专题 06 三角恒等变换与解三角形

目录

明晰学考要求 01

1、了解两角和与差的余弦、正弦、正切公式的推导过程；

2、能利用两角差与和的余弦、正弦、正切公式进行求值、计算；

3、能利用余弦、正弦、正切的二倍角公式求值、计算；

4、了解正弦定理，能利用正弦定理解三角形；

5、了解余弦定理，能利用余弦定理解三角形；

6、能利用正弦定理、余弦定理解决简单的实际问题.

基础知识梳理 02

1、两角和与差的余弦、正弦、正切公式

（1）两角和与差的余弦公式：

简记	公式
$C_{(\alpha+\beta)}$	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；
$C_{(\alpha-\beta)}$	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

（2）两角和与差的正弦公式

简记	公式
$S_{(\alpha+\beta)}$	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$S_{(\alpha-\beta)}$	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

（3）两角和与差的正切公式

简记符号	公式	使用条件
$T_{(\alpha+\beta)}$	$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$	α，β，$\alpha+\beta$ 均不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$
$T_{(\alpha-\beta)}$	$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$	α，β，$\alpha-\beta$ 均不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$

2、二倍角公式

（1）二倍角的正弦、余弦、正切公式

记法	公式
$S_{2\alpha}$	$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$C_{2\alpha}$	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
$T_{2\alpha}$	$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

（2）注意余弦的二倍角公式的逆用：$1-2\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$，$2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$，$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$； $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$ 等.

3、辅助角公式

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$.其中 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$，φ 所在象限由 a 和 b 的符号确定.

4、正弦定理

（1）正弦定理：三角形的各边与它所对角的正弦的比相等，即在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，则$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$($R$ 为△ABC 的外接圆的半径).（2）

正弦定理变形：$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；

$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$.

5、余弦定理

（1）余弦定理：三角形中任何一边的平方，等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍，

即在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，

则 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

（2）推论：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

考点精讲精练 03

考点一：利用三角恒等变换公式求值

【典型例题】

例题 1．（2024 高二上·江苏扬州·学业考试）化简 $\cos 43°\cos 13°+\sin 43°\sin 13°$，得（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\cos 56°$

【答案】C

【分析】逆用余弦函数的和差公式即可得解.

【详解】$\cos 43°\cos 13°+\sin 43°\sin 13°=\cos(43°-13°)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：C.

例题 2．（2023 高三上·江苏徐州·学业考试）已知 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$，则 $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=$（　）

A．$\frac{7}{8}$　　B．$-\frac{7}{8}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$-\frac{1}{2}$

【答案】B【分析】用二倍角公式即可求解.

【详解】$\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\left[\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]^2-1=-\frac{7}{8}$，

故选：B

例题 3．（2023 高三·江苏·学业考试）在$\triangle ABC$中，已知$\cos 2A=-\frac{3}{5}$，则$\sin A=$（　）

A．$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】D

【分析】确定$\sin A>0$，再利用二倍角公式计算得到答案.

【详解】$A\in(0,\pi)$，$\sin A>0$，$\cos 2A=1-2\sin^2 A=-\frac{3}{5}$，解得$\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选：D

例题 4．（2024 高三上·江苏南京·学业考试）“$\tan^2\alpha=\frac{1}{4}$”是“$\frac{\tan 3\alpha}{\tan\alpha}=11$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】C

【分析】化简$\frac{\tan 3\alpha}{\tan\alpha}=11$得$\tan^2\alpha=\frac{1}{4}$,再根据充分、必要条件的知识判断即可.

【详解】因为$\tan 3\alpha=\tan(2\alpha+\alpha)=\frac{\tan 2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan 2\alpha\tan\alpha}=\frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\tan\alpha}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$,

所以$\frac{\tan 3\alpha}{\tan\alpha}=\frac{3-\tan^2\alpha}{1-3\tan^2\alpha}=11$，

解得$\tan^2\alpha=\frac{1}{4}$.

所以“$\tan^2\alpha=\frac{1}{4}$”是“$\frac{\tan 3\alpha}{\tan\alpha}=11$”的充要条件.

故选：C.

【即时演练】

1．$\sin 30°\cos 60°+\cos 30°\sin 60°=$（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．1　　D．2

【答案】C【分析】根据两角和的正弦公式求得正确答案.

【详解】$\sin 30°\cos 60°+\cos 30°\sin 60°=\sin(30°+60°)=\sin 90°=1$.

故选：C

2. $\dfrac{\tan 15°+\tan 45°}{1-\tan 15°\tan 45°}$的值是（　）

A．$-\sqrt{3}$　　B．$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

【答案】D

【分析】利用正切的和角公式，计算即可.

【详解】$\dfrac{\tan 15°+\tan 45°}{1-\tan 15°\tan 45°}=\tan\left(15°+45°\right)=\tan 60°=\sqrt{3}$.

