2024届北京市北京一零一中学高三第三次模拟考试数学试卷

注意事项:
1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2．答题时请按要求用笔。
3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5．保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知函数 $f\left(x\right)=\frac{e\ln x}{x^2}$，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2-mf(x)+\frac{1}{8}=0$ 有4个不同的实数根，则实数 m 的取值范围为（　　）

A．$(0,\frac{3}{4})$　　B．$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　C．$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{4})$　　D．$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

2．设i为虚数单位，则复数 $z=\frac{2}{1-i}$ 在复平面内对应的点位于(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．函数 $f\left(x\right)=\sin 2x+m\sin x+3x$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减的充要条件是（　　）

A．$m\le -3$　　B．$m\le -4$　　C．$m\le -\frac{8\sqrt{3}}{3}$　　D．$m\le 4$

4．欧拉公式为 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$,(i虚数单位)是由瑞士著名数学家欧拉发现的，它将指数函数的定义域扩大到复数，建立了三角函数和指数函数的关系，它在复变函数论里非常重要，被誉为“数学中的天桥”．根据欧拉公式可知，$e^{\frac{\pi}{3}i}$ 表示的复数位于复平面中的（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

5．“$-1\le x+y\le 1$ 且 $-1\le x-y\le 1$”是“$x^2+y^2\le 1$”的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

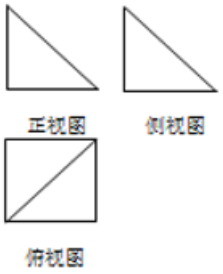
6．已知甲、乙两人独立出行，各租用共享单车一次（假定费用只可能为1、2、3元）．甲、乙租车费用为1元的概率分别是0.5、0.2，甲、乙租车费用为2元的概率分别是0.2、0.4，则甲、乙两人所扣租车费用相同的概率为（　　）

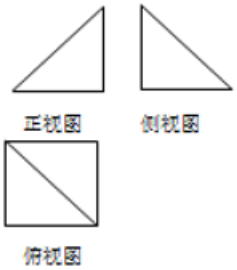
A．0.18　　B．0.3　　C．0.24　　D．0.36

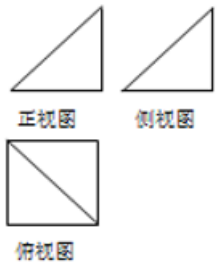
7．ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $a+2c=2b\cos A$，则角 B 的大小为（　　）

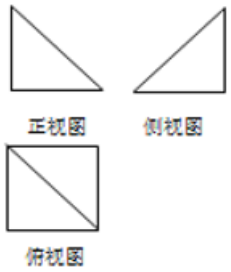
A．$\frac{2\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{6}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

8．已知底面为正方形的四棱锥，其一条侧棱垂直于底面，那么该四棱锥的三视图可能是下列各图中的（　　）

A．

B．

C．

D．

9．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V，点 M，N 分别在棱 BB_1，CC_1 上，满足 $AM+MN+ND_1$ 最小，则四面体 $AMND_1$ 的体积为(　　)

A．$\frac{1}{12}V$　　B．$\frac{1}{8}V$　　C．$\frac{1}{6}V$　　D．$\frac{1}{9}V$

10．盒子中有编号为 1，2，3，4，5，6，7 的 7 个相同的球，从中任取 3 个编号不同的球，则取的 3 个球的编号的中位数恰好为 5 的概率是（　　）

A．$\frac{2}{35}$　　B．$\frac{8}{35}$　　C．$\frac{6}{35}$　　D．$\frac{3}{7}$

11．已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，设其前 n 项和 S_n，若 $a_na_{n+1}=4^n$（$n\in\mathbf{N}^*$），则 $S_5=$（　　）

A．30　　B．$31\sqrt{2}$　　C．$15\sqrt{2}$　　D．62

12．若集合 $A=\{x|x(x-2)>0\}$，$B=\{x|x-1>0\}$，则 $A\cap B=$

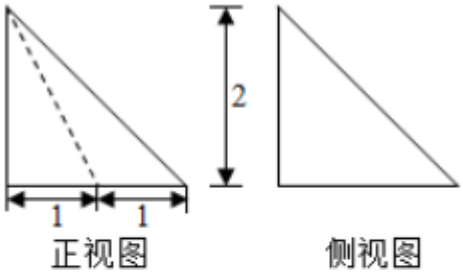
A．$\{x|x>1$或$x<0\}$　　B．$\{x|1<x<2\}$　　C．$\{x\,|\,x>2\}$　　D．$\{x|x>1\}$

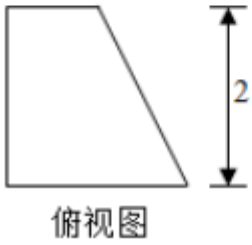
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知向量 $\vec{a}=(1,1)$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=2$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$_____.

