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\alpha$，令 k=$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，有-α＜k＜α，不妨设 $f(x)\in M_{\alpha_1},g(x)\in M_{\alpha_2}$，即有$-\alpha_1<k_f<\alpha_1$，$-\alpha_2<k_g<\alpha_2$，因此有$-\alpha_1-\alpha_2<k_f+k_g<\alpha_1+\alpha_2$，因此有 $f(x)+g(x)\in M_{\alpha_1+\alpha_2}$．故选 A.

考点：本题考查了元素与集合关系的判断

点评：本题的难点进行简单的合情推理，在能力上主要考查对新信息的理解力及解决问题的能力

题型四：集合元素个数求参

指｜点｜迷｜津

集合元素个数求参，多涉及到数列，三角、解析几何与函数等知识交汇处出题，难度较大，注意相关基础知识的积累和应用。

1．（23-24 高三上·上海·模拟）设 $a\in\mathrm{R}$ 且 $a\neq 0$，n 为正整数，集合 $S=\left\{x\left|\cos\left(a\pi x\right)=\dfrac{x}{n}\right.\right\}$．有以下两个命题：①对任意 a，存在 n，使得集合 S 中至少有 2 个元素；②若存在两个 n，使得 S 中只有 1 个元素，则 $|a|<\dfrac{2}{5}$，那么（　）

A．①是真命题，②是假命题　　B．①是假命题，②是真命题

C．①、②都是假命题　　D．①、②都是真命题

【答案】A

【分析】

对于①命题，令函数 $f(x)=\cos(a\pi x)-\dfrac{x}{n}$，分 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况，利用零点存在定理得即可判断；对于②命题，通过举例说明.

【详解】对于①命题，设 $a>0$，令函数 $f(x)=\cos(a\pi x)-\dfrac{x}{n}$，

因为 $f(0)=1>0$，$f(2n)=\cos(2an\pi)-2<0$，

所以存在 $x_1\in(0,2n)$ 有 $f(x_1)=0$，

当 $n>\dfrac{1}{a}$ 时，$f(-\dfrac{1}{a})=\cos(-\pi)+\dfrac{1}{an}=\dfrac{1}{an}-1<0$，

所以存在 $x_0\in(-\dfrac{1}{a},0)$ 有 $f(x_0)=0$，

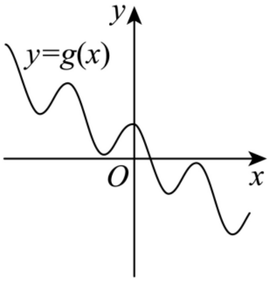
对于 $a<0$，因为 $y=\cos(an\pi)$ 是偶函数，

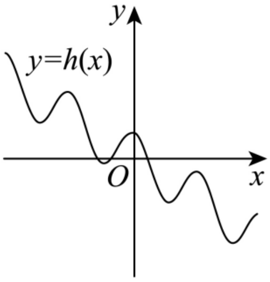
所以 $a<0$ 和 $a>0$ 情况一样，故①是真命题；

对于②命题，通过①得出一下结论：n 越小，集合 S 元素数量越少，同理得出如果集合 S 只能有一个元素，只能是 $x>0$ 的区间存在一个零点，

因此先讨论 $g(x)=\cos(\dfrac{2}{5}\pi x)-\dfrac{x}{2},h(x)=\cos(\dfrac{2}{5}\pi x)-\dfrac{x}{3}$ 的零点情况（如果 $n=2$ 只有一个零点，$n=1$ 也只有一个零点），

其图象如下图：





即 $a=\dfrac{2}{5}$ 时，也满足

故②是假命题.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题关键在于零点存在定理的应用以及由①得出的结论.

2.（22-23 高三·北京·阶段练习）设集合 A 的最大元素为 M，最小元素为 m，记 A 的特征值为 $X_A=M-m$，若集合中只有一个元素，规定其特征值为 0.已知 A_1，A_2，A_3，…，A_n 是集合 N^* 的元素个数均不相同的非空真子集，且 $X_{A_1}+X_{A_2}+X_{A_3}+\cdots+X_{A_n}=60$，则 n 的最大值为（　）

A．10　　B．11　　C．12　　D．13

【答案】B

【分析】根据题设描述只需保证各集合中 $X_{A_n}=M-m$（$n\in N^*$）尽量小，结合已知及集合的性质有 n 最大时 $X_{A_1}+X_{A_2}+X_{A_3}+\ldots+X_{A_n}=\dfrac{n(n-1)}{2}$，进而分析 n 的取值.

【详解】由题设 A_1，A_2，A_3，…，A_n 中都至少有一个元素，且元素个数互不相同，

要使 n 最大，则各集合中 $X_{A_n}=M-m$（$n\in N^*$）尽量小，

所以集合 A_1，A_2，A_3，…，A_n 的元素个数尽量少且数值尽可能连续，

所以，不妨设 $X_{A_1}=0,X_{A_2}=1,X_{A_3}=2,\ldots,X_{A_n}=n-1$，有 $X_{A_1}+X_{A_2}+X_{A_3}+\ldots+X_{A_n}=\dfrac{n(n-1)}{2}$，

当 $n=11$ 时，$X_{A_1}+X_{A_2}+X_{A_3}+\ldots+X_{A_n}=55<60$，

当 $n=12$ 时，$X_{A_1}+X_{A_2}+X_{A_3}+\ldots+X_{A_n}=66>60$，

只需在 $n=11$ 时，在上述特征值取最小情况下，使其中一个集合的特征值增加 5 即可，故 n 的最大值为 11.

故选：B

【点睛】关键点点睛：注意 n 最大则各集合中 $X_{A_n}=M-m$（$n\in N^*$）尽量小，并求出该情况下特征值之和关于 n 的公式，再分析其最大取值.

3.（22-23 高三江西南昌·阶段练习）各项互不相等的有限正项数列 $\{a_n\}$，集合 $A=\{a_{1,}a_{2,}\ldots,a_{n,}\}$，集合 $B=\{(a_i,a_j)|\ a_i\in A,a_j\in A,a_i-a_j\in A,1\le i,j\le n\}$,则集合 B 中的元素至多有个（　）.

