2020-2021中考数学 初中数学 旋转 培优 易错 难题练习(含答案)附详细答案

一、旋转

1．在平面直角坐标系中，四边形AOBC 是矩形，点O（0，0），点A（5，0），点B（0，3）．以点A为中心，顺时针旋转矩形AOBC，得到矩形ADEF，点O，B，C的对应点分别为D，E，F.

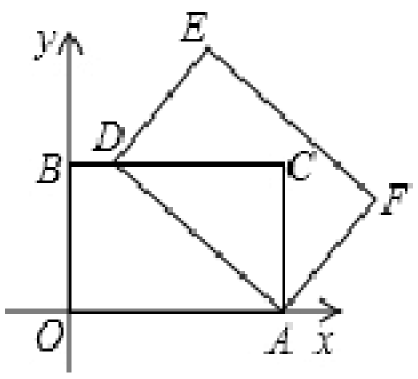
（1）如图①，当点D落在BC边上时，求点D的坐标；

（2）如图②，当点D落在线段BE上时，AD与BC交于点H.

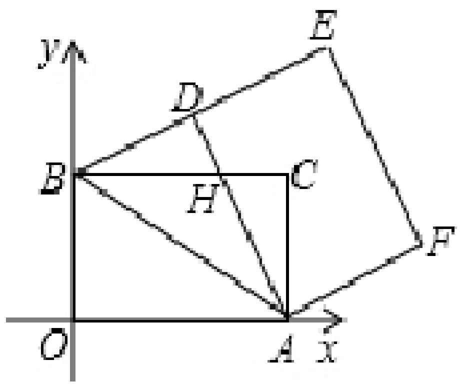
① 求证△ADB ≌△AOB；

② 求点H的坐标.

（3）记K为矩形AOBC 对角线的交点，S为△KDE 的面积，求S的取值范围（直接写出结果即可）.



图①



图②

【答案】（1）D（1，3）；（2）① 详见解析；② H（$\frac{17}{5}$，3）；（3）

$\frac{30\quad 3\sqrt{34}}{4}\leqslant S\leqslant\frac{30\quad 3\sqrt{34}}{4}$.

【解析】

【分析】

（1）如图①，在Rt△ACD 中求出CD即可解决问题；

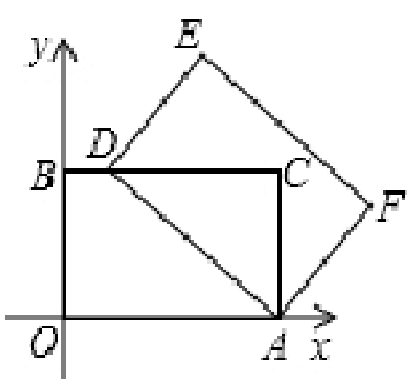
（2）① 根据HL证明即可；

②，设AH=BH=m，则HC=BC-BH=5-m，在Rt△AHC 中，根据$AH^2=HC^2+AC^2$，构建方程求出m 即可解决问题；

（3）如图③ 中，当点D在线段BK上时，△DEK 的面积最小，当点D在BA的延长线上时，△D′E′K的面积最大，求出面积的最小值以及最大值即可解决问题；

【详解】

（1）如图① 中，



图①

∵A（5，0），B（0，3），

∴OA =5，OB =3，

∵四边形 AOBC 是矩形，

∴AC =OB =3，OA =BC =5，∠OBC =∠C=90°，

∵矩形 ADEF 是由矩形 AOBC 旋转得到，

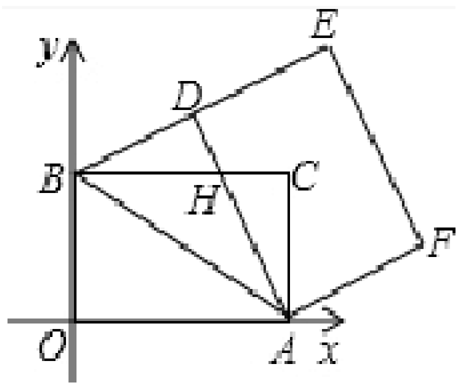
∴AD =AO =5，

在 Rt△ADC 中，CD = $\sqrt{AD^{2}\quad AC^{2}}$ =4，

∴BD =BC-CD =1，

∴D（1，3）.

（2）① 如图② 中，



图②

由四边形 ADEF 是矩形，得到∠ADE =90°，

∵点 D 在线段 BE 上，

∴∠ADB =90°，

由（1）可知，AD =AO，又 AB =AB，∠AOB =90°，

∴Rt△ADB ≌Rt△AOB （HL）.

② 如图② 中，由△ADB ≌△AOB，得到∠BAD =∠BAO，

又在矩形 AOBC 中，OA ∥BC，

∴∠CBA =∠OAB，

∴∠BAD =∠CBA，

∴BH =AH，设 AH =BH =m，则 HC =BC-BH =5-m，

在 Rt△AHC 中，∵$AH^2=HC^2+AC^2$，

∴$m^2=3^2+(5-m)^2$，

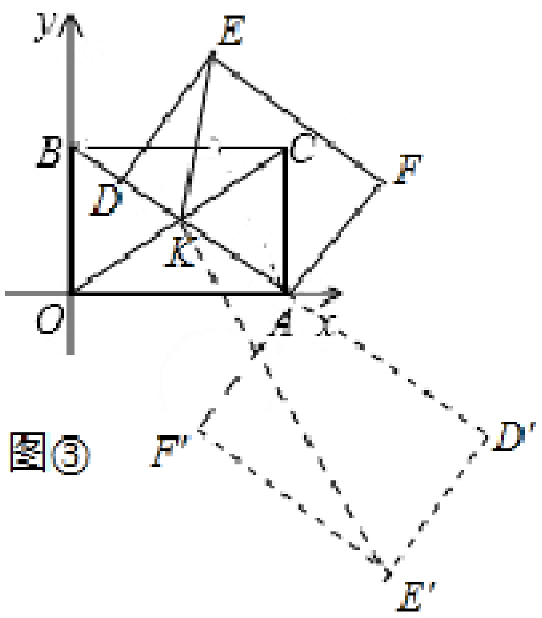
∴m = $\frac{17}{5}$，

∴BH = $\frac{17}{5}$，

∴H（$\frac{17}{5}$，3）.

