

排列组合题型总结

排列组合问题千变万化，解法灵活，条件隐晦，思维抽象，难以找到解题的突破口。因而在求解排列组合应用题时，除做到：排列组合分清，加乘原理辩明，避免重复遗漏外，还应注意积累排列组合问题得以快速准确求解。

一. 直接法

1. 特殊元素法

例 1 用 1, 2, 3, 4, 5, 6 这 6 个数字组成无重复的四位数，试求满足下列条件的四位数各有多少个

- (1) 数字 1 不排在个位和千位
- (2) 数字 1 不在个位，数字 6 不在千位。

分析：(1) 个位和千位有 5 个数字可供选择 A_5^2 ，其余 2 位有四个可供选择 A_4^2 ，由乘法原理： $A_5^2 A_4^2 = 240$

2. 特殊位置法

(2) 当 1 在千位时余下三位有 $A_5^3 = 60$ ，1 不在千位时，千位有 A_4^1 种选法，个位有 A_4^1 种，余下的有 A_4^2 ，

共有 $A_4^1 A_4^1 A_4^2 = 192$ 所以总共有 $192 + 60 = 252$

二. 间接法 当直

2) 可用间接法

$$A_6^4 - 2 A_5^3 - A_4^2 = 252$$

例 2 有五张卡片，它的正反面分别写 0 与 1，2 与 3，4 与 5，6 与 7，8 与 9，将它们任意三张并排放在一起组成三位数，共可组成多少个不同的三位数？

分析：此例正面求解需考虑 0 与 1 卡片用与不用，且用此卡片又分使用 0 与使用 1，类别较复杂，因而可使用间接计算：任取三张卡片可以组成不同的三位数 $C_5^3 \cdot 2^3 - A_3^3$ 个，其中 0 在百位的有

$C_4^2 \cdot 2^2 - A_2^2$ 个，这是不合题意的。故共可组成不同的三位数 $C_5^3 \cdot 2^3 - A_3^3 - C_4^2 \cdot 2^2 - A_2^2 = 432$ (个)

三. 插空法 当需排元素中有不能相邻的元素时，宜用插空法。

例 3 在一个含有 8 个节目的节目单中，临时插入两个歌唱节目，且保持原节目顺序，有多少中插入方法？

分析：原有的 8 个节目中含有 9 个空档，插入一个节目后，空档变为 10 个，故有 $A_9^1 A_{10}^1 = 100$ 中插入方法。

四. 捆绑法 当需排元素中有必须相邻的元素时，宜用捆绑法。

例 4 4 名男生和 3 名女生共坐一排，男生必须排在一起的坐法有多少种？

分析：先将男生捆绑在一起看成一个大元素与女生全排列有 A_4^4 种排法，而男生之间又有 A_4^4 种排法，

又乘法原理满足条件的排法有： $A_4^4 \times A_4^4 = 576$

练习 1. 四个不同的小球全部放入三个不同的盒子中，若使每个盒子不空，则不同的放法有_____种

$$(C_4^2 A_3^3)$$

2. 某市植物园要在 30 天内接待 20 所学校的学生参观，但每天只能安排一所学校，其中有一所学校人数较多，要安排连续参观 2 天，其余只参观一天，则植物园 30 天内不同的安排方法有 $(C_{29}^1 A_{28}^{19})$ (注意连续参观 2 天，即需把 30 天种的连续两天捆绑看成一天作为一个整体来选有 C_{29}^1 其余的就是 19 所学校选 28 天进行排列)

五. **隔板法** 名额分配或相同物品的分配问题，适宜采隔板用法

例 5 某校准备组建一个由 12 人组成篮球队，这 12 个人由 8 个班的学生组成，每班至少一人，名额分配方案共____种。

分析：此例的实质是 12 个名额分配给 8 个班，每班至少一个名额，可在 12 个名额种的 11 个空当中插入 7 块隔板，一种插法对应一种名额的分配方式，故有 C_{11}^7 种

练习 1. $(a+b+c+d)^{15}$ 有多少项？

当项中只有一个字母时，有 C_4^1 种 (即 a.b.c.d 而指数只有 15 故 $C_4^1 C_{14}^0$ 。

当项中有 2 个字母时，有 C_4^2 而指数和为 15，即将 15 分配给 2 个字母时，如何分，隔板法一分为 2，

C_{14}^1 即 $C_4^2 C_{14}^1$

当项中有 3 个字母时 C_4^3 指数 15 分给 3 个字母分三组即可 $C_4^3 C_{14}^2$

当项种 4 个字母都在时 $C_4^4 C_{14}^3$ 四者都相加即可。

练习 2. 有 20 个不加区别的小球放入编号为 1, 2, 3 的三个盒子里，要求每个盒子内的球数不少编号数，问有多少种不同的方法？ (C_{16}^2)