14．设命题 p：$\exists x_0\in R$，$2^{x_0}+2^{1-x_0}<2$，则 $\neg p$：_____.

15．某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积是_____cm^3；最长棱的长度是_____cm．





16．直线 $y=ex+2b$ 是曲线 $y=lnx\left(x>0\right)$ 的一条切线 $(e=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数)，则实数 $b=$_____.

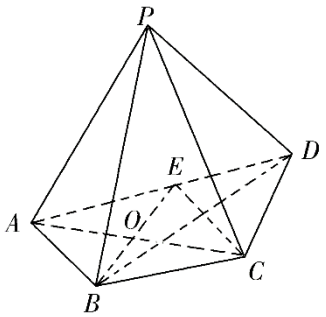
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前 n 项和为 S_n，且 $a_3=2$，$S_9=54$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：$\sqrt{\frac{1}{a_1+3}}+\sqrt{\frac{1}{a_2+3}}+\sqrt{\frac{1}{a_3+3}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{a_{100}+3}}>13$.

18．（12 分）如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 PCD，底面 ***ABCD*** 满足 ***AD∥BC***，$AP=AB=BC=\frac{1}{2}AD=2$，$\angle ABC=90°$，***E*** 为 ***AD*** 的中点，***AC*** 与 ***BE*** 的交点为 ***O***.



（1）设 ***H*** 是线段 ***BE*** 上的动点，证明：三棱锥 $H-PCD$ 的体积是定值；

（2）求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

（3）求直线 ***BC*** 与平面 ***PBD*** 所成角的余弦值.

19．（12 分）在 ΔABC 中,角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，角 A、B、C 的度数成等差数列，$b=\sqrt{13}$.

（1）若 $3\sin C=4\sin A$，求 c 的值；

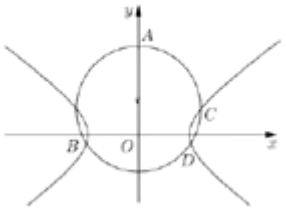
（2）求 $a+c$ 的最大值.

20.（12 分）在ΔABC中，内角A,B,C的对边分别是a,b,c，已知$A=\frac{\pi}{3},b^2+c^2-\frac{\sqrt{3}}{3}abc=a^2$.

（1）求a的值；

（2）若$b=1$，求ΔABC的面积.

21.（12 分）如图，已知圆$\Gamma_1:x^2+\left(y-\frac{r}{2}\right)^2=r^2(r>0)$和双曲线$\Gamma_2:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$，记$\Gamma_1$与$y$轴正半轴、$x$轴负半轴的公共点分别为$A$、$B$，又记$\Gamma_1$与$\Gamma_2$在第一、第四象限的公共点分别为$C$、$D$.



（1）若$r=2$，且B恰为Γ_2的左焦点，求Γ_2的两条渐近线的方程；

（2）若$r=2$，且$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=(m,-5)$，求实数$m$的值；

（3）若B恰为Γ_2的左焦点，求证：在x轴上不存在这样的点P，使得$\left|PA\right|-\left|PC\right|=2.019$.

22.（10 分）若数列$\{a_n\}$前 *n* 项和为$\{S_n\}$，且满足$S_n=\frac{t}{t-1}(a_n-2)$（*t* 为常数，且$t\neq 0,t\neq 1$）

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=1-S_n$，且数列$\{b_n\}$为等比数列，令$c_n=a_n\left|\log_3 b_n\right|$，.求证：$c_1+c_2+\ldots+c_n<\frac{3}{2}$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

求导，先求出$f(x)$在$x\in\left(0,\sqrt{e}\right)$单增，在$x\in\left(\sqrt{e},+\infty\right)$单减，且$f(x)_{\max}=f(\sqrt{e})=\frac{1}{2}$知设$f(x)=t$，则方程$[f(x)]^2-mf(x)+\frac{1}{8}=0$有 4 个不同的实数根等价于方程

$t^2-mt+\frac{1}{8}=0$在$(0,\frac{1}{2})$上有两个不同的实数根，再利用一元二次方程根的分布条件列不等式组求解可得.