（3）如图③ 中，当点 D 在线段 BK 上时，△DEK 的面积最小，最小值= $\frac{1}{2}$ •DE •DK = $\frac{1}{2}$ ×3×

（5- $\frac{\sqrt{34}}{2}$）= $\frac{30\quad 3\sqrt{34}}{4}$，



图③

当点D在BA的延长线上时，△D′E′K的面积最大，最大面积$=\frac{1}{2}\times D'E'\times KD'=\frac{1}{2}\times 3\times$

$(5+\frac{\sqrt{34}}{2})=\frac{30+3\sqrt{34}}{4}$.

综上所述，$\frac{30-3\sqrt{34}}{4}\leq S\leq\frac{30+3\sqrt{34}}{4}$.

【点睛】

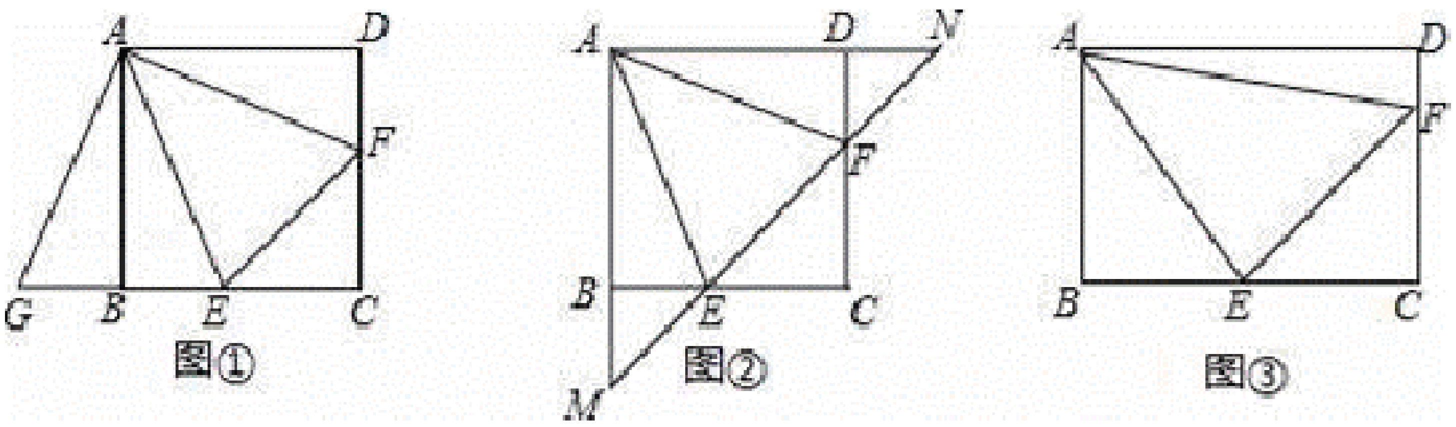
本题考查四边形综合题、矩形的性质、勾股定理、全等三角形的判定和性质、旋转变换等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，学会利用参数构建方程解决问题.

2．在正方形ABCD中，点E，F分别在边BC，CD上，且∠EAF=∠CEF=45°.

(1)将△ADF绕着点A顺时针旋转90°，得到△ABG(如图①)，求证：△AEG≌△AEF；

(2)若直线EF与AB，AD的延长线分别交于点M，N(如图②)，求证：$EF^2=ME^2+NF^2$；

(3)将正方形改为长与宽不相等的矩形，若其余条件不变(如图③)，请你直接写出线段EF，BE，DF之间的数量关系.



【答案】（1）证明见解析；（2）证明见解析；（3）$EF^2=2BE^2+2DF^2$.

【解析】

试题分析：（1）根据旋转的性质可知AF=AG，∠EAF=∠GAE=45°，故可证△AEG≌△AEF；

（2）将△ADF绕着点A顺时针旋转90°，得到△ABG，连结GM．由（1）知△AEG≌△AEF，则EG=EF．再由△BME、△DNF、△CEF均为等腰直角三角形，得出CE=CF，BE=BM，NF=$\sqrt{2}$DF，然后证明∠GME=90°，MG=NF，利用勾股定理得出$EG^2=ME^2+MG^2$，等量代换即可证明$EF^2=ME^2+NF^2$；

（3）将△ADF绕着点A顺时针旋转90°，得到△ABG，根据旋转的性质可以得到

△ADF≌△ABG，则 DF=BG，再证明△AEG≌△AEF，得出 EG=EF，由 EG=BG+BE，等量代换得到 EF=BE+DF.

试题解析：（1）∵△ADF 绕着点 A 顺时针旋转 90°，得到△ABG，

∴AF=AG，∠FAG=90°，

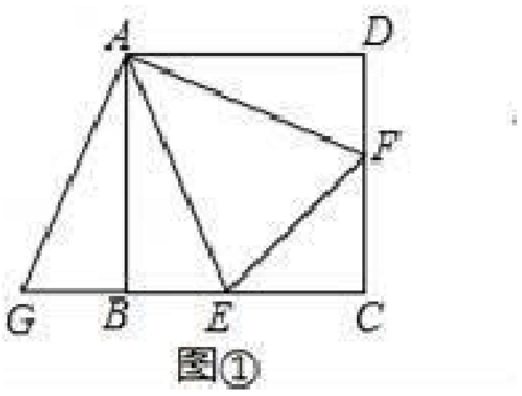
∵∠EAF=45°，

∴∠GAE=45°，

在△AGE 与△AFE 中，

$$\begin{cases} AG = AF \\ \angle GAE = FAE = 45^\circ \\ AE = AE \end{cases},$$

∴△AGE≌△AFE（SAS）；



（2）设正方形 ABCD 的边长为 a.

将△ADF 绕着点 A 顺时针旋转 90°，得到△ABG，连结 GM .

则△ADF≌△ABG，DF=BG .

由（1）知△AEG≌△AEF，

∴EG=EF.