3. 不定方程 $X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = 100$ 中不同的整数解有 (C_{99}^{49})

六. **平均分堆问题** 例 6 6 本不同的书平均分成三堆，有多少种不同的方法？

分析：分出三堆书 $(a_1, a_2), (a_3, a_4), (a_5, a_6)$ 由顺序不同可以有 $A_3^3 = 6$ 种，而这 6 种分法只算一种

分堆方式，故 6 本不同的书平均分成三堆方式有 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} = 15$ 种

练习：1. 6 本书分三份，2 份 1 本，1 份 4 本，则有不同分法？

2. 某年级 6 个班的数学课，分配给甲乙丙三名数学教师任教，每人教两个班，则分派方法的种数。

七. **合并单元格解决染色问题**

例 7 (全国卷 (文、理)) 如图 1，一个地区分为 5 个行政区域，现给地图着色，要求相邻区域不得使用同一颜色，现有四种颜色可供选择，则不同的着色方法共有____种 (以数字作答)。

分析：颜色相同的区域可能是 2、3、4、5。

下面分情况讨论：

(i) 当 2、4 颜色相同且 3、5 颜色不同时，将 2、4 合并成一个单元格，此时不同的着色方法相当

于 4 个元素 ①③⑤的全排列数 $A_{4,4}^4$

(ii) 当 2、4 颜色不同且 3、5 颜色相同时，与情形(i)类似同理可得 A_4^4 种着色法.

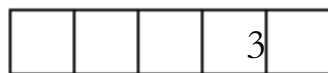
(iii) 当 2、4 与 3、5 分别同色时，将 2、4；3、5 分别合并，这样仅有三个单元格



从 4 种颜色中选 3 种来着色这三个单元格，计有 $C_4^3 A_3^3$ 种方法.

由加法原理知：不同着色方法共有 $2 A_4^4 + C_4^3 A_3^3 = 48 + 24 = 72$ (种)

练习 1 (天津卷(文)) 将 3 种作物种植



在如图的 5 块试验田里，每块种植一种作物且相邻的试验田不能种植同一作物，不同的种植方法共_____种 (以数字作答) (72)

2. (江苏、辽宁、天津卷(理)) 某城市中心广场建造一个花圃，花圃 6 分为个部分 (如图 3)，现要栽种 4 种颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种 同一样颜色的话，不同的栽种方法有_____种 (以数字作答). (120)

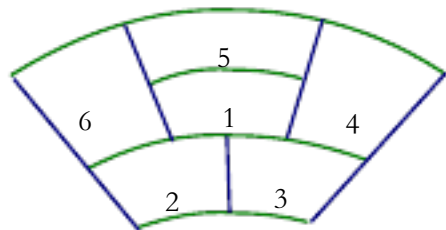


图 3

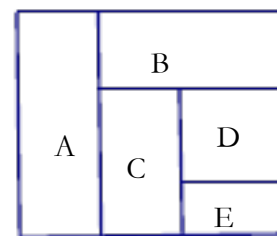


图 4

3. 如图 4，用不同的 5 种颜色分别为 ABCDE 五部分着色，相邻部分不能用同一颜色，但同一种颜色可以反复使用也可以不用，则符合这种要求的不同着色种数. (540)

4. 如图 5：四个区域坐定 4 个单位的人，有四种不同颜色的服装，每个单位的观众必须穿同种颜色的服装，且相邻两区域的颜色不同，不相邻区域颜色相同，不相邻区域颜色相同与否不受限制，那么不同的着色方法是 _____种 (84)

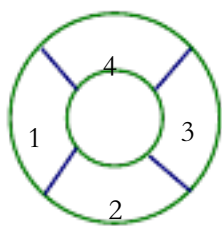


图 5

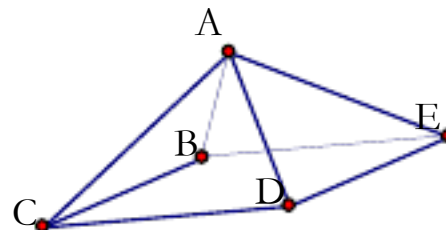


图 6

5. 将一四棱锥(图 6)的每个顶点染一种颜色，并使同一条棱的两端点异色，若只有五种颜色可供使用，则不同的染色方法共_____种 (420)