【详解】

依题意，$f^{'}(x)=\frac{\frac{e}{x}\cdot x^2-2xe\ln x}{x^4}=\frac{e(1-2\ln x)}{x^3}$，

令$f'(x)=0$，解得$\ln x=\frac{1}{2}$，$x=\sqrt{e}$，故当$x\in(0,\sqrt{e})$时，$f'(x)>0$，

当$x\in(\sqrt{e},+\infty)$，$f'(x)<0$，且$f(\sqrt{e})=\frac{e\ln\sqrt{e}}{e}=\frac{1}{2}$，

故方程$t^2-mt+\frac{1}{8}=0$在$(0,\frac{1}{2})$上有两个不同的实数根，

故$\begin{cases}\Delta>0\\(t_1-\frac{1}{2})(t_2-\frac{1}{2})>0\\0<t_1+t_2<1\\t_1t_2>0\end{cases}$，$\begin{cases}m^2-\frac{1}{2}>0\\\frac{1}{8}-\frac{m}{2}+\frac{1}{4}>0\\0<m<1\end{cases}$

解得$m\in(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{4})$.

故选：C.

【点睛】

本题考查确定函数零点或方程根个数.其方法：

(1)构造法：构造函数$g(x)$($g'(x)$易求，$g'(x)=0$可解)，转化为确定$g(x)$的零点个数问题求解，利用导数研究该函数的单调性、极值，并确定定义区间端点值的符号(或变化趋势)等，画出$g(x)$的图象草图，数形结合求解；

(2)定理法：先用零点存在性定理判断函数在某区间上有零点，然后利用导数研究函数的单调性、极值(最值)及区间端点值符号，进而判断函数在该区间上零点的个数.

2、A

【解析】

利用复数的除法运算化简z，求得z对应的坐标，由此判断对应点所在象限.

【详解】

Q$z=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$，$\therefore$对应的点的坐标为$(1,1)$，位于第一象限.

故选：A.

【点睛】

本小题主要考查复数除法运算，考查复数对应点所在象限，属于基础题.

3、C

【解析】

先求导函数，函数在$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$上单调递减则$f'(x)\le 0$恒成立，对导函数不等式换元成二次函数，结合二次函数的性质和图象，列不等式组求解可得.

【详解】

依题意，$f'(x)=2\cos 2x+m\cos x+3=4\cos^2 x+m\cos x+1$，

令$\cos x=t$，则$t\in[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$，故$4t^2+mt+1\le 0$在$[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$上恒成立；

结合图象可知，$\begin{cases}4\times\frac{1}{4}+m\times\frac{1}{2}+1\geqslant 0\\ 4\times\frac{3}{4}+m\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\geqslant 0\end{cases}$，解得$\begin{cases}m\geqslant -4\\ m\geqslant -\frac{8\sqrt{3}}{3}\end{cases}$

故$m\le -\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查求三角函数单调区间. 求三角函数单调区间的两种方法:

(1)代换法: 就是将比较复杂的三角函数含自变量的代数式整体当作一个角u(或t)，利用基本三角函数的单调性列不等式求解；

(2)图象法：画出三角函数的正、余弦曲线，结合图象求它的单调区间.

4、A

【解析】

计算$e^{\frac{\pi}{3}i}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，得到答案.

【详解】

根据题意$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，故$e^{\frac{\pi}{3}i}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，表示的复数在第一象限.

故选：A.

【点睛】

本题考查了复数的计算， 意在考查学生的计算能力和理解能力.

5、A

【解析】

画出“$-1\le x+y\le 1,-1\le x-y\le 1,x^2+y^2\le 1$,所表示的平面区域,即可进行判断.