∵∠CEF=45°，

∴△BME、△DNF、△CEF 均为等腰直角三角形，

∴CE=CF，BE=BM，NF=$\sqrt{2}$DF，

∴a－BE=a－DF，

∴BE=DF，

∴BE=BM=DF=BG ，

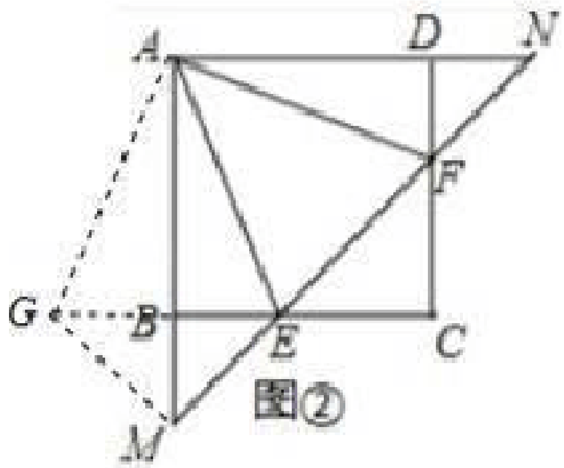
∴∠BMG=45°，

∴∠GME=45°+45°=90°，

∴$EG^2=ME^2+MG^2$，

∵EG=EF，MG=$\sqrt{2}$BM=$\sqrt{2}$DF=NF，

∴$EF^2=ME^2+NF^2$；



（3）$EF^2=2BE^2+2DF^2$.

如图所示，延长 EF 交 AB 延长线于 M 点，交 AD 延长线于 N 点，

将△ADF 绕着点 A 顺时针旋转 90°，得到△AGH ，连结 HM ，HE．

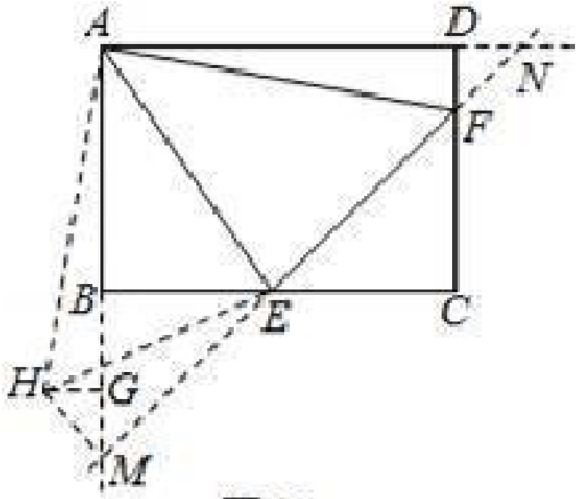
由（1）知△AEH≌△AEF，

则由勾股定理有 $(GH+BE)^2+BG^2=EH^2$，

即 $(GH+BE)^2+(BM-GM)^2=EH^2$

又∴EF=HE，DF=GH=GM ，BE=BM ，所以有 $(GH+BE)^2+(BE-GH)^2=EF^2$，

即 $2(DF^2+BE^2)=EF^2$



图③

考点：四边形综合题

3．如图所示，

(1)正方形 ABCD 及等腰 Rt△AEF 有公共顶点 A，∠EAF=90°，连接 BE、DF．将 Rt△AEF 绕点 A 旋转，在旋转过程中，BE、DF 具有怎样的数量关系和位置关系？结合图(1)给予证明；

(2)将(1)中的正方形 ABCD 变为矩形 ABCD ，等腰 Rt△AEF 变为 Rt△AEF，且 AD=kAB ，AF=kAE，其他条件不变．(1)中的结论是否发生变化？结合图(2)说明理由；

(3)将(2)中的矩形 ABCD 变为平行四边形 ABCD ，将 Rt△AEF 变为△AEF，且 ∠BAD= ∠EAF=a，其他条件不变．(2)中的结论是否发生变化？结合图(3)，如果不变，直接写出结论；如果变化，直接用 k 表示出线段 BE、DF 的数量关系，用 a 表示出直线 BE、DF 形成的锐角 β.

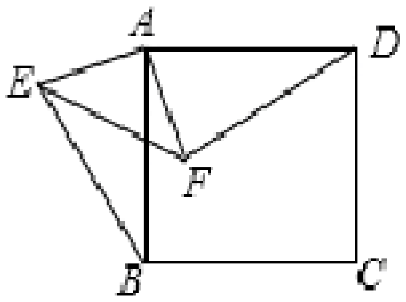


图1

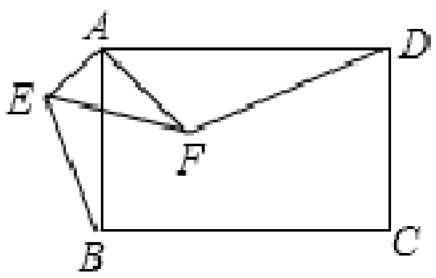


图2

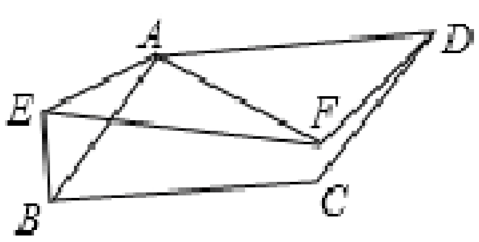


图3

【答案】（1）DF=BE 且 DF⊥BE，证明见解析；（2）数量关系改变，位置关系不变，即 DF=kBE，DF⊥BE；（3）不改变．DF=kBE，β =180°α

【解析】

【分析】

（1）根据旋转的过程中线段的长度不变，得到 AF＝AE，又∠BAE 与∠DAF 都与∠BAF 互余，所以∠BAE＝∠DAF，所以△FAD≌△EAB，因此 BE 与 DF 相等，延长 DF 交 BE 于 G，根据全等三角形的对应角相等和四边形的内角和等于 360°求出∠EGF＝90°，所以 DF⊥BE；

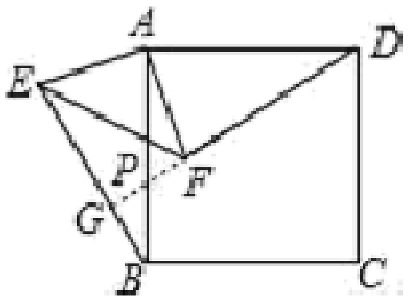
（2）等同（1）的方法，因为矩形的邻边不相等，但根据题意，可以得到对应边成比例，所以△FAD∽△EAB，所以 DF＝kBE，同理，根据相似三角形的对应角相等和四边形的内角和等于 360°求出∠EHF＝90°，所以 DF⊥BE；

（3）与（2）的证明方法相同，但根据相似三角形的对应角相等和四边形的内角和等于 360°求出∠EAF+∠EHF＝180°，所以 DF 与 BE 的夹角 β＝180°－α.