A．$\dfrac{n(n-1)}{2}$　　B．$2^{n-1}-1$　　C．$\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$　　D．$n-1$

【答案】A

【分析】根据各项互不相等的有限正项数列 $\{a_n\}$，不妨假设数列是单调递增的，进而分类讨论，利用数列的求和公式可求得答案

【详解】因为各项不相等的有限正项数列 $\{a_n\}$，

所以不妨假设数列是单调递增的，

因为集合 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，集合 $B=\{(a_i,a_j)|a_i\in A,a_j\in A,a_i-a_j\in A,1\le i,j\le n\}$，

所以 $j=1$ 时，i 最多可取 $2,3,\ldots,n$，

$j=2$ 时，i 最多可取 $3,\ldots,n$，

……，

$j=n-1$ 时，i 最多可取 n，

所以集合 B 中的元素至多有 $1+2+\dots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$，

故选：A.

4.（22-23 高三·上海杨浦·阶段练习）已知集合 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，对于它的任一非空子集 A，可以将 A 中的每一个元素 k 都乘以 $(-1)^k$ 再求和，例如 $A=\{2,3,8\}$，则可求得和为 $(-1)^2\cdot2+(-1)^3\cdot3+(-1)^8\cdot8=7$，对 S 的所有非空子集，这些和的总和为

A．508　　B．512　　C．1020　　D．1024

【答案】B

【分析】由集合的子集个数的运算及简单的合情推理可得；这些总和是 $2^7(-1+2-3+4-5+6-7+8)=512$.

【详解】因为元素 $1,2,3,4,5,6,7,8$ 在集合 S 的所有非空子集中分别出现 2^7 次，则对 S 的所有非空子集中元素 k 执行乘以 $(-1)^k$ 再求和操作,则这些和的总和是

$2^7[(-1)^1\times1+(-1)^2\times2+(-1)^3\times3+(-1)^4\times4+(-1)^5\times5+(-1)^6\times6+(-1)^7\times7+(-1)^8\times8]$

$=2^7(-1+2-3+4-5+6-7+8)=512$.

故选 B

【点睛】本题主要考查了集合的子集及子集个数，简单的合情推理，属于中档题.

5.（2023 高三·全国·阶段练习）已知函数 $f(x)=x^3-3x+1$，$x\in\mathbf{R}$，$A=\{x|t\le x\le t+1\}$，$B=\{x||f(x)|\ge1\}$，集合 $A\cap B$ 只含有一个元素，则实数 t 的取值范围是（　）.

A．$\{0,\sqrt{3}-1\}$　　B．$[0,\sqrt{3}-1]$　　C．$(0,\sqrt{3}-1]$　　D．$(0,\sqrt{3}-1)$

【答案】D

【分析】解出不等式 $|f(x)|\ge1$ 后，结合集合交集的定义计算即可得.

【详解】$|f(x)|\ge1\Leftrightarrow|x^3-3x+1|\ge1$，即 $x^3-3x+1\ge1$ 或 $x^3-3x+1\le-1$，

对 $x^3-3x+1\ge1$，即 $x^3-3x=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})\ge0$，

解得 $x\in[-\sqrt{3},0]\cup[\sqrt{3},+\infty]$，

对 $x^3-3x+1\le-1$，即 $x^3-3x+2=(x+2)(x-1)^2\le0$，解得 $x\in[-\infty,-2]\cup\{1\}$，

即 $B=[-\infty,-2]\cup[-\sqrt{3},0]\cup\{1\}\cup[\sqrt{3},+\infty]$，

由 $A\cap B$ 只含有一个元素，且 $A=\{x|t\le x\le t+1\}$，

故有 $\begin{cases}t>0\\t+1<\sqrt{3}\end{cases}$，即 $t\in(0,\sqrt{3}-1)$.

故选：D.

题型五：子集与真子集关系

指｜点｜迷｜津

元素与集合以及集合与集合子集关系的判断，解题的关键是正确理解所给的定义及熟练运用分类讨论的思想进行列举

公式法求有限集合的子集个数

(1)含 n 个元素的集合有 2n 个子集.

(2)含 n 个元素的集合有(2n－1)个真子集.

(3)含 n 个元素的集合有(2n－1)个非空子集.

(4)含 n 个元素的集合有(2n－2)个非空真子集.

1.（20-21 高三·江苏扬州·阶段练习）已知集合 $P=\{1,2,3,4,5\}$，若 A，B 是 P 的两个非空子集，则所有满足 A

中的最大数小于 B 中的最小数的集合对(A,B)的个数为（　）

A．49　　B．48　　C．47　　D．46

【答案】A

【分析】利用分类计数法，当 A 中的最大数分别为 1、2、3、4 时确定 A 的集合数量，并得到对应 B 的集合个数，它们在各情况下个数之积，最后加总即为总数量.

【详解】集合 $P=\{1,2,3,4,5\}$ 知：

1、若 A 中的最大数为 1 时，B 中只要不含 1 即可：A 的集合为 $\{1\}$，

而 B 有 $2^4-1=15$ 种集合，集合对(A,B)的个数为 15；

2、若 A 中的最大数为 2 时，B 中只要不含 1、2 即可：

A 的集合为 $\{2\},\{1,2\}$，而 B 有 $2^3-1=7$ 种，

集合对(A,B)的个数为 $2\times7=14$；

3、若 A 中的最大数为 3 时，B 中只要不含 1、2、3 即可：

A 的集合为 $\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$，而 B 有 $2^2-1=3$ 种，

集合对(A,B)的个数为 $4\times3=12$；

4、若 A 中的最大数为 4 时，B 中只要不含 1、2、3、4 即可：

A 的集合为 $\{4\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}$，

而 B 有 $2^1-1=1$ 种，集合对(A,B)的个数为 $8\times1=8$；

$\therefore$一共有 $15+14+12+8=49$ 个，

故选：A

【点睛】本题考查了分类计数原理，按集合最大数分类求出各类下集合对的数量，应用加法原理加总，属于难题.

2．（22-23 高三·湖北武汉·强基）设 A 是集合 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 的子集，只含有 3 个元素，且不含相邻的整数，则这种子集 A 的个数为（　）

A．32　　B．56　　C．72　　D．84

【答案】B

【分析】分类列举出每一种可能性即可得到答案.