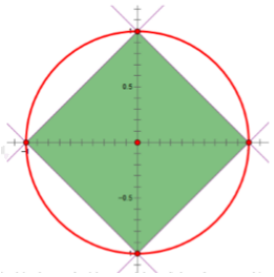
【详解】

如图，“$-1\le x+y\le 1$且$-1\le x-y\le 1$”表示的区域是如图所示的正方形，

记为集合 P，“$x^2+y^2\le 1$”表示的区域是单位圆及其内部，记为集合 Q，

显然 P 是 Q 的真子集,所以答案是充分非必要条件，

故选: A.



【点睛】

本题考查了不等式表示的平面区域问题,考查命题的充分条件和必要条件的判断,难度较易.

6、B

【解析】

甲、乙两人所扣租车费用相同即同为 1 元，或同为 2 元，或同为 3 元，由独立事件的概率公式计算即得.

【详解】

由题意甲、乙租车费用为 3 元的概率分别是 $0.3,0.4$，

∴甲、乙两人所扣租车费用相同的概率为

$P=0.5\times 0.2+0.2\times 0.4+0.3\times 0.4=0.3$.

故选：B.

【点睛】

本题考查独立性事件的概率．掌握独立事件的概率乘法公式是解题基础.

7、A

【解析】

先利用正弦定理将边统一化为角，然后利用三角函数公式化简，可求出解 ***B***.

【详解】

由正弦定理可得 $\sin A+2\sin C=2\sin B\cos A$，即 $\sin A+2\sin(A+B)=2\sin B\cos A$，即有 $\sin A(1+2\cos B)=0$，因为 $\sin A>0$，则 $\cos B=-\frac{1}{2}$，而 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$.

故选：**A**

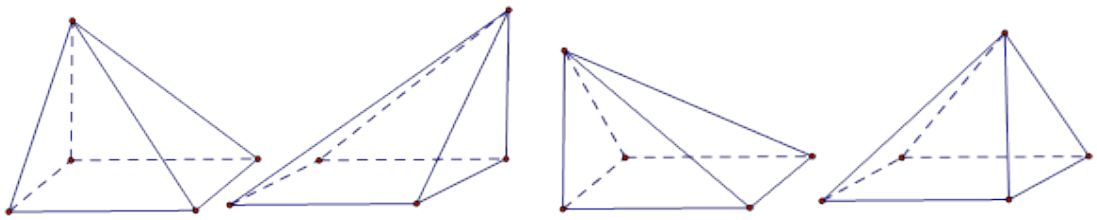
【点睛】

此题考查了正弦定理和三角函数的恒等变形，属于基础题.

8、**C**

【解析】

试题分析：通过对以下四个四棱锥的三视图对照可知，只有选项 **C** 是符合要求的.



考点：三视图

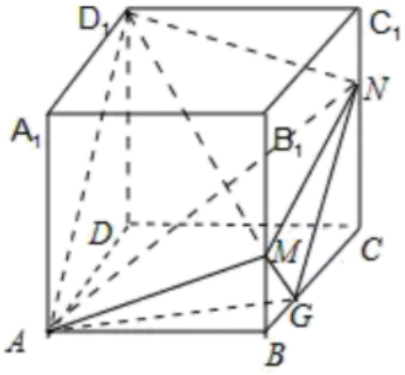
9、**D**

【解析】

由题意画出图形，将 MN,ND_1 所在的面延它们的交线展开到与 AM 所在的面共面，可得当 $BM=\frac{1}{3}BB_1,C_1N=\frac{1}{3}C_1C$ 时 $AM+MN+ND_1$ 最小，设正方体 AC_1 的棱长为 $3a$，得 $a^3=\frac{V}{27}$，进一步求出四面体 $AMND_1$ 的体积即可.

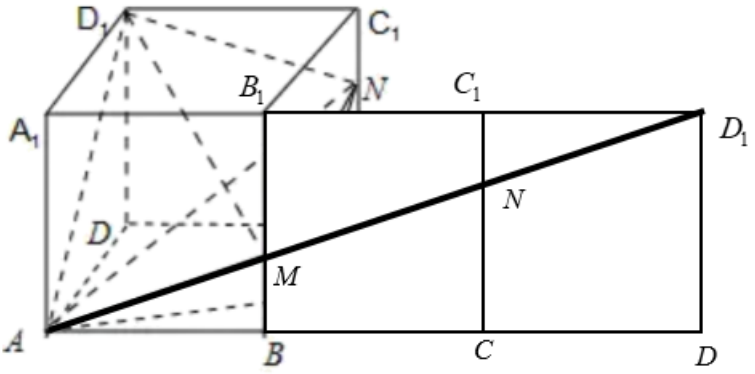
【详解】

解：如图，



∵点 ***M***，***N*** 分别在棱 BB_1,CC_1 上，要 $AM+MN+ND_1$ 最小，将 MN,ND_1 所在的面延它们的交线展开到与 AM

