

湖北省襄阳市等九地市 2023 届高三模拟试题（三）数学试题试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ ，其导函数为 $f'(x)$ ，当 $x \geq 0$ 时，恒有 $\frac{x}{3}f'(x) + f(x) > 0$ 。则不等式

$x^3 f(x) - (1+2x)^3 f(1+2x) < 0$ 的解集为（ ）。

- A. $\{x | -3 < x < -1\}$ B. $\{x | -1 < x < -\frac{1}{3}\}$
C. $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > -1\}$ D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > -\frac{1}{3}\}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n - a_{n-1} = n (n \geq 2)$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ （ ）

- A. $\frac{1}{2}n(n+1)$ B. $\frac{1}{2}n(3n-1)$ C. $n^2 - n + 1$ D. $n^2 - 2n + 2$

3. 设集合 A 、 B 是全集 U 的两个子集，则“ $A \subseteq B$ ”是“ $A \cap B = \emptyset$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

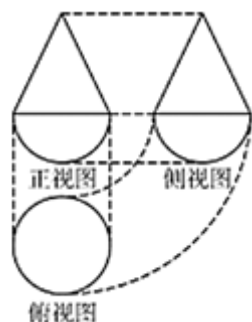
4. 等比数列 $\{a_n\}$ ，若 $a_3 = 4, a_{15} = 9$ 则 $a_9 =$ （ ）

- A. ± 6 B. 6 C. -6 D. $\frac{13}{2}$

5. 已知向量 $\vec{a} = (2, -4)$ ， $\vec{b} = (k, 3)$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 135° ，则 $k =$ （ ）

- A. -9 B. 1 C. -9 或 1 D. -1 或 9

6. 某几何体的三视图如图所示，图中圆的半径为 1，等腰三角形的腰长为 3，则该几何体表面积为（ ）



- A. 7π B. 6π C. 5π D. 4π

7. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为

- A. $y = \pm\sqrt{2}x$ B. $y = \pm\sqrt{3}x$ C. $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ D. $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

8. 已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 “ $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |2\vec{a} - \vec{b}|$ ” 是 “ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ” 的 ()

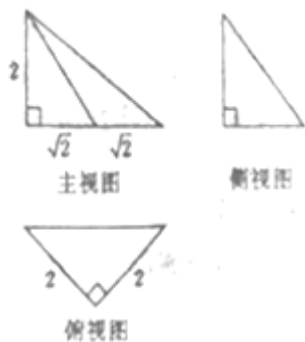
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$, 其中 $\omega > 0, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 对满足 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$

的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象, 则函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 ()

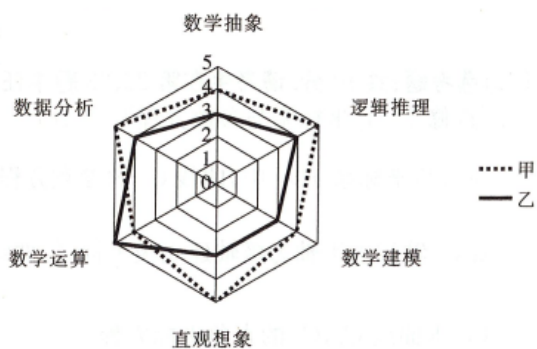
- A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbb{Z})$ B. $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbb{Z})$
C. $\left[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right] (k \in \mathbb{Z})$ D. $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right] (k \in \mathbb{Z})$

10. 某几何体的三视图如右图所示, 则该几何体的外接球表面积为 ()



- A. 12π B. 16π
C. 24π D. 48π

11. 为比较甲、乙两名高二学生的数学素养, 对课程标准中规定的数学六大素养进行指标测验 (指标值满分为 5 分, 分值高者为优), 根据测验情况绘制了如图所示的六大素养指标雷达图, 则下面叙述正确的是 ()



- A. 乙的数据分析素养优于甲
- B. 乙的数学建模素养优于数学抽象素养
- C. 甲的六大素养整体水平优于乙
- D. 甲的六大素养中数据分析最差

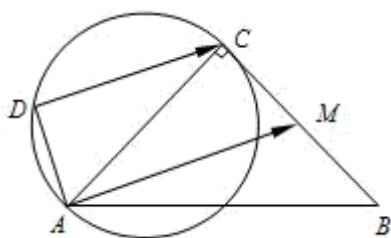
12. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x - y \leq 0 \\ x + 2y - 6 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x^2 + y^2$ 的最大值等于()

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. 8

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

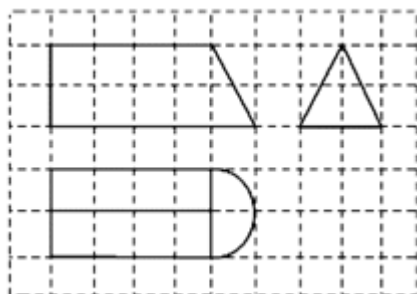
13. 3 张奖券分别标有特等奖、一等奖和二等奖。甲、乙两人同时各抽取 1 张奖券,两人都未抽得特等奖的概率是_____。

14. 如图,已知 $AC = BC = 4$, $\angle ACB = 90^\circ$, M 为 BC 的中点, D 为以 AC 为直径的圆上一动点, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DC}$ 的最小值是_____。



15. 双曲线 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦距为_____, 渐近线方程为_____。

16. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的体积为_____。



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $\varphi(x) = |x - 2| - |x - a|$, $x \in \mathbb{R}$.