【详解】若 1,3 在集合 A 内，则还有一个元素为 5,6,7,8,9,10 中的一个；

若 1,4 在集合 A 内，则还有一个元素为 6,7,8,9,10 中的一个；

$\vdots$

若 1,8 在集合 A 内，则还有一个元素为 10；

共有 6+5+4+3+2+1=21 个.

若 2,4 在集合 A 内，则还有一个元素为 6,7,8,9,10 中的一个；

若 2,5 在集合 A 内，则还有一个元素为 7,8,9,10 中的一个；

$\vdots$

若 2,8 在集合 A 内，则还有一个元素为 10；

共有 5+4+3+2+1=15 个.

若 3,5 在集合 A 内，则还有一个元素为 7,8,9,10 中的一个；

若 3,6 在集合 A 内，则还有一个元素为 8,9,10 中的一个；

$\vdots$

若 3,8 在集合 A 内，则还有一个元素为 10；

共有 4+3+2+1=10 个.

若 4,6 在集合 A 内，则还有一个元素为 8,9,10 中的一个；

若 4,7 在集合 A 内，则还有一个元素为 9,10 中的一个；

若 4,8 在集合 A 内，则还有一个元素为 10；

共有 3+2+1=6 个.

若 5,7 在集合 A 内，则还有一个元素为 9,10 中的一个；

若 5,8 在集合 A 内，则还有一个元素为 10；

共有 2+1=3 个.

若 6,8,10 在集合 A 内，只有 1 个.
总共有 21+15+10+6+3+1=56 个
故选：B.

3.（22-23 高三·湖南常德·阶段练习）设集合 $P_n=\{1,2,3,\cdots,n\}(n\in N^*)$,对 P_n 的任意非空子集 A，定义 $M(A)$ 为集合 A 中的最大元素，当 A 取遍 P_n 的所有非空子集时，对应的 $M(A)$ 的和为 S_n，则 $S_n-1=$

A．$(n-1)\cdot 2^n$　　B．$(n-1)\cdot 2^n+1$　　C．$2n+1$　　D．$2n$

【答案】A

【分析】由题意，P_n 的任意非空子集 A 共有 2^n-1 个，在所有非空子集中每个元素出现 2^{n-1} 次，可知含有 n 的子集有 2^{n-1} 个，不含 n 含 $n-1$ 有 2^{n-2} 个，不含 $n,n-1$，含 $n-2$ 的有 2^{n-3} 个以此类推有 2^{k-1} 个子集不含 n,n-1,n-2,...k-1,而含有 k.利用错位相减法求出其和.

【详解】由题意，P_n 的任意非空子集 A 共有 2^n-1 个，在所有非空子集中每个元素出现 2^{n-1} 次，可知含有 n 的子集有 2^{n-1} 个，不含 n 含 $n-1$ 有 2^{n-2} 个，不含 $n,n-1$，含 $n-2$ 的有 2^{n-3} 个以此类推有 2^{k-1} 个子集不含 n,n-1,n-2,...k-1,而含有 k,因为 $M(A)$ 为集合 A 中的最大元素

所以 $s_n=2^{n-1}\times n+2^{n-2}\times(n-1)+\ldots+2^1\times 2+1$，错位相减可得 $s_n=(n-1)\cdot 2^n+1$，所以 $S_n-1=(n-1)\cdot 2^n$，故选 A.

【点睛】解决此类问题的关键是读懂并弄通题意，找出规律是关键，然后结合数列求和，采用错位相减法即可求出.

4.（21-22 高三·福建福州·）给定全集 U，非空集合 A,B 满足 $A\subseteq U$，$B\subseteq U$，且集合 A 中的最大元素小于集合 B 中的最小元素，则称 (A,B) 为 U 的一个有序子集对，若 $U=\{3,5,7,9,11\}$，则 U 的有序子集对的个数为

A．48　　B．49　　C．50　　D．51

【答案】B

【详解】$A=\{3\}$ 时，B 的个数是 $C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=15$,

$A=\{5\}$ 时，B 的个数是 $C_3^1+C_3^2+C_3^3=7$,

$A=\{7\}$ 时，B 的个数是 $C_2^1+C_2^2=3$ ，

$A=\{9\}$ 时，B 的个数是 1

$A=\{3,5\}$ 时，B 的个数是 $C_3^1+C_3^2+C_3^3=7$,，

$A=\{3,7\}$ 时，B 的个数是 $C_2^1+C_2^2=3$

$A=\{3,9\}$ 时，B 的个数是 1，

$A=\{5,7\}$ 时，B 的个数是 $C_2^1+C_2^2=3$

$A=\{5,9\}$ 时，B 的个数是 1

$A=\{7,9\}$ 时，B 的个数是 1

$A=\{3,5,7\}$ 时，B 的个数是 $C_2^1+C_2^2=3$

$A=\{3,5,9\}$ 时，B 的个数是 1、

$A=\{3,7,9\}$ 时，B 的个数是 1

$A=\{5,7,9\}$ 时，B 的个数是 1

$A=\{3,5,7,9\}$ 时，B 的个数是 1

$\therefore U$ 的有序子集对的个数为 49 个，

5.（2022 高三上·河北衡水·专题练习）对于任意两个正整数 m,n ，定义某种运算"※"，法则如下：当 m,n 都是正奇数时，m ※ $n=m+n$ ；当 m,n 不全为正奇数时，m ※ $n=mn$，则在此定义下，集合 $M=\{(a,b)\,|\,a※b=16,a\in N^*,b\in N^*\}$ 的真子集的个数是（　）

A．2^7-1　　B．$2^{11}-1$　　C．$2^{13}-1$　　D．$2^{14}-1$

【答案】C

【详解】由题意，当 m，n 都是正奇数时，$m※n=m+n$ ；当 m，n 不全为正奇数时，$m※n=mn$ ；

若 a，b 都是正奇数，则由 $a※b=16$，可得 $a+b=16$，此时符合条件的数对为（1,15），（3,13），…(15,1) 满足条件的共 8 个；

若 a，b 不全为正奇数时，$m※n=mn$，由 $a※b=16$，可得 $ab=16$，则符合条件的数对分别为（1,16），（2,8），（4,4），（8,2），（16,1）共 5 个；

故集合 $M=\{(a，b)|a※b=16，a\in N^*，b\in N^*\}$ 中的元素个数是 13，

所以集合 $M=\{(a，b)|a※b=16，a\in N^*，b\in N^*\}$ 的真子集的个数是 $2^{13}-1$.