八. 递推法

例 8、 一楼梯共 10 级，如果规定每次只能跨上一级或两级，要走上这 10 级楼梯，共有多少种不同的走法？

分析：设上 n 级楼梯的走法为 a_n 种，易知 $a_1=1, a_2=2$ ，当 $n \geq 2$ 时，上 n 级楼梯的走法可分两类：第一类：是最后一步跨一级，有 a_{n-1} 种走法，第二类是最后一步跨两级，有 a_{n-2} 种走法，由加法原理知： $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

a_{n-2} , 据此, $a_3 = a_1 + a_2 = 3, a_4 = a_2 + a_3 = 5, a_5 = a_3 + a_4 = 8, a_6 = 13, a_7 = 21, a_8 = 34, a_9 = 55, a_{10} = 89$. 故走上 10 级楼梯共有 89 种不同的方法。

九. 几何问题

1. 四面体的一个顶点位 A, 从其它顶点与各棱中点取 3 个点, 使它们和点 A 在同一平面上, 不同的取法有___种 ($3C_3^3 + 3 = 33$)

2. 四面体的棱中点和顶点共 10 个点 (1) 从中任取 3 个点确定一个平面, 共能确定多少个平面?

$$(C_{10}^3 - 4C_6^3 + 4 \cdot 3C_4^3 + 3 \cdot 6C_3^3 + 6 + 2 \times 6 = 29)$$

(2) 以这 10 个点为顶点, 共能确定多少格凸棱锥? 三棱锥 $C_{10}^4 - 4C_6^4 - 6C_4^4 - 3C_3^4 = 141$ 四棱锥 $6 \times 4 \times 4 = 96$ $3 \times 6 = 18$ 共有 114

十. 先选后排法

例 9. 有甲乙丙三项任务, 甲需 2 人承担, 乙丙各需 1 人承担, 从 10 人中选派 4 人承担这三项任务, 不同的选派方法有 ()

- A. 1260 种 B. 2025 种 C. 2520 种 D. 5054 种

分析: 先从 10 人中选出 2 人

十一. 用转换法解排列组合问题

例 10. 某人连续射击 8 次有四次命中, 其中有三次连续命中, 按“中”与“不中”报告结果, 不同的结果有多少种.

解 把问题转化为四个相同的黑球与四个相同白球, 其中只有三个黑球相邻的排列问题. $A_5^2 = 20$ 种

例 11. 个人参加秋游带 10 瓶饮料, 每人至少带 1 瓶, 一共有多少种不同的带法.

解 把问题转化为 5 个相同的白球不相邻地插入已经排好的 10 个相同的黑球之间的 9 个空隙种的排列问题. $C_9^5 = 126$ 种

例 12 从 1, 2, 3, ..., 1000 个自然数中任取 10 个不连续的自然数, 有多少种不同的去法.

解 把问题转化为 10 个相同的黑球与 990 个相同白球, 其其中黑球不相邻的排列问题. C_{991}^{10}

例 13 某城市街道呈棋盘形, 南北向大街 5 条, 东西向大街 4 条, 一人欲从西南角走到东北角, 路程最短的走法有多少种.

解 无论怎样走必须经过三横四纵, 因此, 把问题转化为 3 个相同的白球与四个相同的黑球的排列问题. $C_7^3 = 35$ (种)

例 14 一个楼梯共 18 个台阶 12 步登完, 可一步登一个台阶也可一步登两个台阶, 一共有多少种不同的走法.

解 根据题意要想 12 步登完只能 6 个一步登一个台阶, 6 个一步登两个台阶, 因此, 把问题转化为 6 个相同的黑球与 6 个相同的白球的排列问题. $C_{12}^6 = 924$ (种).

例 15 求 $(a+b+c)^{10}$ 的展开式的项数.

解 展开式的项为 $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, 且 $\alpha + \beta + \gamma = 10$, 因此, 把问题转化为 2 个相同的黑球与 10 个相同的白球的排列问题. $C_{12}^2 = 66$ (种)

例 16 亚、欧乒乓球对抗赛, 各队均有 5 名队员, 按事先排好的顺序参加擂台赛, 双方先由 1 号队员比赛, 负者淘汰, 胜者再与负方 2 号队员比赛, 直到一方全被淘汰为止, 另一方获胜, 形成一种比赛

过程. 那么所有可能出现的比赛过程有多少种?

解 设亚洲队队员为 a_1, a_2, \dots, a_5 , 欧洲队队员为 b_1, b_2, \dots, b_5 , 下标表示事先排列的出场顺序, 若以依次被淘汰的队员为顺序. 比赛过程转化为这 10 个字母互相穿插的一个排列, 最后师胜队种步被淘汰的队员和可能未参加参赛的队员, 所以比赛过程可表示为 5 个相同的白球和 5 个相同黑球排列问题, 比赛过程的总数为 $C_{10}^5 = 252$ (种)

十二. 转化命题法

例17 圆周上共有 15 个不同的点, 过其中任意两点连一弦, 这些弦在圆内的交点最多有多少各?