【详解】

（1）DF 与 BE 互相垂直且相等.

证明：延长 DF 分别交 AB、BE 于点 P、G



在正方形 ABCD 和等腰直角△AEF 中

AD＝AB，AF＝AE，

∠BAD＝∠EAF＝90°

∴∠FAD＝∠EAB

∴△FAD≌△EAB

∴∠AFD＝∠AEB，DF＝BE

∵∠AFD+∠AFG＝180°，

∴∠AEG+∠AFG＝180°，

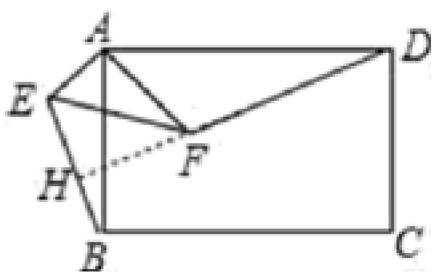
∵∠EAF＝90°，

∴∠EGF＝180°－90°＝90°，

∴DF⊥BE

（2）数量关系改变，位置关系不变．DF＝kBE，DF⊥BE.

延长 DF 交 EB 于点 H，



∵AD＝kAB，AF＝kAE

∴ $\frac{AD}{AB}$ k， $\frac{AF}{AE}$ k

∴ $\frac{AD}{AB}$ $\frac{AF}{AE}$

∵∠BAD＝∠EAF＝a

∴∠FAD＝∠EAB

∴△FAD∽△EAB

∴ $\frac{DF}{BE}$ $\frac{AF}{AE}$ k

∴DF＝kBE

∵△FAD∽△EAB，

∴∠AFD＝∠AEB，

∵∠AFD+∠AFH＝180°，

∴∠AEH+∠AFH＝180°，

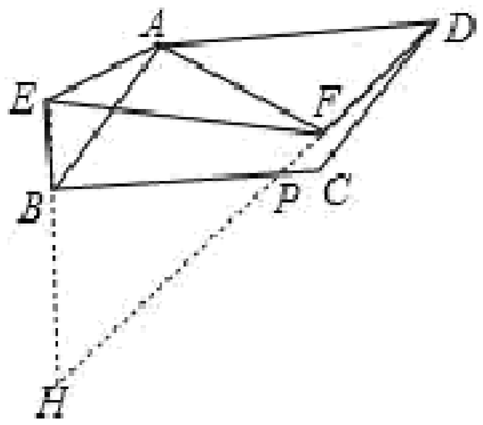
∵∠EAF＝90°，

∴∠EHF＝180°－90°＝90°，

∴DF⊥BE

（3）不改变．DF＝kBE，β＝180°－a．

延长 DF 交 EB 的延长线于点 H，



∵AD＝kAB，AF＝kAE

∴ $\frac{AD}{AB}\quad k$，$\frac{AF}{AE}\quad k$

∴ $\frac{AD}{AB}\quad \frac{AF}{AE}$

∵∠BAD＝∠EAF＝a

∴∠FAD＝∠EAB

∴△FAD∽△EAB

∴ $\frac{DF}{BE}\quad \frac{AF}{AE}\quad k$

∴DF＝kBE

由△FAD∽△EAB 得∠AFD＝∠AEB

∵∠AFD+∠AFH＝180°

∴∠AEB+∠AFH＝180°

∵四边形 AEHF 的内角和为 360°，

∴∠EAF+∠EHF＝180°

∵∠EAF＝α，∠EHF＝β

∴a+β＝180°∴β＝180°－a

【点睛】

本题（1）中主要利用三角形全等的判定和性质以及正方形的性质进行证明；（2）（3）利用相似三角形的判定和性质证明，要解决本题，证明三角形全等和三角相似是解题的关键，也是难点所在.

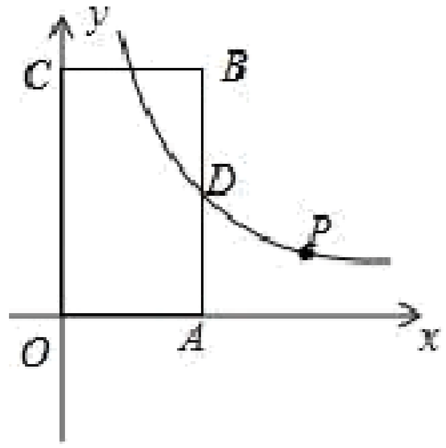
4. 如图，矩形 OABC 的顶点 A 在 x 轴正半轴上，顶点 C 在 y 轴正半轴上，点 B 的坐标为（4，m）（$5\leqslant m\leqslant 7$），反比例函数 $y=\frac{16}{x}$（$x>0$）的图象交边 AB 于点 D.

（1）用 m 的代数式表示 BD 的长；

（2）设点 P 在该函数图象上，且它的横坐标为 m，连结 PB，PD

① 记矩形 OABC 面积与△PBD 面积之差为 S，求当 m 为何值时，S 取到最大值；

② 将点 D 绕点 P 逆时针旋转 90°得到点 E，当点 E 恰好落在 x 轴上时，求 m 的值.



【答案】（1）BD＝m －4（2）①m ＝7 时，S 取到最大值②m ＝$2+2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】

（1）先确定出点 D 横坐标为 4，代入反比例函数解析式中求出点 D 横坐标，即可得出结论；

（2）① 先求出矩形 OABC 的面积和三角形 PBD 的面积得出 $S=-\frac{1}{2}(m-8)^2+24$，即可得出结论；② 利用一线三直角判断出 DG ＝PF，进而求出点 P 的坐标，即可得出结论.

