

模块三：函数单调性

第一大类题型：决定导函数正负的部分为一次函数。

乘除运算中不决定正负的部分：大于零或者大于等于零的部分。

第一部分：平方大于等于零；

第二部分：指数大于零；

第三部分：根号大于等于零；

第四部分：对数的真数大于零。

定义域的计算：函数解析式中的限制条件有三种。

第一部分：分母不等于零；

第二部分：根号下大于等于零；

第三部分：对数函数的真数大于零。

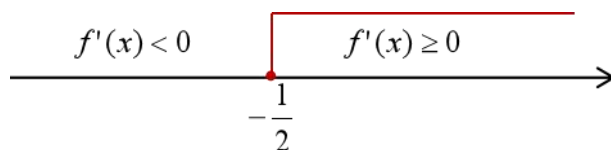
题型一：无参数求单调区间。

例题一：已知：函数 $f(x) = e^x(2x-1)$ 。求解：函数 $f(x)$ 的单调区间。

本题解析：定义域： $x \in R$ 。

导函数： $f'(x) = e^x(2x-1) + 2e^x = e^x(2x-1+2) = e^x(2x+1)$ 。

令导函数 $f'(x) \geq 0 \Rightarrow 2x+1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ 。如下图所示：



当 $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ 时：导函数 $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减；

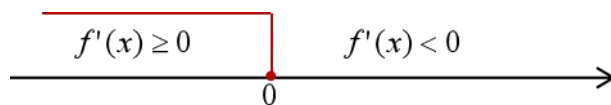
当 $x \in [-\frac{1}{2}, +\infty)$ 时：导函数 $f'(x) \geq 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递增。

例题二：已知：函数 $f(x) = \frac{1-x}{e^{-x}}$ 。求解：函数 $f(x)$ 的单调区间。

本题解析：定义域： $e^{-x} > 0$ 且 $e^{-x} \neq 0 \Rightarrow$ 没有限制 $\Rightarrow x \in R$ 。

导函数： $f'(x) = \frac{-e^{-x} - (-e^{-x})(1-x)}{(e^{-x})^2} = \frac{-1+1-x}{e^{-x}} = \frac{-x}{e^{-x}}$ 。

令导函数 $f'(x) \geq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$ 。如下图所示：



当 $x \in (-\infty, 0]$ 时: 导函数 $f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

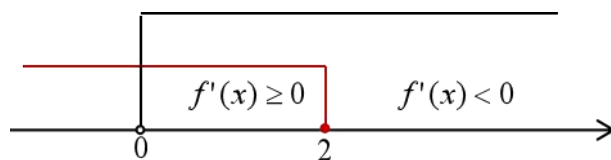
当 $x \in (0, +\infty)$ 时: 导函数 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减。

例题三: 已知: 函数 $f(x) = -x + 2\ln x - 1$ 。求解: 函数 $f(x)$ 的单调区间。

本题解析: 定义域: $x \in (0, +\infty)$ 。

$$\text{导函数: } f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{-x+2}{x}。$$

令导函数 $f'(x) \geq 0 \Rightarrow -x+2 \geq 0 \Rightarrow -x \geq -2 \Rightarrow x \leq 2$ 。如下图所示:



当 $x \in (0, 2]$ 时: 导函数 $f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

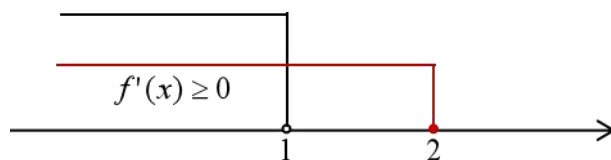
当 $x \in (2, +\infty)$ 时: 导函数 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减。

例题四: 已知: 函数 $f(x) = x - \ln(1-x)$ 。求解: 函数 $f(x)$ 的单调区间。

本题解析: 定义域: $1-x > 0 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$ 。

$$\text{导函数: } f'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} \times (-1) = 1 + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+1}{1-x} = \frac{2-x}{1-x}。$$

令导函数 $f'(x) \geq 0 \Rightarrow 2-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -2 \Rightarrow x \leq 2$ 。如下图所示:



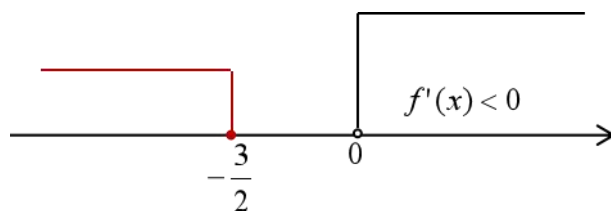
当 $x \in (-\infty, 1)$ 时: 导函数 $f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增。