故选：D

3．（2024江苏省扬州市学业水平考试模拟）已知$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\cos\left(\pi+\alpha\right)$，且$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\dfrac{1}{3}$，则$\tan\beta$的值为（　）

A．-7　　B．7　　C．1　　D．-1

【答案】B

【分析】由了诱导公式得$\sin\alpha=-2\cos\alpha$，由同角三角函数的关系可得$\tan\alpha=-2$，

再由两角和的正切公式$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，将$\tan\alpha=-2$代入运算即可.

【详解】解：因为$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\cos\left(\pi+\alpha\right)$，

所以$\sin\alpha=-2\cos\alpha$，即$\tan\alpha=-2$，

又$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\dfrac{1}{3}$，

则$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{1}{3}$，

解得$\tan\beta=7$，

故选B.

【点睛】本题考查了诱导公式及两角和的正切公式，重点考查了运算能力，属中档题.

4. 已知角α是第一象限角，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，则$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=$（　）

A．$\dfrac{3}{10}$　　B．$\dfrac{3-4\sqrt{3}}{10}$

C．$\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$　D．$\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$【答案】B

【分析】

根据同角三角函数基本关系及两角和余弦公式求解即可.

【详解】因为角α是第一象限角，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，

所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{5}$，

所以$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

故选：B

考点二：三角恒等变换与三角函数综合

【典型例题】

例题 1．（2024·江苏省扬州市学业水平考试模拟）函数$y=1-2\sin^2x$的最小正周期为（　）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．π　　C．2π　　D．4π

【答案】B

【分析】化简函数的解析式，利用余弦型函数的周期公式可求得原函数的最小正周期.

【详解】因为$y=1-2\sin^2x=\cos 2x$，

所以该函数的最小正周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

故选：B.

例题 2．函数$f(x)=2\cos x(\sin x+\cos x)$的最大值是（　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{2}+1$　　D．$2\sqrt{2}$

【答案】C

【分析】利用倍角公式和辅助角公式化简，结合三角函数性质作答即可.

【详解】$f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2x=\sin 2x+\cos 2x+1=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$，

所以当$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1$，即$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，即$x=\frac{\pi}{8}+k\pi$，$k\in Z$时，

$f(x)$取得最大值$\sqrt{2}+1$.

故选：C.例题 3．（2023 高三上·江苏徐州·学业考试）已知函数$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+2a\sin x+\frac{1}{2}$的最大值为 4，则正实数$a$的值为（　）

A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．-2 或 2　　D．2 或$\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】利用三角恒等变换的知识化简 $f(x)$，根据二次函数的性质求得正数 a 的值.

【详解】 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+2a\sin x+\frac{1}{2}$

$=\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)+2a\sin x+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)+2a\sin x+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+2a\sin x+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\sin^2 x-\sin^2 x\right)+2a\sin x+\frac{1}{2}$

$=-\sin^2 x+2a\sin x+1$.

令 $t=\sin x, t\in[-1,1]$，则 $y=-t^2+2at+1$， $t\in[-1,1]$，

开口向下，对称轴为 $x=a$，

当 $0<a\le 1$ 时，则 $y_{\max}=-a^2+2a\times a+1=a^2+1=4, a^2=3$， 无解.

当 $a>1$ 时，则 $y_{\max}=-1^2+2a\times 1+1=2a=4, a=2$.

综上所述， a 的值为 2.

故选：B.

【即时演练】

1． 函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$， $x\in\mathbf{R}$ 的最大值为（　）

A．1　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．2

【答案】D

【分析】利用辅助角公式化简函数为 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，根据正弦型函数的最值可求得结果.

【详解】Q $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$， 当 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$， 即 $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$ 时，

$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 取得最大值 2 .故选：D.

2．若函数 $f(x)=A\cos x-\sin x(A>0)$ 的最大值为 2，则 $A=$______， $f(x)$ 的一个对称中心为______

【答案】　$\sqrt{3}$　　$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$（答案不唯一）

【分析】根据辅助角公式对函数 $f(x)$ 进行化简，再根据最大值求出 A

，最后利用余弦型函数求出对称中心.

【详解】由 $f(x)=A\cos x-\sin x=\sqrt{A^2+1}\cos\left(x+\varphi\right)$，其中 $\tan\varphi=\frac{1}{A}$，

又函数 $f\left(x\right)$ 的最大值为 2，则 $\sqrt{A^2+1}=2$，

又 $A>0$，则 $A=\sqrt{3}$，$\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$，不妨取 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

故 $f\left(x\right)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

则 $f\left(x\right)$ 的对称中心满足 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $f\left(x\right)$ 的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{3}+k\pi,0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，

则 $f\left(x\right)$ 的一个对称中心可为：$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，

故答案为：$\sqrt{3}$，$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$（答案不唯一）

3．已知函数 $f(x)=2\cos^2 x-1$.

(1)求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值；

(2)设 $g(x)=f(x)+\sqrt{3}\sin 2x$，求 $g(x)$ 的单调递增区间.