【详解】

解：（1）∵四边形 OABC 是矩形，

∴AB⊥x 轴上，

∵点 B（4，m），

∴点 D 的横坐标为 4，

∵点 D 在反比例函数 $y=\frac{16}{x}$ 上，

∴D（4，4），

∴BD＝m －4；

（2）① 如图 1，∵矩形 OABC 的顶点 B 的坐标为（4，m），

∴$S_{矩形OABC}=4m$，

由（1）知，D（4，4），

∴$S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2}(m-4)(m-4)=\frac{1}{2}(m-4)^2$，

∴$S=S_{矩形OABC}-S_{\triangle PBD}=4m-\frac{1}{2}(m-4)^2=-\frac{1}{2}(m-8)^2+24$，

∴抛物线的对称轴为 m ＝8，

∵a＜0，$5\leqslant m\leqslant 7$

∴m =7 时，S 取到最大值；

② 如图 2，过点 P 作 PF⊥x 轴于 F，过点 D 作 DG ⊥FP 交 FP 的延长线于 G，

∴∠DGP =∠PFE=90°，

∴∠DPG+∠PDG =90°，

由旋转知，PD＝PE，∠DPE＝90°，

∴∠DPG+∠EPF=90°，

∴∠PDG =∠EPF，

∴△PDG ≌△EPF（AAS），

∴DG =PF，

∵DG =AF=m - 4，

∴P（m ，m - 4），

∵点 P 在反比例函数 $y=\dfrac{16}{x}$，

∴m （m - 4）=16，

∴m =$2+2\sqrt{5}$ 或 m =$2-2\sqrt{5}$（舍）．

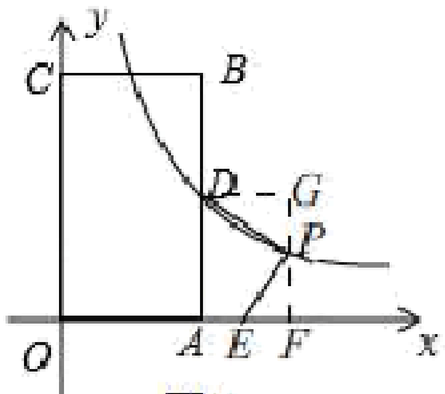


图 2

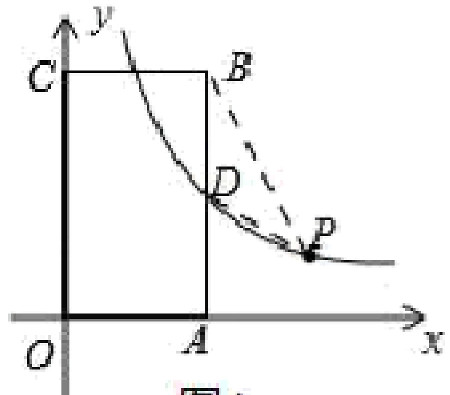


图 1

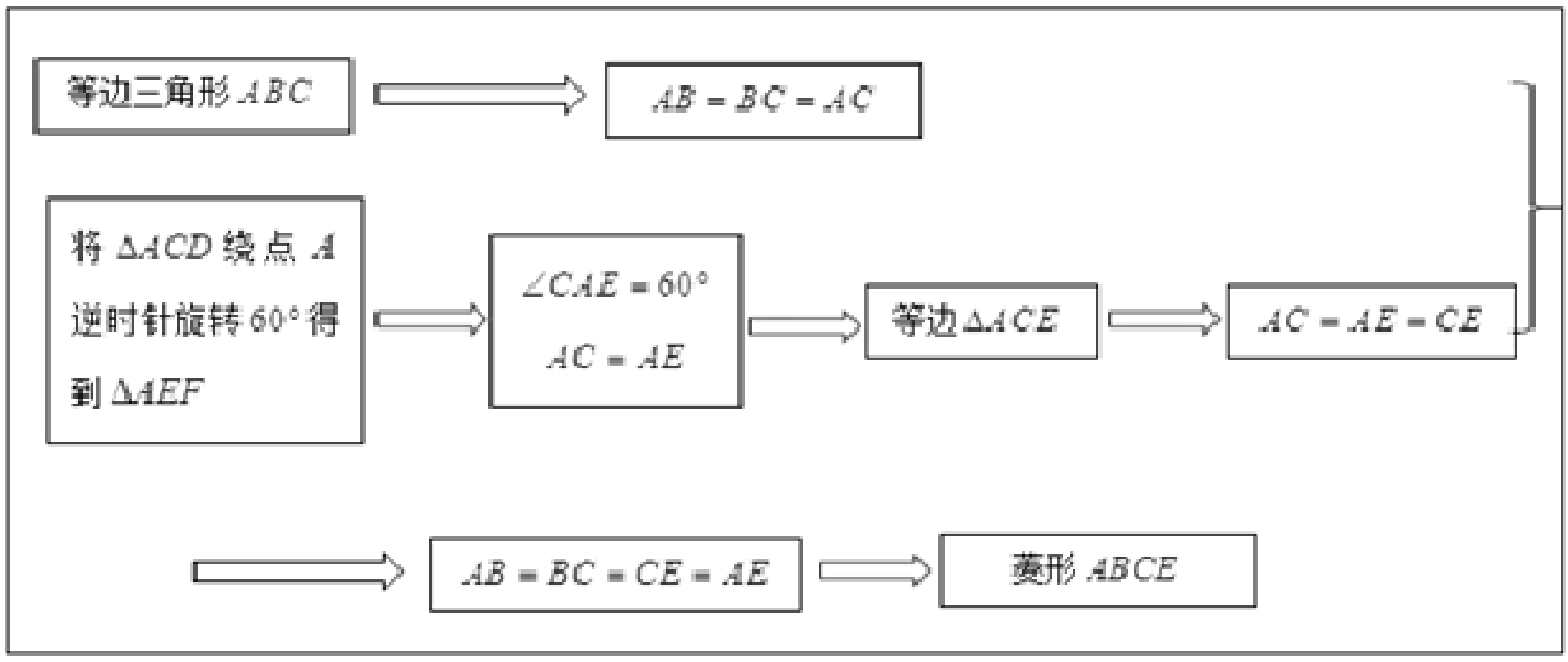
【点睛】

此题是反比例函数综合题，主要考查了待定系数法，矩形的性质，三角形的面积公式，全等三角形的判定，构造出全等三角形是解本题的关键.

5. （探索发现）

如图， ABC 是等边三角形，点 D 为 BC 边上一个动点，将 ACD 绕点 A 逆时针旋转 60 得到 AEF ，连接 CE .小明在探索这个问题时发现四边形 ABCE 是菱形.