分析: 因两弦在圆内若有一交点, 则该交点对应于一个以两弦的四端点为顶点的圆内接四边形, 则问题化为圆周上的 15 个不同的点能构成多少个圆内接四边形, 因此这些现在圆内的交点最多有 $C_{15}^4 = 1365$ (个)

十三. 概率法

例18 一天的课程表要排入语文、数学、物理、化学、英语、体育六节课, 如果数学必须排在体育之前, 那么该天的课程表有多少种排法?

分析: 在六节课的排列总数中, 体育课排在数学之前与数学课排在体育之前的概率相等, 均为 $\frac{1}{2}$, 故

本例所求的排法种数就是所有排法的 $\frac{1}{2}$, 即 $\frac{1}{2} A = 360$ 种

十四. 除序法

例 19 用 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 这七个数字组成没有重复数字的七位数中,

(1) 若偶数 2, 4, 6 次序一定, 有多少个?

(2) 若偶数 2, 4, 6 次序一定, 奇数 1, 3, 5, 7 的次序也一定的有多少个?

$$\text{解 (1) } \frac{A_7}{A_3} \quad (2) \frac{A_7}{A_3 A_4}$$

十五. 错位排列

例 20 同室四人各写一张贺卡, 先集中起来, 然后每人从中拿一张别人送出的卡片, 则不同的分配方法有___种 (9)

公式 1) $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$ $n=4$ 时 $a_4 = 3(a_3 + a_2) = 9$ 种 即三个人有两种错排, 两个人有一种错排.

$$2) a_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

练习 有五位客人参加宴会, 他们把帽子放在衣帽寄放室内, 宴会结束后每人戴了一顶帽子回家, 回家后, 他们的妻子都发现他们戴了别人的帽子, 问 5 位客人都不戴自己帽子的戴法有多少种? (44)

高考数学必胜秘诀在哪？

概念、方法、题型、易误点及应试技巧总结

十、排列、组合和二项式定理

1. 排列数 A_n^m 中 $n \geq m \geq 1, n, m \in \mathbb{N}$ 、组合数 C_n^m 中 $n \geq m, n \geq 1, m \geq 0, n, m \in \mathbb{N}$.

(1) 排列数公式

$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} (m \leq n)$; $A_n^n = n!$. 如 (1) $1! + 2! + 3! + \cdots + n!$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 的个位数字为_____ (答: 3); (2) 满足 $A_8^x = 6A_8^{x-2}$ 的 $x =$ _____ (答: 8)

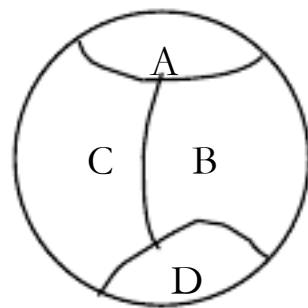
(2) 组合数公式

$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_n^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} (m \leq n)$; 规定 $0! = 1, C_n^0 = 1$. 如已知 $C_n^m = C_n^n - A_m^6$, 求 n, m 的值 (答: $m=n=2$)

(3) 排列数、组合数的性质: ① $C_n^m = C_n^{n-m}$; ② $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$; ③ $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$;

④ $C_r^r + C_r^{r-1} + C_r^{r-2} + \cdots + C_r^1 + C_r^0 = 2^r$; ⑤ $n \cdot n! = (n+1)! - n!$; ⑥ $\frac{n}{(n-1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}$.