(I) 若 $\varphi(1) > 1$, 求 a 的取值范围;

(II) 若 $a < 0$, 对 $\forall x$, $x \in (-\infty, a]$, 都有不等式 $\varphi(x) \leq |(\varphi + 2020)| + |x - a|$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x+1)(e^x - 1)$.

(I) 求 $f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程;

(II) 已知 $f(x) \geq ax$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立, 求 a 的值.

(III) 若方程 $f(x) = b$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $x_2 - x_1 \leq b + 1 + \frac{eb}{e-1}$.

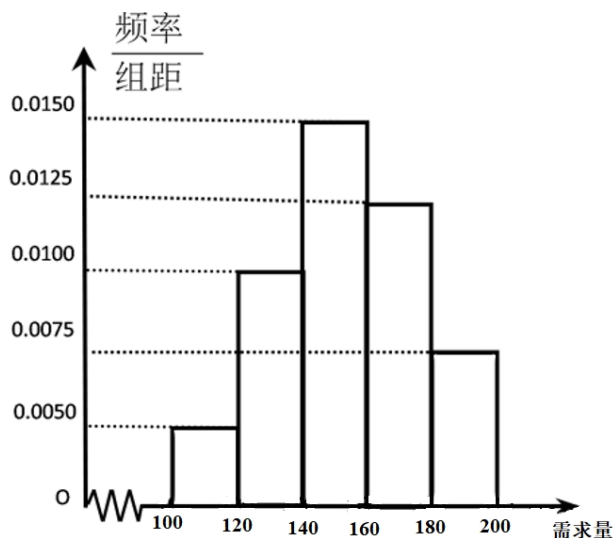
19. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点, 以 x 轴正

半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$.

(1) 写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

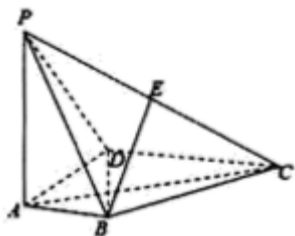
(2) 设点 P 在 C_1 上, 点 Q 在 C_2 上, 求 $|PQ|$ 的最小值以及此时 P 的直角坐标.

20. (12 分) 某大学生在开学季准备销售一种文具套盒进行试创业, 在一个开学季内, 每售出 1 盒该产品获利 50 元, 未售出的产品, 每盒亏损 30 元. 根据历史资料, 得到开学季市场需求量的频率分布直方图, 如图所示. 该同学为这个开学季进了 160 盒该产品, 以 x (单位: 盒, $100 \leq x \leq 200$) 表示这个开学季内的市场需求量, y (单位: 元) 表示这个开学季内经销该产品的利润.



- (1) 根据直方图估计这个开学季内市场需求量 x 的平均数和众数；
- (2) 将 y 表示为 x 的函数；
- (3) 以需求量的频率作为各需求量的概率，求开学季利润不少于 4800 元的概率。

21. (12 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD \perp AB$ ， $AB \parallel DC$ ， $AD = DC = AP = 2$ ， $AB = 1$ ，点 E 为棱 PC 的中点。



- (1) 证明： $BE \perp DC$ ；
- (2) 求直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值；
- (3) 若 F 为棱 PC 上一点，满足 $BF \perp AC$ ，求二面角 $F-AB-P$ 的余弦值。

22. (10 分) 已知曲线 $C_1: \rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $C_2: \begin{cases} x = \sqrt{6} \cos \varphi \\ y = \sqrt{2} \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数). 以原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，且两种坐标系中取相同的长度单位。

- (1) 求曲线 C_1 的直角坐标方程和 C_2 的方程化为极坐标方程；
- (2) 设 C_1 与 x ， y 轴交于 M ， N 两点，且线段 MN 的中点为 P . 若射线 OP 与 C_1 ， C_2 交于 P ， Q 两点，求 P ， Q 两点间的距离。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. D

【解析】

先通过 $\frac{x}{3}f'(x) + f(x) > 0$ 得到原函数 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$ 为增函数且为偶函数，再利用到 y 轴距离求解不等式即可。

【详解】

构造函数 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$,

$$\text{则 } g'(x) = x^2 f(x) + \frac{x^3}{3} f'(x) = x^2 \left(\frac{x}{3} f'(x) + f(x) \right)$$

由题可知 $\frac{x}{3} f'(x) + f(x) > 0$, 所以 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$ 在 $x \geq 0$ 时为增函数;

由 x^3 为奇函数, $f(x)$ 为奇函数, 所以 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$ 为偶函数;

$$\text{又 } x^3 f(x) - (1+2x)^3 f(1+2x) < 0, \text{ 即 } x^3 f(x) < (1+2x)^3 f(1+2x)$$

$$\text{即 } g(x) < g(1+2x)$$

又 $g(x)$ 为开口向上的偶函数

$$\text{所以 } |x| < |1+2x|, \text{ 解得 } x < -1 \text{ 或 } x > -\frac{1}{3}$$

故选: D

【点睛】

此题考查根据导函数构造原函数, 偶函数解不等式等知识点, 属于较难题目.