小明是这样想的：



（1）请参考小明的思路写出证明过程；

（2）直接写出线段 CD，CF，AC 之间的数量关系：________________；

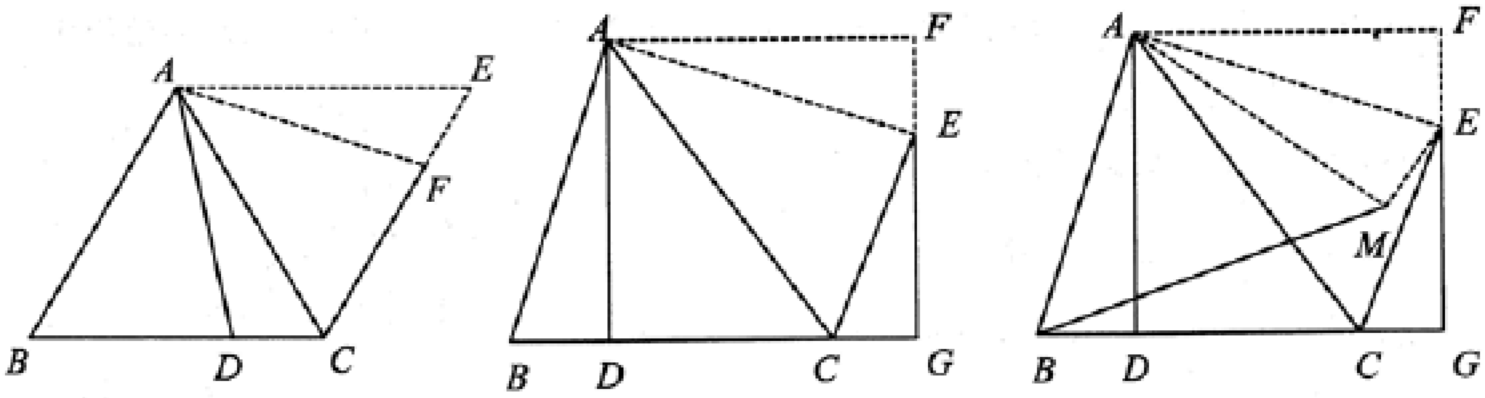
（理解运用）

如图，在 ABC 中，AD BC 于点 D .将 ABD 绕点 A 逆时针旋转 90 得到 AEF，延长 FE 与 BC，交于点 G .

（3）判断四边形 ADGF 的形状，并说明理由；

（拓展迁移）

（4）在（3）的前提下，如图，将 AFE 沿 AE 折叠得到 AME，连接 MB，若 AD 6，BD 2，求 MB 的长.



【答案】（1）详见解析；（2）CD CF AC；（3）四边形 ADGF 是正方形；（4）$2\sqrt{13}$

【解析】

【分析】

（1）根据旋转得：△ACE 是等边三角形，可得：AB=BC=CE=AE，则四边形 ABCE 是菱形；

（2）先证明 C、F、E 在同一直线上，再证明△BAD≌△CAF（SAS），则∠ADB=∠AFC，BD=CF，可得 AC=CF+CD；

（3）先根据∠ADC=∠DAF=∠F=90°，证明得四边形 ADGF 是矩形，由邻边相等可得四边形 ADGF 是正方形；

（4）证明△BAM≌△EAD（SAS），根据 BM=DE 及勾股定理可得结论.

【详解】

（1）证明：∵ ABC 是等边三角形，

∴ AB BC AC .

∵ ACD 绕点 A 逆时针旋转 60 得到 AEF ，

∴ CAE 60 ，AC AE .

∴ ACE 是等边三角形.

∴ AC AE CE .

∴ AB BC CE AE .

∴四边形 ABCE 是菱形.

（2）线段 DC ，CF ，AC 之间的数量关系：CD CF AC .

（3）四边形 ADGF 是正方形.理由如下：

∵ Rt ABD 绕点 A 逆时针旋转 90 得到 AEF ，

∴ AF AD ， DAF 90 .

∵ AD BC ，

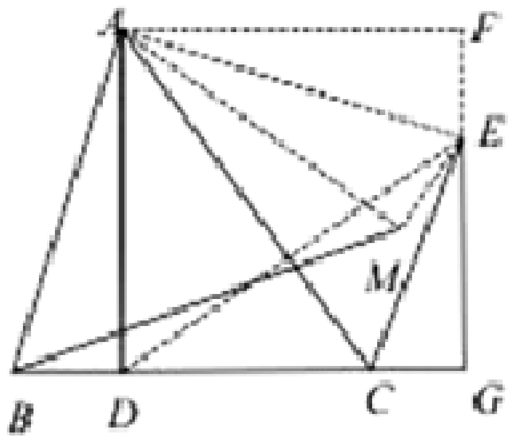
∴ ADC DAF F 90 .

∴四边形 ADGF 是矩形.

∵ AF AD ，

∴四边形 ADGF 是正方形.

（4）如图，连接 DE .



∵四边形 ADGF 是正方形，

∴ DG FG AD AF 6 .

∵ ABD 绕点 A 逆时针旋转 90 得到 AEF ，

∴ BAD EAF ，BD EF 2，∴ EG FG EF 6 2 4 .

∵将 AFE 沿 AE 折叠得到 AME ，

∴ MAE FAE ，AF AM .

∴ BAD EAM .

∴ BAD DAM EAM DAM ，即 BAM DAE .

∵ AF AD ，

∴ AM AD .

在 BAM 和 EAD 中， $\begin{cases} AM \quad AD \\ BAM \quad DAE \\ AB \quad AE \end{cases}$ ，

∴ BAM EAD SAS .

∴ BM DE $\sqrt{EG^2 \quad DG^2}$ $\sqrt{4^2 \quad 6^2}$ $2\sqrt{13}$.

【点睛】

本题属于四边形综合题，主要考查了旋转的性质、全等三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质、正方形的性质以及勾股定理的综合应用，解决问题的关键是熟练掌握等边三角形和全等三角形的性质，依据图形的性质进行计算求解.

6．如图 1，点 O 是正方形 ABCD 两对角线的交点.分别延长 OD 到点 G，OC 到点 E，使 OG =2OD，OE=2OC，然后以 OG 、OE 为邻边作正方形 OEFG，连接 AG，DE.