故选 C.

【点睛】本题考查元素与集合关系的判断，解题的关键是正确理解所给的定义及熟练运用分类讨论的思想进行列举，

题型六：子集型求参

指 | 点 | 迷 | 津

集合子集求参题型，往往存在着思维和计算的一个“坑”，即若有 $B\subseteq A$，则要讨论集合 B 是否是空集。

1．（2023·广东深圳·模拟预测）已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，若集合 $A=\left\{x\middle|2x^2<\log_a x\right\}$，$B=\left\{x\middle|y=\ln x+\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right\}$，且 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup\left(1,e^{\frac{1}{4e}}\right]$　　B．$\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[e^{\frac{1}{4e}},+\infty\right)$

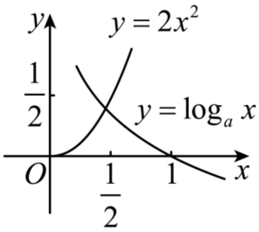
C．$\left(\frac{1}{4},1\right)\cup\left(1,e^{\frac{1}{2e}}\right]$　　D．$\left(\frac{1}{4},1\right)\cup\left[e^{\frac{1}{2e}},+\infty\right)$

【答案】B

【分析】求出集合 B，再由给定条件，对 a 分类讨论，利用数形结合及构造函数的方法，利用导数探讨函数最小值求解作答.

【详解】依题意，$B=\{x|0<x<\frac{1}{2}\}$，$A=\left\{x|2x^2<\log_a x\right\}$，且 $A\subseteq B$，

当 $0<a<1$ 时，作出函数 $y=2x^2$ 与 $y=\log_a x$ 的大致图象，



则 $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2>\log_a\frac{1}{2}$，即 $\log_a\frac{1}{2}<\frac{1}{2}=\log_a a^{\frac{1}{2}}$，

所以 $a^{\frac{1}{2}}<\frac{1}{2}$，即 $0<a<\frac{1}{4}$；

当 $a>1$ 时，设 $f(x)=2x^2-\log_a x$，

若 $0<x\le 1$，$\log_a x\le 0$，则 $f(x)>0$ 恒成立，$A=\varnothing$，满足 $A\subseteq B$，

于是当 $a>1$ 时，$A\subseteq B$，当且仅当 $A=\varnothing$，即不等式 $f(x)\ge 0$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 成立，

$f'(x)=4x-\frac{1}{x\ln a}$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\ln a}}$，当 $0<x<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\ln a}}$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\ln a}}$ 时，

$f'(x)>0$,

则函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\ln a}})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\ln a}},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\ln a}})=\frac{1}{2\ln a}-\frac{1}{2}\log_a\frac{1}{4\ln a}=\frac{1}{2\ln a}+\frac{\ln(4\ln a)}{2\ln a}$，

于是得 $\frac{1}{2\ln a}+\frac{\ln(4\ln a)}{2\ln a}\geq 0$，即 $1+\ln(4\ln a)\geq 0$，变形得 $\ln a\geq\frac{1}{4e}$，解得 $a\geq e^{\frac{1}{4e}}$，

从而得当 $a\geq e^{\frac{1}{4e}}$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，$A=\varnothing$，满足 A□B；

综上，实数 a 的取值范围是 $0<a<\frac{1}{4}$ 或 $a\geq e^{\frac{1}{4e}}$.

故选：B.

【点睛】思路点睛：涉及函数不等式恒成立问题，可以利用导数探讨函数的最值，借助函数最值转化解决问题.

2.（22-23 高三·江苏常州·模拟）对于集合 A，B，我们把集合 $\{x|x\in A 且 x\notin B\}$ 叫做集合 A 与 B 的差集，记作 $A-B$．若集合 $P=\left\{y\middle|y=\frac{x}{x^2+1},x>0\right\}$，集合 $Q=\{x|x^2+(a-1)x-a<0\}$，且 $P-Q=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$[0,+\infty)$　　B．$(0,+\infty)$　　C．$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

【答案】A

【分析】先结合差集的定义，由 $P-Q=\varnothing$ 得 $P\subseteq Q$，再利用基本不等式化简集合 P，分类讨论 a 的取值得到集合 Q，从而利用集合的包含关系求得 a 的取值范围.

【详解】根据差集的定义，由 $P-Q=\varnothing$ 可得 $P\subseteq Q$，

因为 $x>0$，$y=\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$，

又因为 $x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，等号成立，

所以 $0<\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\leq\frac{1}{2}$，即 $0<y=\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{1}{2}$，故 $P=\left\{y\middle|0<y\leq\frac{1}{2}\right\}$，

由 $x^2+(a-1)x-a<0$ 得 $(x+a)(x-1)<0$，

令 $(x+a)(x-1)=0$，得 $x=-a$ 或 $x=1$，

当 $-a>1$，即 $a<-1$ 时，上述不等式解得 $1<x<-a$，即 $Q=\{x|1<x<-a\}$，显然此时集合 P,Q 没有任何包含关系，不满足题意；

当 $-a=1$，即 $a=-1$ 时，上述不等式化为 $(x-1)^2<0$，显然无解，即 $Q=\varnothing$，显然 $P\subseteq Q$ 不成立，不满足题意；

当 $-a<1$，即 $a>-1$ 时，上述不等式解得 $-a<x<1$，

因为 $P\subseteq Q$，所以由数轴法可得 $-a\leq 0$，故 $a\geq 0$；

综上：$a\geq 0$，即 $a\in[0,+\infty)$.

故选：A.

3.（2022·广东广州·二模）已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，若集合 $M=\{x|x^2<x\},N=\{x|x^2<\log_a x\}$，且 $N\subseteq M$，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$(0,1)\cup\left(1,e^{\frac{1}{e}}\right]$　　B．$(0,1)\cup\left[e^{\frac{1}{e}},+\infty\right)$

C. $(0,1)\cup\left(1,e^{\frac{1}{2e}}\right]$　　D. $(0,1)\cup\left[e^{\frac{1}{2e}},+\infty\right)$

【答案】D

【分析】求出集合 M，再由给定条件，对集合 N 分类讨论，构造函数，利用导数探讨函数最小值求解作答.