2. 解排列组合问题的依据是: **分类相加** (每类方法都能独立地完成这件事, 它是相互独立的, 一次的且每次得出的是最后的结果, 只需一种方法就能完成这件事), **分步相乘** (一步得出的结果都不是最后的结果, 任何一步都不能独立地完成这件事, 只有各个步骤都完成了, 才能完成这件事, 各步是关联的), **有序排列, 无序组合**. 如 (1) 将 5 封信投入 3 个邮筒, 不同的投法共有_____种 (答: 3^5); (2) 从 4 台甲型和 5 台乙型电视机中任意取出 3 台, 其中至少要甲型与乙型电视机各一台, 则不同的取法共有_____种 (答: 70); (3) 从集合 $\{1, 2, 3\}$ 和 $\{1, 4, 5, 6\}$ 中各取一个元素作为点的坐标, 则在直角坐标系中能确定不同点的个数是_____ (答: 23); (4) 72 的正约数 (包括 1 和 72) 共有_____个 (答: 12); (5) $\triangle ABC$ 的一边 AB 上有 4 个点, 另一边 AC 上有 5 个点, 连同 $\triangle ABC$ 的顶点共 10 个点, 以这些点为顶点, 可以构成_____个三角形 (答: 90); (6) 用六种不同颜色把右图中 A、B、C、D 四块区域分开, 允许同一颜色涂不同区域, 但相邻区域不能是同一种颜色, 则共有_____种不同涂法 (答: 480); (7) 同室 4 人各写 1 张贺年卡, 然后每人从中拿 1 张别人送出的贺年卡, 则不同的分配方式有_____种 (答: 9); (8) f 是集合 $M = \{a, b, c\}$ 到 $N = \{1, 2, 3, 4\}$ 的映射, 且 $f(a) = f(b) = 1, f(c) = 2$, 则不同的映射共有_____个 (答: 7); (9) 满足 $A \cap B \cap C = \emptyset$ 的集合 A、B、C 共有_____组 (答: 74)



3. 解排列组合问题的方法有:

(1) **特殊元素、特殊位置优先法 (元素优先法: 先考虑有限制条件的元素的要求, 再考虑其他元素; 位置优先法: 先考虑有限制条件的位置的要求, 再考虑其他位置)**. 如 (1) 某单位准备用不同花色的装饰石材分别装饰办公楼中的办公室、走廊、大厅的地面及楼的外墙, 现有编号为 1 到 6 的 6 种不同花色的石材可选择, 其中 1 号石材有微量的放射性, 不可用于办公室内, 则不同的装饰效果有_____种 (答: 300); (2) 某银行储蓄卡的密码是一个 4 位数码, 某人采用千位、百位上的数字之积作为十位个位上的数字 (如 2816) 的方法设计密码, 当积为一位数时, 十位上数字选 0. 千位、百位上都能取 0. 这样设计出来的密码共有_____种 (答: 100); (3) 用 0, 1, 2, 3, 4, 5 这六个数字, 可以组成无重复数字的四位偶数_____个 (答: 156); (4) 某班上午要上语、数、外和体育 4 门课, 如体育不排在第一、四节; 语文不排在第一、二节, 则不同排课方案种数为_____ (答: 6); (5) 四个不同的小球全部放入编号为 1、2、3、4 的四个盒中. ①恰有两个空盒的放法有_____种; ②甲球只能放入第 2 或 3 号盒, 而乙球不能放入第 4 号盒的不同放法有_____种 (答: 84; 96); (6) 设有编号为 1、2、3、4、5 的五个茶杯和编号为 1、2、3、4、5 的 5 个杯盖, 将五个杯盖盖在五个茶杯上, 至少有两个杯盖和茶杯的编号相同的盖法有_____种 (答: 31)

(2) **间接法** (对有限制条件的问题, 先从总体考虑, 再把不符合条件的所有情况去掉). 如在平面

直角坐标系中,由六个点(0,0), (1,2), (2,4), (6,3), (-1,-2), (-2,-1)可以确定三角形的个数为_____ (答: 15)。

(3) **相邻问题捆绑法** (把相邻的若干个特殊元素“捆绑”为一个元素,然后再与其余“普通元素”全排列,最后再“松绑”,将特殊元素在这些位置上全排列)。如(1)把4名男生和4名女生排成一排,女生要排在一起,不同的排法种数为_____ (答: 2880); (2)某人射击8枪,命中4枪,4枪命中中恰好有3枪连在一起的情况的不同种数为_____ (答: 20); (3)把一同排6张座位编号为1, 2, 3, 4, 5, 6的电影票全部分给4个人,每人至少分1张,至多分2张,且这两张票具有连续的编号,那么不同的分法种数是_____ (答: 144)

(4) **不相邻(相间)问题插空法** (某些元素不能相邻或某些元素要在某特殊位置时可采用插空法,即先安排好没有限制条件的元素,然后再把有限制条件的元素按要求插入排好的元素之间)。如(1)3人坐在一排八个座位上,若每人的左右两边都有空位,则不同的坐法种数有_____种 (答: 24); (2)某班新年联欢晚会原定的5个节目已排成节目单,开演前又增加了两个新节目。如果将这两个节目插入原节目单中,那么不同的插法种数为_____ (答: 42)。

(5) **多排问题单排法**。如若 $2n$ 个学生排成一排的排法数为 x ,这 $2n$ 个学生排成前后两排,每排各 n 个学生的排法数为 y ,则 x,y 的大小关系为_____ (答: 相等);