(1)求证：DE⊥AG；

(2)正方形 ABCD 固定，将正方形 OEFG 绕点 O 逆时针旋转α角(0°<α<360°)得到正方形$OE'F'G'$，如图 2.

① 在旋转过程中，当$\angle OAG'$是直角时，求α的度数；(注明：当直角边为斜边一半时，这条直角边所对的锐角为 30 度)

② 若正方形 ABCD 的边长为 1，在旋转过程中，求AF'长的最大值和此时α的度数，直接写出结果不必说明理由.

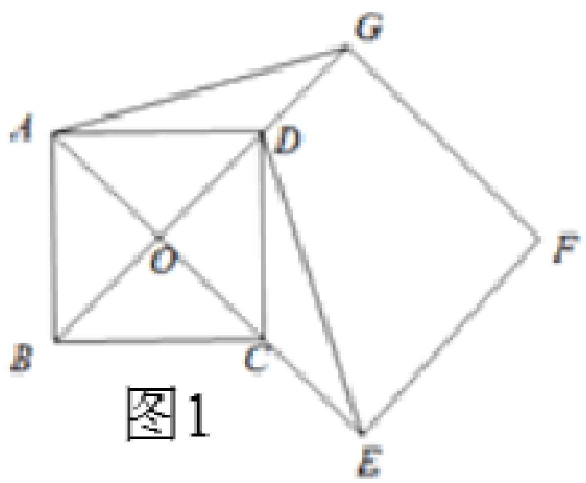


图1

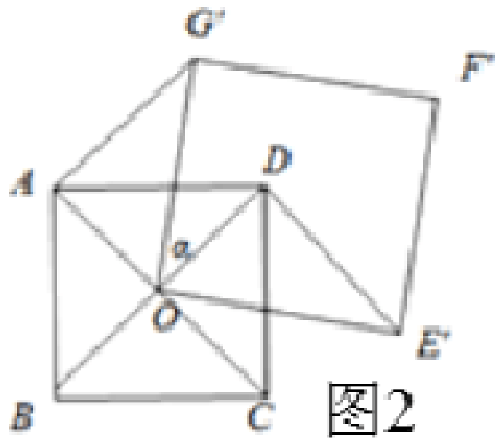


图2

【答案】（1）DE⊥AG （2）① 当$\angle OAG'$为直角时，α=30°或 150°．②315°

【解析】

分析：（1）延长 ED 交 AG 于点 H，证明$\triangle AOG\cong\triangle DOE$，根据等量代换证明结论；

（2）根据题意和锐角正弦的概念以及特殊角的三角函数值得到$\angle AG'O=30°$，分两种情况求出α的度数；

（3）根据正方形的性质分别求出 OA 和 OF 的长，根据旋转变换的性质求出 AF′长的最大值和此时α的度数.

详解：(1)如图 1，延长 ED 交 AG 于点 H，

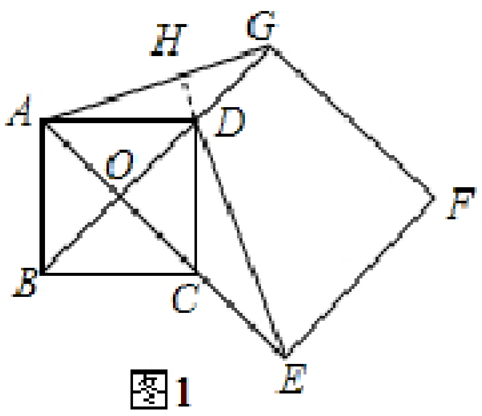


图1

∵点 O 是正方形 ABCD 两对角线的交点，

$\therefore OA=OD$，$OA\perp OD$，

$\because OG=OE$，

在$\triangle AOG$和$\triangle DOE$中，

$$\begin{cases} OA=OD \\ \angle AOG=\angle DOE=90° \\ OG=OE \end{cases},$$

$\therefore\triangle AOG\cong\triangle DOE$，

$\therefore\angle AGO=\angle DEO$，

$\because\angle AGO+\angle GAO=90°$，

$\therefore\angle GAO+\angle DEO=90°$，

$\therefore\angle AHE=90°$，

即$DE\perp AG$；

(2)①如图2，在旋转过程中，$\angle OAG'$成为直角有两种情况：

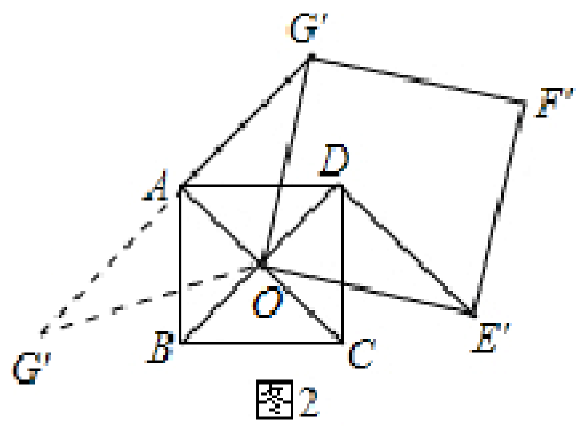


图2

(Ⅰ)α由$0°$增大到$90°$过程中，当$\angle OAG'=90°$时，

$\because OA=OD=\frac{1}{2}OG=\frac{1}{2}OG'$，

$\therefore$在$Rt\triangle OAG'$中，sin∠AGO=$\frac{OA}{OG'}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\angle AG'O=30°$，

$\because OA\perp OD$，$OA\perp AG'$，

$\therefore OD//AG'$，

$\therefore\angle DOG'=\angle AG'O=30°$，

即$\alpha=30°$；

(Ⅱ)α由$90°$增大到$180°$过程中，当$\angle OAG'=90°$时，

同理可求$\angle BOG'=30°$，

$\therefore\alpha=180°-30°=150°$.

综上所述，当$\angle OAG'=90°$时，$\alpha=30°$或$150°$.

