

专题 24 最值模型之将军饮马模型

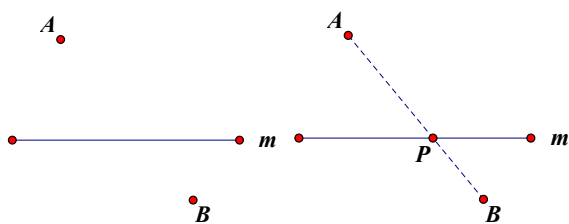
“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河”，这是唐代诗人李颀《古从军行》里的一句诗，由此却引申出一系列非常有趣的数学问题，通常称为“将军饮马”。将军饮马问题从本质上看是由轴对称衍生而来，同时还需掌握平移型将军饮马，主要考查转化与化归等的数学思想。在各类考试中都以中高档题为主，本专题就将军饮马问题进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

在解决将军饮马模型主要依据是：两点之间，线段最短；垂线段最短；涉及的基本方法有：利用轴对称变换化归到“三角形两边之和大于第三边”、“三角形两边之差小于第三边”等。

模型 1. 求两条线段和的最小值（将军饮马模型）

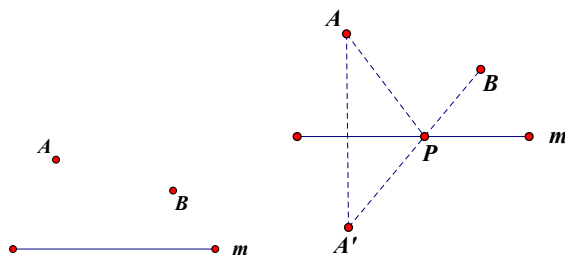
【模型解读】在一条直线 m 上，求一点 P ，使 $PA+PB$ 最小；

(1) 点 A 、 B 在直线 m 两侧：



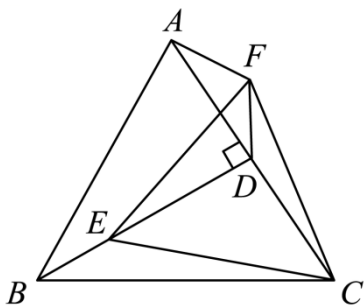
【最值原理】两点之间线段最短。

(2) 点 A 、 B 在直线同侧：



上图中 A' 是 A 关于直线 m 的对称点。

例 1. (2024·黑龙江绥化·统考中考真题) 如图， $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形，点 E 为高 BD 上的动点，连接 CE ，将 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 CF ，连接 AF ， EF ， DF ，则 $\triangle CDF$ 周长的最小值是_____。



【答案】 $3+3\sqrt{3}/3\sqrt{3}+3$

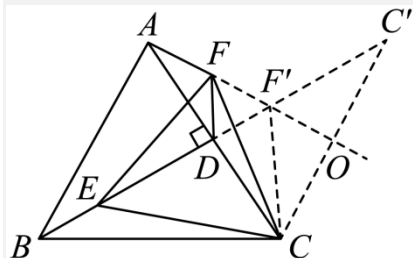
【分析】根据题意，证明 $\triangle CBE \cong \triangle CAF$ ，进而得出 F 点在射线 AF 上运动，作点 C 关于 AF 的对称点 C' ，连接 DC' ，设 CC' 交 AF 于点 O ，则 $\angle AOC = 90^\circ$ ，则当 D, F, C' 三点共线时， $FC + FD$ 取得最小值，即 $FC + FD = F'C' + F'D = CD'$ ，进而求得 $C'D$ ，即可求解。

【详解】解：∵ E 为高 BD 上的动点，∴ $\angle CBE = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$

∴将 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 CF . $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形,

∴ $CE = CF, \angle ECF = \angle BCA = 60^\circ, BC = AC \therefore \triangle CBE \cong \triangle CAF$

∴ $\angle CAF = \angle CBE = 30^\circ$, ∴ F 点在射线 AF 上运动, 如图所示,



作点 C 关于 AF 的对称点 C' , 连接 DC' , 设 CC' 交 AF 于点 O , 则 $\angle AOC = 90^\circ$

在 $Rt\triangle AOC$ 中, $\angle CAO = 30^\circ$, 则 $CO = \frac{1}{2}AC = 3$,

则当 D, F, C' 三点共线时, $FC + FD$ 取得最小值, 即 $FC + FD = F'C' + F'D = DC'$

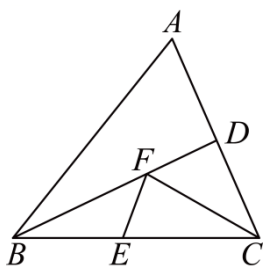
∴ $CC' = AC = 6$, $\angle ACO = \angle C'CD$, $CO = CD \therefore \triangle ACO \cong \triangle C'CD \therefore \angle C'DC = \angle AOC = 90^\circ$

在 $\triangle C'DC$ 中, $C'D = \sqrt{CC'^2 - CD^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$,

∴ $\triangle CDF$ 周长的最小值为 $CD + FC + CD = CD + DC' = 3 + 3\sqrt{3}$, 故答案为: $3 + 3\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了轴对称求线段和的最值问题, 等边三角形的性质与判定, 全等三角形的性质与判定, 勾股定理, 熟练掌握等边三角形的性质与判定以及轴对称的性质是解题的关键.

例 2. (2024·广东广州·校考一模) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{10}$, $AB = 2\sqrt{2}$, BD 平分 $\angle ABC$, E, F 分别为 BC, BD 上的动点, 则 $CF + EF$ 的最小值是 ()



A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

【答案】D

【分析】本题考查的是角平分线的性质, 垂线段最短, 解答此类问题时要从已知条件结合图形认真思考, 通过角平分线性质的垂线段最短, 确定线段和的最小值. 过点 C 作 $CH \perp AB$, 垂足为 H , 交 BD 于 F 点, 过 F 点作 $FE' \perp BC$, 垂足为 E' , 则 $CF + E'F$ 为所求的最小值, 根据 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{10}$, $AB = 2\sqrt{2}$, 结合三角形的面积公式求出 $CH = \sqrt{5}$, 即可解答.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/416020212230010130>