(6) **多元问题分类法**。如(1)某化工厂实验生产中需依次投入2种化工原料,现有5种原料可用,但甲、乙两种原料不能同时使用,且依次投料时,若使用甲原料,则甲必须先投放。那么不同的实验方案共有_____种 (答: 15); (2)某公司新招聘进8名员工,平均分给下属的甲、乙两个部门,其中两名英语翻译人员不能同给一个部门;另三名电脑编程人员也不能同给一个部门,则不同的分配方案有_____种 (答: 36); (3)9名翻译中,6个懂英语,4个懂日语,从中选拔5人参加外事活动,要求其中3人担任英语翻译,选拔的方法有_____种 (答: 90);

(7) **有序问题组合法**。如(1)书架上有3本不同的书,如果保持这些书的相对顺序不便,再放上2本不同的书,有_____种不同的放法 (答: 20); (2)百米决赛有6名运动A、B、C、D、E、F参赛,每个运动员的速度都不同,则运动员A比运动员F先到终点的比赛结果共有_____种 (答: 360); (3)学号为1, 2, 3, 4的四名学生的考试成绩 $x_i \in \{89, 90, 91, 92, 93\} (i = 1, 2, 3, 4)$ 且满足 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$,则这四位同学考试成绩的所有可能情况有_____种 (答: 15); (4)设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,对任意 $x \in A$,有 $f(1) < f(2) < f(3)$,则映射 $f: A \rightarrow A$ 的个数是_____ (答: $C_3^8 8^5$); (5)如果一个三位正整数形如“ $a_1 a_2 a_3$ ”满足 $a_1 < a_2$ 且 $a_2 < a_3$,则称这样的三位数为凸数(如120、363、374等),那么所有凸数个数为_____ (答: 240); (6)离心率等于 $\log_p q$ (其中 $1 < p < 9, 1 < q < 9$ 且 $p, q \in \mathbb{N}^*$)的不同形状的双曲线的个数为_____ (答: 26)。

(8) **选取问题先选后排法**。如某种产品有4只次品和6只正品,每只产品均不相同且可区分,今每次取出一只测试,直到4只次品全测出为止,则最后一只次品恰好在第五次测试时,被发现的不同情况种数是_____ (答: 576)。

(9) **至多至少问题间接法**。如从7名男同学和5名女同学中选出5人,至少有2名女同学当选的选法有_____种 (答: 596)

(10) **相同元素分组可采用隔板法**。如(1)10个相同的球各分给3个人,每人至少一个,有多少种分发?每人至少两个呢? (答: 36; 15); (2)某运输公司有7个车队,每个车队的车都多于4辆且型号相同,要从这7个车队中抽出10辆车组成一运输车队,每个车队至少抽1辆车,则不同的抽法有多少种? (答: 84)

4、分组问题: 要注意区分是平均分组还是非平均分组,平均分成 n 组问题别忘除以 $n!$ 。如4名医生和6名护士组成一个医疗小组,若把他们分配到4所学校去为学生体检,每所学校需要一名医生和至少一名护士的不同选派方法有_____种 (答: 37440);

5. 二项式定理: $(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + C_n^n b^n$, 其中组合数 C_n^r 叫做第 $r+1$ 项的二项式系数; 展开式共有 $n+1$ 项, 其中第 $r+1$ 项 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r (r = 0, 1, 2, \dots, n)$ 称为二项展开式的通项, 二项展开式通项的主要用途是求指定的项. **特别提醒**: (1)项的系数与二项式系数是不同的两个概念, 但当二项式的两个项的系数都为1时, 系数就是二项式系数。如在 $(ax + b)^n$ 的

展开式中，第 $r + 1$ 项的二项式系数为 C_n^r ，第 $r + 1$ 项的系数为 $C_n^r a^{n-r} b^r$ ；而 $(x + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中的系数就是二项式系数；(2) 当 n 的数值不大时往往借助杨辉三角直接写出各项的二项式系数；(3) 审题时要注意区分所求的是项还是第几项？求的是系数还是二项式系数？如 (1) $(2x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}})^7$ 的展开式中常数项是 _____ (答: 14)；(2) $(x^2 + \frac{1}{x})^{10}$ 的展开式中的 x^3 的系数为 _____ (答: 330)；(3) 数 $11^{100} - 1$ 的末尾连续出现零的个数是 _____ (答: 3)；(4) $(\sqrt{7}x + \sqrt{2})^{40}$ 展开后所得的 x 的多项式中，系数为有理数的项共有 _____ 项 (答: 7)；(5) 若 $1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6$ ($x \in \mathbb{N}$ 且 $x \geq 2$) 的值能被 5 整除，则 x 的可取值的个数有 _____ 个 (答: 5)；(6) 若 $xy \neq 0$ ，且 $x + y = 1$ ，二项式 $(x + y)^9$ 按 x 降幂展开后，其第二项不大于第三项，则 x 的取值范围是 _____ (答: $(\frac{1}{2}, 1)$)；(7) 函数 $f(x) = (1 + \sin x)^{10} (1 + \cos x)^{10}$ 的最大值是 _____ (答: 1024)。