例题五: 已知: 函数 $f(x) = -2\ln x + \frac{3}{x} - 1$ 。求解: 函数 $f(x)$ 的单调区间。

本题解析: 定义域: $x \in (0, +\infty)$;

$$\text{导函数: } f'(x) = \frac{-2}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{-2x-3}{x^2}。$$

令导函数 $f'(x) \geq 0 \Rightarrow -2x-3 \geq 0 \Rightarrow -2x \geq 3 \Rightarrow x \leq -\frac{3}{2}$ 。如下图所示:



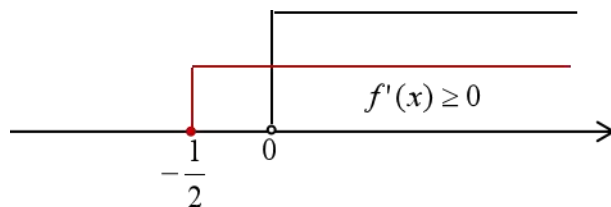
当 $x \in (0, +\infty)$ 时：导函数 $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减。

例题六：已知：函数 $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ 。求解：函数 $f(x)$ 的单调区间。

本题解析：定义域： $x \in (0, +\infty)$ 。

$$\text{导函数： } f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 2 \times \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - (-\frac{1}{2}) x^{-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{3}{2}} (x + \frac{1}{2})。$$

令导函数 $f'(x) \geq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ 。如下图所示：



当 $x \in (0, +\infty)$ 时：导函数 $f'(x) \geq 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递增。

跟踪训练一：已知：函数 $f(x) = \ln(-x) - \frac{2}{x} + 3$ 。求解：函数 $f(x)$ 的单调区间。

跟踪训练二：已知：函数 $f(x) = e^{2x} (\frac{1}{2}x - 1)$ 。求解：函数 $f(x)$ 的单调区间。

跟踪训练三：已知：函数 $f(x) = -2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ 。求解：函数 $f(x)$ 的单调区间。

跟踪训练四：已知：函数 $f(x) = 2x - \ln x - 3$ 。求解：函数 $f(x)$ 的单调区间。

跟踪训练五：已知：函数 $f(x) = -3\ln x + \frac{2}{x}$ 。求解：函数 $f(x)$ 的单调区间。

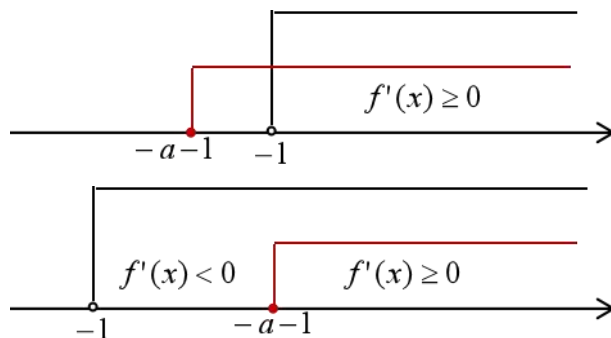
题型二：极值点是否属于定义域的分类讨论。

例题一：已知：函数 $f(x) = a \ln(1+x) + x - 1$ 。讨论：函数 $f(x)$ 的单调区间。

本题解析：定义域： $1+x > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x \in (-1, +\infty)$ 。

$$\text{导函数： } f'(x) = \frac{a}{1+x} + 1 = \frac{x+a+1}{1+x}。$$

令导函数 $f'(x) \geq 0 \Rightarrow x+a+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -a-1$ 。如下图所示：



分类讨论：

(1) 当 $-a-1 \leq -1 \Rightarrow -a \leq 0 \Rightarrow a \geq 0$ 时：

当 $x \in (-1, +\infty)$ 时：导函数 $f'(x) \geq 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递增。

(2) 当 $-a-1 > -1 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow a < 0$ 时：

当 $x \in (-1, -a-1)$ 时：导函数 $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减；

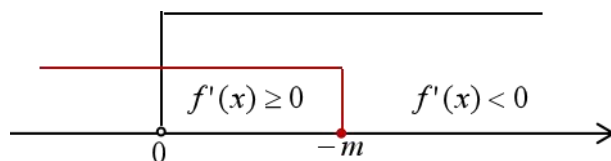
当 $x \in [-a-1, +\infty)$ 时：导函数 $f'(x) \geq 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递增。