②如图 3，

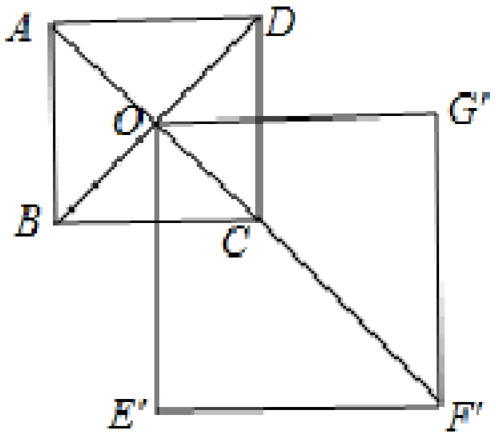


图3

当旋转到 A、O、F'在一条直线上时，AF'的长最大，

∵正方形 ABCD 的边长为 1，

$\therefore OA = OD = OC = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because OG = 2OD$，

$\therefore OG' = OG = \sqrt{2}$，

$\therefore OF' = 2$，

$\therefore AF' = AO + OF' = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2$，

$\because \angle COE' = 45°$，

∴此时$\alpha = 315°$．

点睛：考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质，锐角三角形函数，旋转变换的性质的综合应用，有一定的综合性，注意分类讨论的思想.

7．如图所示，△ABC 和△ADE 是有公共顶点的等腰直角三角形，∠BAC=∠DAE=90°，EC 的延长线交 BD 于点 P.

（1）把△ABC 绕点 A 旋转到图 1，BD，CE 的关系是______（选填"相等"或"不相等"）；简要说明理由；

（2）若 AB=3，AD=5，把△ABC 绕点 A 旋转，当∠EAC=90°时，在图 2 中作出旋转后的图形，PD=______，简要说明计算过程；

（3）在（2）的条件下写出旋转过程中线段 PD 的最小值为______，最大值为______.

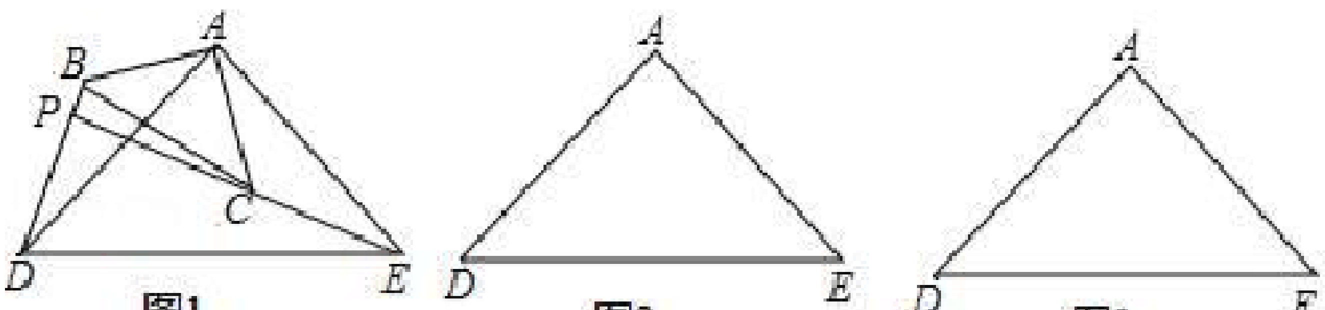


图1　图2　图3

【答案】（1）BD，CE 的关系是相等；（2）$\frac{5}{17}\sqrt{34}$或$\frac{20}{17}\sqrt{34}$；（3）1，7

【解析】

分析：（1）依据△ABC 和△ADE 是有公共顶点的等腰直角三角形，∠BAC=∠DAE=90°，即可 BA=CA，∠BAD=∠CAE，DA=EA，进而得到△ABD≌△ACE，可得出 BD=CE；

（2）分两种情况：依据∠PDA=∠AEC，∠PCD=∠ACE，可得△PCD∽△ACE，即可得到 $\frac{PD}{AE}=\frac{CD}{CE}$，进而得到 PD= $\frac{5}{17}\sqrt{34}$；依据∠ABD=∠PBE，∠BAD=∠BPE=90°，可得△BAD∽△BPE，即可得到 $\frac{PB}{AB}$ $\frac{BE}{BD}$，进而得出 PB= $\frac{6}{34}\sqrt{34}$，PD=BD+PB= $\frac{20}{17}\sqrt{34}$；

（3）以 A 为圆心，AC 长为半径画圆，当 CE 在⊙A 下方与⊙A 相切时，PD 的值最小；当 CE 在在⊙A 右上方与⊙A 相切时，PD 的值最大. 在 Rt△PED 中，PD=DE•sin∠PED，因此锐角∠PED 的大小直接决定了 PD 的大小. 分两种情况进行讨论，即可得到旋转过程中线段 PD 的最小值以及最大值.

详解：（1）BD，CE 的关系是相等.

理由：∵△ABC 和△ADE 是有公共顶点的等腰直角三角形，∠BAC=∠DAE=90°，

∴BA=CA，∠BAD=∠CAE，DA=EA，

∴△ABD≌△ACE，

∴BD=CE；

故答案为相等.

（2）作出旋转后的图形，若点 C 在 AD 上，如图 2 所示：

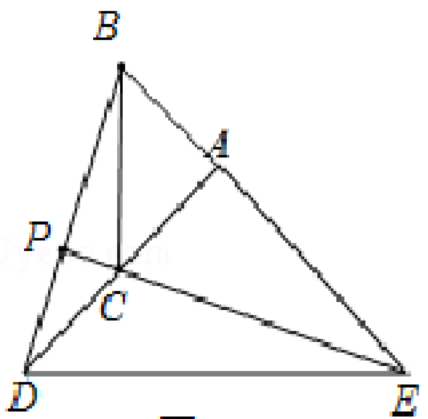


图2

∵∠EAC=90°，

∴CE= $\sqrt{AC^2\quad AE^2}$ $\sqrt{34}$，

∵∠PDA=∠AEC，∠PCD=∠ACE，

∴△PCD∽△ACE，

∴ $\frac{PD}{AE}$ $\frac{CD}{CE}$，

∴PD= $\frac{5}{17}\sqrt{34}$；

若点 B 在 AE 上，如图 2 所示：

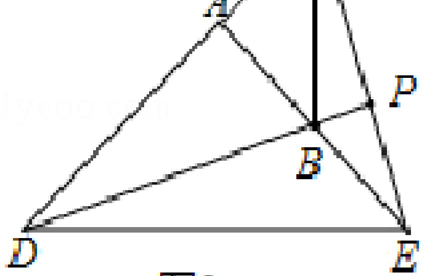


图2