【答案】(1)$\frac{1}{2}$

(2)$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]\left(k\in\mathrm{Z}\right)$

【分析】（1）先利用余弦的倍角公式化简 $f(x)$，再直接代入自变量即可得解；

（2）利用辅助角公式化简 $g(x)$，再利用整体代入法，结合正弦函数的单调性即可得解.

【详解】（1）因为 $f(x)=2\cos^2 x-1=\cos 2x$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.（2）因为 $g(x)=f(x)+\sqrt{3}\sin 2x=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6}\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，

所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]\left(k\in\mathrm{Z}\right)$.

考点三：利用正余弦定理解三角形

【典型例题】

例题 1．（2023 高三上·江苏徐州·学业考试）在$\triangle ABC$中，边长$|BC|=10, A=60°, B=45°$，则边长$|AC|=$（　）

A．$20\sqrt{2}$　　B．$\frac{10\sqrt{6}}{3}$　　C．$10\sqrt{2}$　　D．$\frac{5\sqrt{6}}{3}$

【答案】B

【分析】用正弦定理即可求解.

【详解】由正弦定理得$\frac{\sin A}{|BC|}=\frac{\sin B}{|AC|}$即$\frac{\sqrt{3}}{20}=\frac{\sqrt{2}}{2|AC|}$，解得$|AC|=\frac{10\sqrt{6}}{3}$，

故选：B.

例题 2．（2023·江苏徐州·学业考试）在$\triangle ABC$中，若$\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$，则$C=$（　）

A．$30°$　　B．$60°$　　C．$120°$　　D．$150°$

【答案】C

【分析】由正弦定理化角为边，然后由余弦定理计算$\cos C$即可得C角.

【详解】∵$\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$，由正弦定理得$a:b:c=3:5:7$，

设$a=3k,b=5k,c=7k(k>0)$，

则$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{9k^2+25k^2-49k^2}{2\times 3k\times 5k}=-\frac{1}{2}$，又$C$是三角形内角，

∴$C=120°$.

故选：C.

【点睛】本题考查正弦定理、余弦定理，解题是用正弦定理化角为边．属于基础题．

例题 3．（2024 高三上·江苏南京·学业考试）在$\triangle ABC$中，$A<B<C$且$\tan A,\tan B,\tan C$均为整数，D为AC中点，则$\frac{BC}{BD}$的值为（　）A．$\frac{1}{2}$　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　D．1

【答案】D

【分析】根据给定条件，确定角 A 的大小，再利用和角的正切及整数条件求出$\tan B,\tan C$，然后利用同角公式、正弦定理及向量数量积的运算律求解即得.

【详解】在$\triangle ABC$中，由$A<B<C$，得$3A<A+B+C=180°$，即$0°<A<60°$，

则$0<\tan A<\sqrt{3}$，由$\tan A$为整数，得$\tan A=1$，$A=45°, B+C=135°$，

$\tan(B+C)=\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-1$，整理得$(\tan B-1)(\tan C-1)=2$，

而$1<\tan B<\tan C$，且$\tan B,\tan C$均为整数，则$\tan B=2,\tan C=3$，

由$\begin{cases}\sin B=2\cos B\\ \sin^2 B+\cos^2 B=1\end{cases}$，解得$\sin B=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\cos B=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

由$\begin{cases}\sin C=3\cos C\\ \sin^2 C+\cos^2 C=1\end{cases}$，解得$\sin C=\dfrac{3}{\sqrt{10}},\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，

由正弦定理得$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=\sqrt{2}a$，则$b=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}a,c=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}a$，

由D为AC中点，得$\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，则$|\overrightarrow{BD}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2+2ac\cos B}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{9}{5}a^2+a^2+2\cdot\dfrac{3\sqrt{5}}{5}a\cdot a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}}=a$，

所以$\dfrac{BC}{BD}=1$.

故选：D

【点睛】关键点点睛：解决本问题的关键是求出$\tan B,\tan C$的值，再转化为解三角形问题.

例题4．（2024·江苏省扬州市学业水平考试模拟）ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a,b,c，已知$\left(a+2c\right)\cos B+b\cos A=0$.

（1）求B；

（2）若$b=3,\Delta ABC$的周长为$3+2\sqrt{3}$，求ΔABC的面积.

【答案】（1）$B=\dfrac{2}{3}\pi$ (2) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

【分析】（1）直接利用正弦定理和三角函数关系式的恒等变换，求出B的值；

（2）利用余弦定理和三角形的面积公式求出结果.【详解】（1）Q$\left(a+2c\right)\cos B+b\cos A=0$,

$\therefore\left(\sin A+2\sin C\right)\cos B+\sin B\cos A=0$,

$\left(\sin A\cos B+\sin B\cos A\right)+2\sin C\cos B=0$,

$\sin\left(A+B\right)+2\cos B\sin C=0$,

Q$\sin\left(A+B\right)=\sin C$.

$\therefore\cos B=-\dfrac{1}{2}$,

Q$0<B<\pi,\therefore B=\dfrac{2}{3}\pi$.