6、二项式系数的性质：

(1) **对称性**：与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等，即 $C_n^m = C_n^{n-m}$ ；
 (2) **增减性与最大值**：当 $r < \frac{n-1}{2}$ 时，二项式系数 C_n^r 的值逐渐增大，当 $r > \frac{n-1}{2}$ 时， C_n^r 的值逐渐减小，且在中间取得最大值。当 n 为偶数时，中间一项（第 $\frac{n}{2} + 1$ 项）的二项式系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 取得最大值。当 n 为奇数时，中间两项（第 $\frac{n-1}{2}$ 和 $\frac{n-1}{2} + 1$ 项）的二项式系数 $C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n-1}{2} + 1}$ 相等并同时取最大值。如 (1) 在二项式 $(x - 1)^{11}$ 的展开式中，系数最小的项的系数为 _____ (答: -426)；(2) 在 $(1 - x)^n$ 的展开式中，第十项是二项式系数最大的项，则 $n =$ _____ (答: 17, 18 或 19)。

(3) **二项式系数的和**： $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ ； $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n = 2^{n-1}$ 。如 (1) 如果 $1 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^nC_n^n = 2187$ ，则 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n =$ _____ (答: 128)；(2) 化简 $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n =$ (答: $(n+2) \cdot 2^{n-1}$)

7、**赋值法**：应用“赋值法”可求得二项展开式中各项系数和为 $f(1)$ 、“奇数（偶次）项”系数和为 $\frac{1}{2}[f(1) + f(-1)]$ ，以及“偶数（奇次）项”系数和为 $\frac{1}{2}[f(1) - f(-1)]$ 。如 (1) 已知 $(1 + x^9)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_9x^9 + \dots + a_{9n}x^{9n}$ ，则 $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{9n}|$ 等于 _____ (答: 4^n)；(2) $(1 + x)^{2004} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2004}x^{2004}$ ，则 $(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2004}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2003}) =$ _____ (答: 2004)；(3) 设 $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$ ，则 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} =$ _____ (答: $\frac{3^{n+1} - 1}{2}$)。

8、**系数最大项的求法**：设第 r 项的系数 A_r 最大，由不等式组 $\begin{cases} A_r \geq A_{r-1} \\ A_r \geq A_{r+1} \end{cases}$ 确定 r 。如求 $(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x})^{10}$ 的展开式中，系数的绝对值最大的项和系数最大的项。(答: 系数绝对值最大的项为 $15x^2$ ，系数最大的项为 $\frac{105}{8}x^3$)

9、**二项式定理的应用**：二项式定理的主要应用有近似计算、证明整除性问题或求余数、应用其首尾几项进行放缩证明不等式。如 (1) $(0.998)^5$ 精确到 0.001 近似值为 _____ (答: 0.990)；(2) $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{99}$ 被 4 除所得的余数为 _____ (答: 0)；(3) 今天是星期一， 100^{45} 天后是星期 _____ (答: 二)；(4) 求证: $3^{2n-2} - 8n - 9$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 能被 64 整除；(5) 求证: $3^n - (n-2)2^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, 且 $n \geq 2$)

排列组合问题之 插板法应用不完全小结

插板法就是在 n 个元素间的 $(n-1)$ 个空中插入 若干个 (b) 个板, 可以把 n 个元素分成 $(b+1)$ 组的方法。

应用插板法必须满足三个条件:

- (1) 这 n 个元素必须互不相异
- (2) 所分成的每一组至少分得一个元素
- (3) 分成的组别彼此相异

举个很普通的例子来说明

把 10 个相同的小球放入 3 个不同的箱子, 每个箱子至少一个, 问有几种情况?

问题的题干满足条件 (1) (2), 适用插板法, $C_{9}^{2} = 36$.

下面通过几道题目介绍下插板法的应用

=====

a 凑元素插板法 (有些题目满足条件 (1), 不满足条件 (2), 此时可适用此方法)

例 1 : 把 10 个相同的小球放入 3 个不同的箱子, 问有几种情况?