所在的面共面， AM,MN,ND_1 三线共线时， $AM+MN+ND_1$ 最小，



$\therefore BM=\frac{1}{3}BB_1, C_1N=\frac{1}{3}C_1C$

设正方体 AC_1 的棱长为 $3a$ ，则 $27a^3=V$ ，

$\therefore a^3=\frac{V}{27}$.

取 $BG=\frac{1}{3}BC$ ，连接 NG ，则 $AGND_1$ 共面，

在 ΔAND_1 中，设 N 到 AD_1 的距离为 h_1 ，

$AD_1=\sqrt{(3a)^2+(3a)^2}=3\sqrt{2}a,$

$D_1N=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a,$

$AN=\sqrt{(3\sqrt{2}a)^2+(2a)^2}=\sqrt{22}a,$

$\therefore \cos\angle D_1NA=\frac{10a^2+22a^2-18a^2}{2\cdot\sqrt{10}a\cdot\sqrt{22}a}=\frac{7}{2\sqrt{55}},$

$\therefore \sin\angle D_1NA=\frac{3\sqrt{19}}{2\sqrt{55}},$

$\therefore S_{\Delta D_1NA}=\frac{1}{2}\cdot D_1N\cdot AN\cdot\sin\angle D_1NA=\frac{1}{2}\cdot AD_1\cdot h_1=\frac{3\sqrt{19}}{2}a^2$

$\therefore h_1=\sqrt{\frac{19}{2}}a,$

设 M 到平面 $AGND_1$ 的距离为 h_2 ，

$\therefore V_{M-AGN}=V_{A-MGN}$

$\therefore \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{19}{2}}a\cdot2\sqrt{2}a\cdot h_2=\frac{1}{3}\cdot[\frac{1}{2}\cdot(a+2a)\cdot3a-\frac{1}{2}\cdot a\cdot a-\frac{1}{2}\cdot2a\cdot2a]$

$\therefore h_2=\frac{6a}{\sqrt{19}}$

$\therefore V_{AMND_1}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{19}a^2}{2}\times\frac{6a}{\sqrt{19}}=3a^3=\frac{V}{9}$

.

故选 D.

【点睛】

本题考查多面体体积的求法，考查了多面体表面上的最短距离问题，考查计算能力，是中档题.

10、B

【解析】

由题意，取的 3 个球的编号的中位数恰好为 5 的情况有 $C_4^1C_2^1$，所有的情况有 C_7^3 种，由古典概型的概率公式即得解.

【详解】

由题意，取的 3 个球的编号的中位数恰好为 5 的情况有 $C_4^1C_2^1$，所有的情况有 C_7^3 种

由古典概型，取的 3 个球的编号的中位数恰好为 5 的概率为：

$$P=\frac{C_4^1C_2^1}{C_7^3}=\frac{8}{35}$$

故选：B

【点睛】

本题考查了排列组合在古典概型中的应用，考查了学生综合分析，概念理解，数学运算的能力，属于中档题.

11、B

【解析】

根据 $a_na_{n+1}=4^n$，分别令 $n=1,2$，结合等比数列的通项公式，得到关于首项和公比的方程组，解方程组求出首项和公式，最后利用等比数列前 *n* 项和公式进行求解即可.

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题意可知中：$a_1>0,q>0$.由 $a_na_{n+1}=4^n$，分别令 $n=1,2$，可得 $a_1a_2=4$、$a_2a_3=16$，由等比数列的通项公式可得：$\begin{cases}a_1\cdot a_1\cdot q=4\\a_1\cdot q\cdot a_1\cdot q^2=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=\sqrt{2}\\q=2\end{cases}$，

因此 $S_5=\frac{\sqrt{2}(1-2^5)}{1-2}=31\sqrt{2}$.

故选：B

【点睛】

本题考查了等比数列的通项公式和前 *n* 项和公式的应用，考查了数学运算能力.

12、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/415003000134011132