【详解】依题意，$M=\{x\,|\,x(x-1)<0\}=\{x\,|\,0<x<1\}$，$N=\left\{x\,|\,x^2-\log_a x<0\right\}$，令 $f(x)=x^2-\log_a x$，

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而 $f(1)=1>0, f(a)=a^2-1<0$，则 $\exists x_0\in(a,1)$，使得 $f(x_0)=0$，

当 $0<x<x_0$ 时，$f(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f(x)>0$，此时 $N=\{x\,|\,0<x<x_0\}\subseteq M$，因此，$0<a<1$，

当 $a>1$ 时，若 $0<x\le 1$，$\log_a x\le 0$，则 $f(x)>0$ 恒成立，$N=\varnothing$，满足 $N\subseteq M$，

于是当 $a>1$ 时，$N\subseteq M$，当且仅当 $N=\varnothing$，即不等式 $f(x)\ge 0$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 成立，

$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x\ln a}$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\sqrt{\dfrac{1}{2\ln a}}$，当 $0<x<\sqrt{\dfrac{1}{2\ln a}}$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\sqrt{\dfrac{1}{2\ln a}}$ 时，$f'(x)>0$，

则函数 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{\dfrac{1}{2\ln a}})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{\dfrac{1}{2\ln a}},+\infty)$ 上单调递增，

$f(x)_{\min}=f(\sqrt{\dfrac{1}{2\ln a}})=\dfrac{1}{2\ln a}-\dfrac{1}{2}\log_a\dfrac{1}{2\ln a}=\dfrac{1}{2\ln a}+\dfrac{\ln(2\ln a)}{2\ln a}$，于是得 $\dfrac{1}{2\ln a}+\dfrac{\ln(2\ln a)}{2\ln a}\ge 0$，

即 $1+\ln(2\ln a)\ge 0$，变形得 $\ln a\ge\dfrac{1}{2e}$，解得 $a\ge e^{\frac{1}{2e}}$，从而得当 $a\ge e^{\frac{1}{2e}}$ 时，$f(x)\ge 0$ 恒成立，$N=\varnothing$，满足 $N\subseteq M$，

所以实数 a 的取值范围是 $0<a<1$ 或 $a\ge e^{\frac{1}{2e}}$.

故选：D

【点睛】思路点睛：涉及函数不等式恒成立问题，可以利用导数探讨函数的最值，借助函数最值转化解决问题.

4.（20-21高三上·湖北模拟）已知集合 $A=\left\{x\left|x^{a-1}-\dfrac{e^{-x}+a\ln x}{x}\le 1\right.\right\}$，集合 $B=\left\{x\left|2021x+\ln x\ge 2021\right.\right\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值范围为（　）

A. $[-e,e]$　　B. $[-e,1]$　　C. $[-1,1]$　　D. $[-1,e]$

【答案】B

【分析】令 $f(x)=2021x+\ln x$，由 $f(x)$ 单调性和 $f(1)=2021$ 可求得集合 B，将问题转化为 $x^{a-1}-\dfrac{e^{-x}+a\ln x}{x}\le 1$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立，化简不等式得 $x^a-\ln x^a\le e^{-x}-\ln e^{-x}$，构造函数 $y=t-\ln t$，由导数可确定其单调性；分别在 $a\le 0$、$0<a\le 1$ 和 $a>1$ 三种情况下，根据不等式恒成立求得取值范围.

【详解】令 $f(x)=2021x+\ln x$，则 $f'(x)=2021+\dfrac{1}{x}>0$，\ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f(1)=2021$，$\therefore 2021x+\ln x\ge 2021$ 的解集为 $x\ge 1$，$\therefore B=[1,+\infty)$，

$\therefore [1,+\infty)$ 为 $x^{a-1}-\dfrac{e^{-x}+a\ln x}{x}\le 1$ 的解集的子集，

即当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$x^{a-1}-\dfrac{e^{-x}+a\ln x}{x}\le 1$ 恒成立；

由 $x^{a-1}-\dfrac{e^{-x}+a\ln x}{x}\le 1\,(x\ge 1)$ 得：$x^a-e^{-x}-a\ln x\le x\,(x\ge 1)$，

即 $x^a-\ln x^a\le e^{-x}+x=e^{-x}-\ln e^{-x}\,(x\ge 1)$，

令 $y=t-\ln t$，则 $y'=1-\dfrac{1}{t}=\dfrac{t-1}{t}$，

$\therefore$ 当 $t\in(0,1)$ 时，$y'<0$；当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$y'>0$；

在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增；

①当$a\le 0$时，$x^a\in(0,1]$，$e^{-x}\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，$\therefore x^a\ge e^{-x}$，即$a\ln x\ge -x$在$[1,+\infty)$上恒成立，

当$x=1$时，$0\ge -1$，则$a\in R$；

当$x>1$时，$a\ge -\frac{x}{\ln x}$，令$g(x)=-\frac{x}{\ln x}(x>1)$，则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{(\ln x)^2}(x>1)$，

$\therefore$当$x\in(1,e)$时，$g'(x)>0$；当$x\in(e,+\infty)$时，$g'(x)<0$；

$\therefore g(x)$在$(1,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，$\therefore g(x)_{\max}=g(e)=-e$，$\therefore a\ge -e$；

综上所述：$a\in[-e,0]$；

②当$0<a\le 1$时，Q$x\ge 1$，$\therefore 1\le x^a\le x$，又$e^{-x}+\ln x>0$，$\therefore e^{-x}>-\ln x$，

$\therefore x^a-\ln x^a\le x-\ln x\le x+e^{-x}$，$\therefore a\in(0,1]$满足题意；

③当$a>1$时，

若$x^a-\ln x^a\le e^{-x}+x=e^{-x}-\ln e^{-x}(x\ge 1)$恒成立，则$x^a-a\ln x-e^{-x}-x\le 0$在$[1,+\infty)$上恒成立，