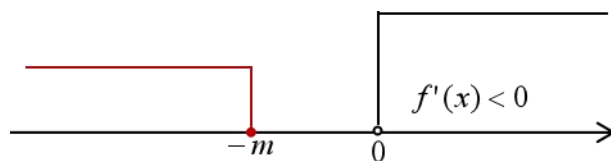
例题二：已知：函数 $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{m}{\sqrt{x}}$ 。讨论：函数 $f(x)$ 的单调区间。

本题解析：定义域： $x \in (0, +\infty)$ 。

$$\text{导函数： } f(x) = -x^{\frac{1}{2}} + mx^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}mx^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}(-x-m)。$$

令导函数 $f'(x) \geq 0 \Rightarrow -x-m \geq 0 \Rightarrow -x \geq m \Rightarrow x \leq -m$ 。如下图所示：





分类讨论：

(1) 当 $-m > 0 \Rightarrow m < 0$ 时：

当 $x \in (0, -m]$ 时：导函数 $f'(x) \geq 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $x \in (-m, +\infty)$ 时：导函数 $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减。

(2) 当 $-m \leq 0 \Rightarrow m \geq 0$ 时：

当 $x \in (0, +\infty)$ 时：导函数 $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减。

跟踪训练一：已知：函数 $f(x) = 3 \ln x + \frac{m-1}{x} - 2$ 。讨论：函数 $f(x)$ 的单调区间。

跟踪训练二：已知：函数 $f(x) = a \ln(2x-1) + x$ 。讨论：函数 $f(x)$ 的单调区间。

题型三：解不等式讨论。

理论：不等式两边同时乘以或者除以一个大于零的数，不等式符号不变；

不等式两边同时乘以或者除以一个小于零的数，不等式符号改变。

例题一：已知：函数 $f(x) = m \ln(x-1) + \frac{1}{x-1}$ 。讨论：函数 $f(x)$ 的单调区间。

本题解析：定义域： $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in (1, +\infty)$ 。

$$\text{导函数： } f'(x) = \frac{m}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{m(x-1)-1}{(x-1)^2} = \frac{mx-m-1}{(x-1)^2}。$$

$$\text{令导函数 } f'(x) \geq 0 \Rightarrow mx - m - 1 \geq 0 \Rightarrow mx \geq m + 1。$$

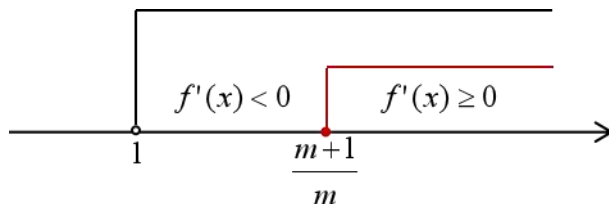
分类讨论：

(1) 当 $m = 0$ 时： $mx \geq m + 1 \Rightarrow 0 \geq 1$ 不成立 $\Rightarrow x \in \emptyset$ 。

当 $x \in (1, +\infty)$ 时：导函数 $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减。

(2) 当 $m > 0$ 时： $mx \geq m + 1 \Rightarrow x \geq \frac{m+1}{m}$ ， $\frac{m+1}{m} = 1 + \frac{1}{m}$ ， $m > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{m} > 1$ 。

如下图所示：

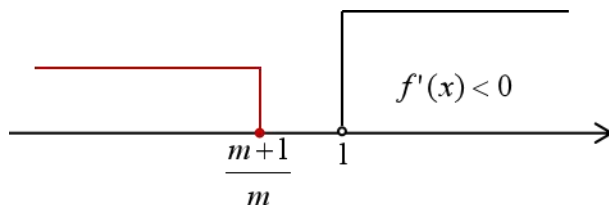


当 $x \in (1, \frac{m+1}{m})$ 时：导函数 $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $x \in [\frac{m+1}{m}, +\infty)$ 时：导函数 $f'(x) \geq 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递增。

(3) 当 $m < 0$ 时： $mx \geq m + 1 \Rightarrow x \leq \frac{m+1}{m}$ ， $\frac{m+1}{m} = 1 + \frac{1}{m}$ ， $m < 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{m} < 1$ 。

如下图所示：



当 $x \in (1, +\infty)$ 时：导函数 $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/40813502700006100>