3 个箱子都可能取到空球, 条件 (2) 不满足, 此时如果在 3 个箱子种各预先放入

1 个小球, 则问题就等价于把 13 个相同小球放入 3 个不同箱子, 每个箱子至少一个, 有几种情况?

显然就是 $C_{12}^{2} = 66$.

例 2: 把 10 个相同小球放入 3 个不同箱子, 第一个箱子至少 1 个, 第二个箱子至少 3 个, 第三个箱子可以放空球, 有几种情况?

我们可以在第二个箱子先放入 10 个小球中的 2 个, 小球剩 8 个放 3 个箱子, 然后在第三个箱子放入 8 个小球之外的 1 个小球, 则问题转化为 把 9 个相同小球放 3 不同箱子, 每箱至少 1 个, 几种方法? $C_{8}^{2} = 28$

=====

b 添板插板法

例 3: 把 10 个相同小球放入 3 个不同的箱子, 问有几种情况?

-o - o - o - o - o - o - o - o - o - o - o 表示 10 个小球, -表示空位

11 个空位中取 2 个加入 2 块板, 第一组和第三组可以取到空的情况, 第 2 组始终不能取空

此时 若在 第 11 个空位后加入第 12 块板, 设取到该板时, 第二组取球为空

则每一组都可能取球为空: $C_8^2 = 28$

例 4: 有一类自然数, 从第三个数字开始, 每个数字都恰好是它前面两个数字之和, 直至不能再写为止, 如 257, 1459 等等, 这类数共有几个?

因为前 2 位数字唯一对应了符合要求的一个数, 只要求出前 2 位有几种情况即可, 设前两位为 ab

显然 $a+b \leq 9$, 且 a 不为 0

1 -1- 1 -1 -1 -1 -1 -1 - - - 1 代表 9 个 1, -代表 10 个空位

我们可以在这 9 个空位中插入 2 个板, 分成 3 组, 第一组取到 a 个 1, 第二组取到 b 个 1, 但此时第二组始终不能取空, 若多添加第 10 个空时, 设取到该板时第二组取空, 即 $b=0$, 所以一共有 $C_{10}^2 = 45$

例 5: 有一类自然数, 从第四个数字开始, 每个数字都恰好是它前面三个数字之和, 直至不能再写为止, 如 2349, 1427 等等, 这类数共有几个?

类似的, 某数的前三位为 abc, $a+b+c \leq 9$, a 不为 0

1 -1- 1 -1 -1 -1 -1 -1 - - -

在 9 个空位种插如 3 板, 分成 4 组, 第一组取 a 个 1, 第二组取 b 个 1, 第三组取 c 个 1, 由于第二, 第三组都不能取到空, 所以添加 2 块板

设取到第 10 个板时, 第二组取空, 即 $b=0$; 取到第 11 个板时, 第三组取空, 即 $c=0$ 。所以一共有 $C_{11}^3 = 165$

c 选板法

例 6: 有 10 粒糖, 如果每天至少吃一粒 (多不限), 吃完为止, 求有多少种不同吃法?

o - o - o - o - o - o - o - o - o - o - o o 代表 10 个糖, -代表 9 块板

10 块糖, 9 个空, 插入 9 块板, 每个板都可以选择放或是不放, 相邻两个板间的糖一天吃掉 这样一共就是 $2^9 = 512$

d 分类插板

例 7: 小梅有 15 块糖, 如果每天至少吃 3 块, 吃完为止, 那么共有多少种不同的吃法?

此问题不能用插板法的原因在于没有规定一定要吃几天, 因此我们需要对吃的天数进行分类讨论

最多吃 5 天，最少吃 1 天

1: 吃 1 天或是 5 天，各一种吃法 一共 2 种情况

2: 吃 2 天，每天预先吃 2 块，即问 11 块糖，每天至少吃 1 块，吃 2 天，几种情况? $C_{10}^1 = 10$

3: 吃 3 天，每天预先吃 2 块，即问 9 块糖，每天至少 1 块，吃 3 天? $C_8^2 = 28$

4: 吃 4 天，每天预先吃 2 块，即问 7 块糖，每天至少 1 块，吃 4 天? $C_6^3 = 20$

所以一共是 $2+10+28+20=60$ 种

=====

e 二次插板法

例 8 : 在一张节目单中原有 6 个节目，若保持这些节目相对次序不变，再添加 3 个节目，共有几种情况?

-o - o - o - o - o - o - 三个节目 abc

可以用一个节目去插 7 个空位，再用第二个节目去插 8 个空位，用最后个节目去插 9 个空位

所以一共是 $C_7^1 C_8^1 C_9^1 = 504$ 种.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/415143022342011120>