令$y=\ln x-(x-1)(x\ge 1)$，则$y'=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}\le 0$，

$\therefore y=\ln x-(x-1)$在$[1,+\infty)$上单调递减，$\therefore y\le 0$，即$\ln x\le x-1$，又$e^{-x}<1$，

$\therefore x^a-a\ln x-e^{-x}-x\ge x^a-a(x-1)-e^{-x}-x=x^a-ax+a-e^{-x}-x>x^a-(a+1)x+a-1>x^a-(a+1)x$，

令$x_0=(a+1)^{\frac{1}{a-1}}$，则$x^a-(a+1)x=(a+1)^{\frac{a}{a-1}}-(a+1)^{1+\frac{1}{a-1}}=(a+1)^{\frac{a}{a-1}}-(a+1)^{\frac{a}{a-1}}=0$，

又$(a+1)^{\frac{1}{a-1}}>1$，则$x_0^a-a\ln x_0-e^{-x_0}-x_0>0$，

即$x^a-a\ln x-e^{-x}-x\le 0$在$[1,+\infty)$上不恒成立，

$\therefore a>1$不合题意；

综上所述：实数a的取值范围为$[-e,1]$.

故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题以集合为载体，考查了利用导数求解不等式恒成立问题，解题关键是能够根据集合的包含关系将问题转化为不等式恒成立，通过同构的思想将问题进一步转化为函数的函数值之间的比较问题，通过构造函数，结合函数的单调性来进行求解.

5.（22-23高三·上海普陀·模拟）设$f(x)=\sin x$.若对任意$x_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，都存在$x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得$f(x_1)-2f(x_2+\theta)=-1$，则$\theta$可以是（　）

A．$\frac{\pi}{5}$　　B．$\frac{2\pi}{5}$　　C．$\frac{3\pi}{5}$　　D．$\frac{4\pi}{5}$

【答案】B

【分析】由题意可知，$f(x_2+\theta)=\frac{1}{2}[f(x_1)+1]$，若对任意$x_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，都存在$x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得$f(x_1)-2f(x_2+\theta)=-1$成立，得$\left[\frac{1}{2},1\right]\subseteq\sin(x_2+\theta)$，只需$\sin(x_2+\theta)_{\min}\le\frac{1}{2}$，$\sin(x_2+\theta)_{\max}\ge 1$即可，进而将选项中的角，依次代入验证，即可求解.

【详解】因为对任意$x_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，都存在$x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得$f(x_1)-2f(x_2+\theta)=-1$成立，

所以$2f(x_2+\theta)=f(x_1)+1$，即$f(x_2+\theta)=\frac{1}{2}[f(x_1)+1]$，

因为$f(x)=\sin x$，$x_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$f(x_1)\in[0,1]$，

若对任意 $x_1\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，都存在 $x_2\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，使得 $f(x_1)-2f(x_2+\theta)=-1$ 成立，

得 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]\subseteq f(x_2+\theta)$，只需 $\sin(x_2+\theta)_{\min}\le\dfrac{1}{2}$，$\sin(x_2+\theta)_{\max}\ge 1$ 即可，

因为 $x_2\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，则 $x_2+\theta\in\left[\theta,\dfrac{\pi}{2}+\theta\right]$，

对于 A：当 $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ 时，$x_2+\theta\in\left[\dfrac{\pi}{5},\dfrac{7\pi}{10}\right]$，则 $\sin(x_2+\theta)\in\left[\sin\dfrac{\pi}{5},1\right]$，因为 $\sin\dfrac{\pi}{5}>\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\sin(x_2+\theta)$ 的取值不符合条件，故 A 错误；

对于 B：当 $\theta=\dfrac{2\pi}{5}$ 时，$x_2+\theta\in\left[\dfrac{2\pi}{5},\dfrac{9\pi}{10}\right]$，则 $\sin(x_2+\theta)\in\left[\sin\dfrac{9\pi}{10},1\right]$，因为 $\sin\dfrac{9\pi}{10}<\sin\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，$\sin(x_2+\theta)$ 的取值符合条件，故 B 正确；

对于 C：当 $\theta=\dfrac{3\pi}{5}$ 时，$x_2+\theta\in\left[\dfrac{3\pi}{5},\dfrac{11\pi}{10}\right]$，则 $\sin(x_2+\theta)\in\left[\sin\dfrac{11\pi}{10},\sin\dfrac{3\pi}{5}\right]$，

因为 $\sin\dfrac{3\pi}{5}<1$，$\sin(x_2+\theta)$ 的取值不符合条件，故 C 错误；

对于 D：当 $\theta=\dfrac{4\pi}{5}$ 时，$x_2+\theta\in\left[\dfrac{4\pi}{5},\dfrac{13\pi}{10}\right]$，则 $\sin(x_2+\theta)\in\left[\sin\dfrac{13\pi}{10},\sin\dfrac{4\pi}{5}\right]$，

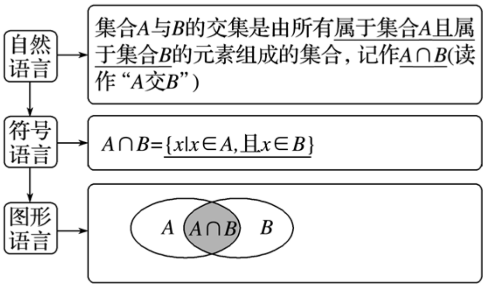
因为 $\sin\dfrac{4\pi}{5}<1$，$\sin(x_2+\theta)$ 的取值不符合条件，故 D 错误；

故选：B

题型七：交集

指丨点丨迷丨津

交集：



1．（23-24 高三·上海·模拟）已知函数 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，$y=[x]$ 为高斯函数，表示不超过实数 x 的最大整数，例如 $[-0.5]=-1$，$[1.3]=1$.记 $A=\{-2,-1,0,1\}$，$B=\left\{y\middle|y=\left[f(x)-\dfrac{1}{2}\right]+\left[f(1-x)-\dfrac{1}{2}\right],x\in\mathbf{R}\right\}$，则集合 A，$B$ 的关系是（　）

A．$A\cap B=\{-2\}$　　　　B．$A\cap B=\{-1,0,1\}$

C．$A\cap B=\{-1,0\}$　　　　D．$A\cap B=\{0,1\}$

【答案】C

【分析】根据题意分别求出集合 $B=\{0,-1\}$，然后利用集合的交集运算从而求解.