2. A

【解析】

利用数列的递推关系式, 通过累加法求解即可.

【详解】

数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_n - a_{n-1} = n(n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\text{可得 } a_1 = 1$$

$$a_2 - a_1 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 3$$

$$a_4 - a_3 = 4$$

...

$$a_n - a_{n-1} = n$$

以上各式相加可得:

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

故选：A.

【点睛】

本题考查数列的递推关系式的应用，数列累加法以及通项公式的求法，考查计算能力.

3. C

【解析】

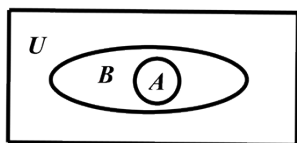
作出韦恩图，数形结合，即可得出结论.

【详解】

如图所示， $A \subseteq B \Rightarrow A \cap \complement B = \emptyset$,

同时 $A \cap \complement B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$.

故选:C.



【点睛】

本题考查集合关系及充要条件，注意数形结合方法的应用，属于基础题.

4. B

【解析】

根据等比中项性质代入可得解，由等比数列项的性质确定值即可.

【详解】

由等比数列中等比中项性质可知， $a_3 \cdot a_{15} = a_9^2$,

所以 $a_9 = \pm \sqrt{a_3 \cdot a_{15}} = \pm \sqrt{36} = \pm 6$,

而由等比数列性质可知奇数项符号相同，所以 $a_9 = 6$,

故选：B.

【点睛】

本题考查了等比数列中等比中项的简单应用，注意项的符号特征，属于基础题.

5. C

【解析】

由题意利用两个向量的数量积的定义和公式，求 k 的值.

【详解】

解：由题意可得 $\cos 135^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2k-12}{\sqrt{4+16} \cdot \sqrt{k^2+9}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

求得 $k = -9$ ，或 $k = 1$ ，

故选：C.

【点睛】

本题主要考查两个向量的数量积的定义和公式，属于基础题.

6. C

【解析】

几何体是由一个圆锥和半球组成，其中半球的半径为 1，圆锥的母线长为 3，底面半径为 1，计算得到答案.

【详解】

几何体是由一个圆锥和半球组成，其中半球的半径为 1，圆锥的母线长为 3，底面半径为 1，故几何体的表面积为

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 2\pi + 2\pi \times 1^2 = 5\pi.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查了根据三视图求表面积，意在考查学生的计算能力和空间想象能力.

7. A

【解析】

分析：根据离心率得 a,c 关系，进而得 a,b 关系，再根据双曲线方程求渐近线方程，得结果.

详解：

$$\because \frac{c}{a} = \sqrt{3}, \therefore \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2 - b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} - 1 = 3 - 1 = 2, \therefore \frac{c}{b} = \sqrt{2}.$$

因为渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，所以渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{2}x$ ，选 A.

点睛：已知双曲线方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0) \quad \text{求渐近线方程:} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}x.$$

8. C

【解析】

根据向量的数量积运算，由向量的关系 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |2\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ ，可得选项.

【详解】

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = |2\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |2\vec{a} - \vec{b}|^2 \Leftrightarrow \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2,$$

Q $|\vec{a}|=|\vec{b}| \neq 0$, $\therefore$ 等价于 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$,

故选: C.

【点睛】

本题考查向量的数量积运算和命题的充分、必要条件, 属于基础题.

9. B

【解析】

根据已知得到函数 $f(x)$ 两个对称轴的距离也即是半周期, 由此求得 ω 的值, 结合其对称轴, 求得 θ 的值, 进而求得 $f(x)$ 解析式. 根据图像变换的知识求得 $g(x)$ 的解析式, 再利用三角函数求单调区间的方法, 求得 $g(x)$ 的单调递减区间.

【详解】

解: 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$, 其中 $\omega > 0$, $0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 其图像关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称,

对满足 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$, $\therefore \omega = 2$.

再根据其图像关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 可得 $2 \times \frac{\pi}{6} + \theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$, $\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x$ 的图像.

令 $2k\pi \leq 2x \leq 2k\pi + \pi$, 求得 $k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$,

则函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$,

故选 B.

【点睛】

本小题主要考查三角函数图像与性质求函数解析式, 考查三角函数图像变换, 考查三角函数单调区间的求法, 属于中档题.

10. A

【解析】

由三视图知: 几何体为三棱锥, 且三棱锥的一条侧棱垂直于底面, 结合直观图判断外接球球心的位置, 求出半径, 代入求得表面积公式计算.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/408127042051006137>