【详解】由题意得 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，所以 $y=\left[f(x)-\dfrac{1}{2}\right]+\left[f(1-x)-\dfrac{1}{2}\right]=\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{4^x+2}\right]+\left[\dfrac{2}{4^x+2}-\dfrac{1}{2}\right]$，

因为 $4^x+2>2$，所以 $0<\frac{1}{4^x+2}<\frac{1}{2}$，所以 $\frac{2}{4^x+2}\in(0,1)$，所以 $\frac{1}{2}-\frac{2}{4^x+2}\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\frac{2}{4^x+2}-\frac{1}{2}\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

当 $\frac{2}{4^x+2}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$\frac{1}{2}-\frac{2}{4^x+2}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\frac{2}{4^x+2}-\frac{1}{2}\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$，此时 $y=0+(-1)=-1$，

当 $\frac{2}{4^x+2}\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$\frac{1}{2}-\frac{2}{4^x+2}\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$\frac{2}{4^x+2}-\frac{1}{2}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，此时 $y=-1+0=-1$，

当 $\frac{2}{4^x+2}=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{2}-\frac{2}{4^x+2}=\frac{2}{4^x+2}-\frac{1}{2}=0$，此时 $y=0+0=0$，

综上：$B=\{0,-1\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0\}$，故 C 正确.

故选：C.

【点睛】关键点点睛：根据高斯函数对 $y=\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]+\left[f(1-x)-\frac{1}{2}\right]$ 分情况讨论具体的取值求出集合 B，从而求解.

2.（22-23 高三·上海浦东新·模拟）若 X 是一个非空集合，M 是一个以 X 的某些子集为元素的集合，且满足：①$X\in M$，$\varnothing\in M$；②对于 X 的任意子集 A，B，当 $A\in M$ 且 $B\in M$ 时，有 $(A\cup B)\in M$；③对于 X 的任意子集 A，B，当 $A\in M$ 且 $B\in M$ 时，有 $(A\cap B)\in M$，则称 M 是集合 X 的一个"M-集合类".例如：$M=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$ 是集合 $X=\{a,b\}$ 得一个"M—集合类".若 $X=\{a,b,c\}$，则所有含 $\{b,c\}$ 的"M—集合类"的个数为（　）

A．9　　B．10　　C．11　　D．12

【答案】D

【分析】确定 M 中一定含有 $\varnothing,\{b,c\},\{a,b,c\}$，再分类讨论，一一列举出能含有的其他元素，综合即可得答案.

【详解】$X=\{a,b,c\}$ 的子集有 $\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$，

由题意知 M 中一定含有 $\varnothing,\{b,c\},\{a,b,c\}$，

则 M 中可以含有的其他元素从剩余的 $\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\}$ 5 个集合中选取；

当剩余的 5 个集合都不选时，$M=\{\varnothing,\{b,c\},\{a,b,c\}\}$，共 1 个；

当只取 1 个时，$M=\{\varnothing,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ 或 $M=\{\varnothing,\{b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$，

或 $M=\{\varnothing,\{c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$，满足题意，此时 M 有 3 个；

当取 2 个时，$M=\{\varnothing,\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ 或 $M=\{\varnothing,\{b\},\{c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$，

或 $M=\{\varnothing,\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$，满足题意，此时 M 有 3 个；

当取 3 个时，$M=\{\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ 或 $M=\{\varnothing,\{b\},\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$，

或 $M=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ 或 $M=\{\varnothing,\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$，满足题意，此时 M 有 4 个；

当取 4 个时，没有符合题意的情况；

当 5 个全选时，$M=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$，共 1 个，

故所有含 $\{b,c\}$ 的"M—集合类"的个数为 $1+3+3+4+1=12$，

故选：D

3.（20-21 高三·四川眉山·阶段练习）设 $I=\{1,2,3,4,\}$，A 与 B 是 I 的子集，若 $A\mathrm{I}\ B=\{1,3\}$，则称 (A,B) 为一个"理想配集".那么符合此条件的"理想配集"（规定 (A,B) 与 (B,A) 是两个不同的"理想配集"）的个数是（　）

A．16　　B．9　　C．8　　D．4

【答案】B

【分析】根据题意，子集 A 和 B 不可以互换，从子集 A 分类讨论，结合计数原理，即可求解.

【详解】由题意，对子集 A 分类讨论：

当集合 $A=\{1,3\}$，集合 B 可以是 $\{1,2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3\},\{1,3\}$，共 4 种结果；

当集合 $A=\{1,2,3\}$，集合 B 可以是 $\{1,3,4\},\{1,3\}$，共 2 种结果；

当集合 $A=\{1,3,4\}$，集合 B 可以是 $\{1,2,3\},\{1,3\}$，共 2 种结果；

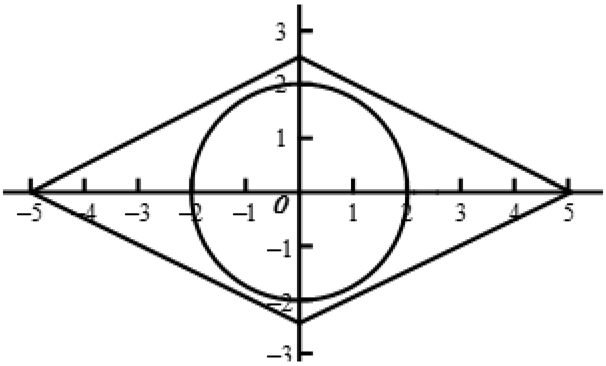
当集合 $A=\{1,2,3,4\}$，集合 B 可以是 $\{1,3\}$，共 1 种结果，

根据计数原理，可得共有$4+2+2+1=9$种结果.
故选：B.
【点睛】本题主要考查了集合新定义及其应用，其中解答正确理解题意，结合集合子集的概念和计数原理进行解答值解答额关键，着重考查分析问题和解答问题的能力.

4.（22-23 高二上·上海黄浦·阶段练习）已知集合$P=\{(x,y)||x|+2|y|=5\},Q=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\right\}$，则集合$P\cap Q$中元素的个数是（　）

A．0　　B．2　　C．4　　D．8

【答案】A
【分析】根据对称性画出图像，计算圆心$(0,0)$到直线$x+2y-5=0$的距离$d>r$ 得到答案.
【详解】根据对称性画出图像，如图所示：
考虑第一象限，圆心$(0,0)$到直线$x+2y-5=0$的距离为$d=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}>r=2$ ，相离
根据对称性得到集合$P\cap Q$中元素的个数是0
故选A



【点睛】本题考查了直线和圆的位置关系，集合的交集，意在考查学生的综合应用能力.

5．（21-22 高三·上海模拟）设$A_k=\{x\mid x=kt+\dfrac{1}{kt},\dfrac{1}{k^2}\le t\le 1\}(k=2,3,\cdots,2017)$，则所有$A_k$的交集为（　　）

A．φ　　B．$\{2\}$　　C．$[2,\dfrac{5}{2}]$　　D．$[2,\dfrac{2017^2+1}{2017}]$

【答案】C
【分析】利用对勾函数的性质逐一考查所给函数的值域，结合交集的定义整理计算即可求得最终结果.
【详解】利用对勾函数的性质可得：
函数$f(t)=kt+\dfrac{1}{kt}(\dfrac{1}{k^2}\le t\le 1)$在区间$[\dfrac{1}{k^2},\dfrac{1}{k}]$上单调递减，在$[\dfrac{1}{k},1]$上单调递增，
所以函数的最小值为 2，最大值为$k+\dfrac{1}{k}$，结合 k 的值可得所有的A_k的交集为$[2,\dfrac{5}{2}]$.
【点睛】该题考查的是有关集合的交集的求解问题，在解题的过程中，需要明确对勾函数的性质，在哪个区间上单调增，在哪个区间上单调减，从而求得相应函数的值域，再结合交集的特征求得结果.

6.（2024 年高考 1 卷）已知集合$A=\left\{x\middle|-5<x^3<5\right\},B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则$A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{-3,-1,0\}$　　D. $\{-1,0,2\}$

【答案】A
【解析】
【分析】化简集合 A，由交集的概念即可得解.
【详解】因为$A=\left\{x\mid -\sqrt[3]{5}<x<\sqrt[3]{5}\right\},B=\left\{-3,-1,0,2,3\right\}$，且注意到$1<\sqrt[3]{5}<2$，
从而$A\cap B=\left\{-1,0\right\}$.故选：A.

题型八：交集运算求参

指｜点｜迷｜津

交集运算时，要注意交集运算的一些基本性质：

①A∩B⊆_A；
②A∩B⊆B；
③A∩A＝A；
④A∩∅＝∅；
⑤A∩B=B∩A.

1．（2023·上海普陀·一模）设 A_1、A_2、A_3、L 、A_7 是均含有 2 个元素的集合，且 $A_1\cap A_7=\varnothing$，$A_i\cap A_{i+1}=\varnothing\left(i=1,2,3,\text{L} ,6\right)$，记 $B=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\text{L} \cup A_7$，则 B 中元素个数的最小值是（　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

【答案】A

【分析】设 x_1、x_2、L 、$x_n\left(n\geq 4\right)$ 是集合 B 互不相同的元素，分析可知 $n\geq 4$，然后对 n 的取值由小到大进行分析，验证题中的条件是否满足，即可得解.

【详解】解：设 x_1、x_2、L 、$x_n\left(n\geq 4\right)$ 是集合 B 互不相同的元素，若 $n=3$，则 $A_1\cap A_2\neq\varnothing$，不合乎题意.

①假设集合 B 中含有 4 个元素，可设 $A_1=\{x_1,x_2\}$，则 $A_2=A_4=A_6=\{x_3,x_4\}$，$A_3=A_5=A_7=\{x_1,x_2\}$，这与 $A_1\cap A_7=\varnothing$ 矛盾；

②假设集合 B 中含有 5 个元素，可设 $A_1=A_6=\{x_1,x_2\}$，$A_2=A_7=\{x_3,x_4\}$，$A_3=\{x_5,x_1\}$，$A_4=\{x_2,x_3\}$，$A_5=\{x_4,x_5\}$，满足题意.

综上所述，集合 B 中元素个数最少为 5.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题考查集合元素个数的最值的求解，解题的关键在于对集合元素的个数由小到大进行分类，对集合中的元素进行分析，验证题中条件是否成立即可.

2．（22-23 高三·江苏·模拟）设集合 $M=\left\{(x,y)\middle|y=\sqrt{4-x^2}\right\}$，$N=\left\{(x,y)\middle|(x-2)^2+(y-2)^2=r^2\right\}$（$r>0$）.当 $M\cap N$ 有且只有一个元素时，则正数 r 的所有取值为（　）

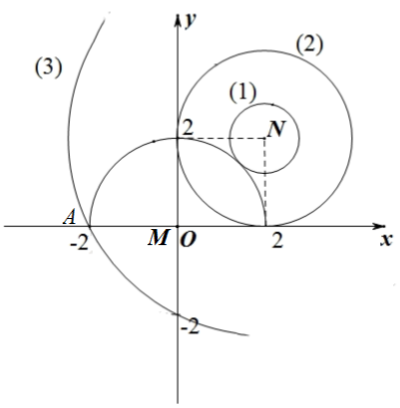
A．$2+\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{2}-2$　　B．$2<r\leq 2\sqrt{5}$

C．$2<r\leq 2\sqrt{5}$ 或 $r=2\sqrt{2}-2$　　D．$2\leq r\leq 2\sqrt{5}$ 或 $r=2\sqrt{2}-2$

【答案】C

【分析】依题画出满足题意的图形，因为 $M\cap N$ 有且只有一个元素，所以圆 N 和圆 M 只有一个交点，所以圆 N 的位置为圆（1）和介于圆（2）、圆（3）之间两种情况，然后分析计算即可得解.

【详解】$y=\sqrt{4-x^2}$，$y\geq 0$，即圆 M：$x^2+y^2=4$ 的上半部分，如图：



圆 M 的圆心坐标为 $(0,0)$，半径为 2，圆 N 的圆心坐标为 $(2,2)$，半径为 r，