第一讲：函数与数列的极限的强化练习题答案

一、单项选择题

1．下面函数与 $y=x$ 为同一函数的是（　　）

$A.y=\left(\sqrt{x}\right)^2$　　　　$B.y=\sqrt{x^2}$

$C.y=e^{\ln x}$　　　　$D.y=\ln e^x$

解： $\because y=\ln e^x=x\ln e=x$ **，且概念域** $(-\infty,+\infty)$ **，**

$\therefore$**选 D**

2 .已知 φ 是 f 的反函数 ,那么 $f(2x)$ 的反函数是(　　)

$A.y=\frac{1}{2}\varphi(x)$　　　　$B.y=2\varphi(x)$

$C.y=\frac{1}{2}\varphi(2x)$　　　　$D.y=2\varphi(2x)$

解:令 $y=f(2x)$,**反解出** x **：** $x=\frac{1}{2}\varphi(y)$,**互换** x **，** y **位置得反函数** $y=\frac{1}{2}\varphi(x)$ **，选 A**

3．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有概念，那么以下函数为奇函数的是（　　）

$A.y=f(x)+f(-x)$ $B.y=x\left[f(x)-f(-x)\right]$

$C.y=x^3f\left(x^2\right)$

$D.y=f(-x)\cdot f(x)$

解： $\because y=x^3f\left(x^2\right)$ **的概念域** $(-\infty,+\infty)$ **且** $y(-x)=(-x)^3f\left(x^2\right)=-x^3f\left(x^2\right)=-y(x)\therefore$**选 C**

4．以下函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界的是（　　）

$A.y=\frac{1}{1+x^2}$　　　　$B.y=\arctan x$

$C.y=\sin x+\cos x$　　　　$D.y=x\sin x$

解：排除法：A $\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\le\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$ **有界，B** $|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$ **有界，C** $|\sin x+\cos x|\le\sqrt{2}$

应选 D

5．数列 $\{x_n\}$ 有界是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在的（　　）

A 必要条件　　　　B 充分条件

C 充分必要条件　　　　D 无关条件

解： $\because\{x_n\}$ **收敛时，数列 x_n 有界（即 $|x_n|\le M$ ），反之不成立，（如** $\left\{(-1)^{n-1}\right\}$ **有界，但不收敛，**

选 A

6．当 $n\to\infty$ 时，$\sin^2\frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{n^k}$ 为等价无穷小，那么 $k=$（　　）

A $\frac{1}{2}$　　**B 1**　　**C 2**　　**D -2**

解：$\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^k}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^k}}=1$，$k=2$　选 **C**

二、填空题（每题 4 分，共 24 分）

7．设 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，那么 $f\left[f(x)\right]$ 的概念域为____

解：$\because f\left[f(x)\right]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$

$\underline{\underline{x\neq-1}}=\frac{1+x}{2+x}$

$\therefore f\left[f(x)\right]$ 概念域为

$(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$

8．设 $f(x+2)=x^2+1,$

则 $f(x-1)=$____________

解：（1）令 $x+2=t, f(t)=t^2-4t+5$

$f(x)=x^2-4x+5$

（2）$f(x-1)=(x-1)^2-4(x-1)+5=x^2-6x+10$

9．函数 $y=\log_4\sqrt{x}+\log_4 2$ 的反函数是________

解：（1）$y=\log_4(2\sqrt{x})$，反解出 x：$x=4^{2y-1}$

（2）互换 x,y 位置，得反函数 $y=4^{2x-1}$

10．$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2}\right)=$________

解：原式 $\overset{有理化}{=\!=\!=}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-2}}=\dfrac{3}{2}$

11．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{-kn}=e^{-10}$，

则 $k=$__________

解：左式$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}(-kn)}=e^{-5k}=e^{-10}$ 故 $k=2$

12．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{5n+3}\sin\dfrac{2}{n}=$____________

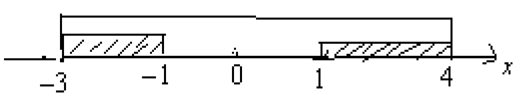
解：∵当 $n\to\infty$ 时，$\sin\dfrac{2}{n}\sim\dfrac{2}{n}$ ∴原式$=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{5n+3}\cdot\dfrac{2}{n}=\dfrac{6}{5}$

三、计算题（每题 **8** 分，共 **64** 分）

13．求函数 $y=\dfrac{\arcsin\frac{2x-1}{7}}{\sqrt{|x|-1}}$ 的概念域

解：∵$\begin{cases}-1\le\frac{2x-1}{7}\le 1\\ |x|-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 4\\ x>1\text{或}x<-1\end{cases}$



∴函数的概念域为 $[-3,-1)\cup(1,4]$

14．设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$ 求 $f(x)$

解：∵$f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=2\cos^2\dfrac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$

$\therefore f(\ \ )=2\left[1-(\ \ )^2\right]$

故 $f(x)=2(1-x^2)$

15．设 $f(x)=\ln x$，$g(x)$ 的反函数 $g^{-1}(x)=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$，求 $f(g(x))$

解:（1）求 $g(x)$ ∵ $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ ∴反解出 x：

$xy-y=2x+2$ $x=\dfrac{y+2}{y-2}$

互换 x,y 位置得 $g(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$

(2) $f[g(x)]=\ln g(x)=\ln\dfrac{x+2}{x-2}$

16．判别 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 的奇偶性。

解法（1）：$f(x)$ 的概念域 $(-\infty,+\infty)$，关于原点对称

∵$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$

$=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$=-f(x)$

$\therefore f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数

解法（2）：∵$f(x)+f(-x)$

$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$=\ln\left[(x+\sqrt{1+x^2})\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right]=\ln 1=0$

$\therefore f(-x)=-f(x)$ 故 $f(x)$ 为奇函数

17． 已知 $f\left(x\right)$为偶函数，$g\left(x\right)$为奇函数，且 $f\left(x\right)+g\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}$，求 $f\left(x\right)$及 $g\left(x\right)$

解： 已知 $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}\ldots(1)$

Q $f(-x)+g(-x)=\dfrac{1}{-x-1}$ 即有

$f(x)-g(x)=\dfrac{-1}{x+1}\ \ldots(2)$

$\therefore(1)+(2)$得 $2f\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

故 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

$(1)-(2)$得 $2g\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$

故 $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

18． 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2a}{n-a}\right)^{\frac{n}{3}}=8$，求 a 的值。

解： Q $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2a}{n-a}\right)^{\frac{3}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{n-a}\right)^{\frac{n}{3}}$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na}{n-a}}=e^a,\therefore e^a=8$

故 $a=\ln 8=3\ln 2$

19． 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}\right)^n$

解：（1） 拆项，$\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{k+1-k}{(k+1)k}$

$=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}k=1,2,\ldots,n$

$\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\ldots\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=1-\dfrac{1}{n+1}$

（2） 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}}=e^{-1}$

20． 设 $f\left(x\right)=a^x\left(a>0,a\neq 1\right)$,

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln\left[f\left(1\right)\cdot f\left(2\right)\ldots f\left(n\right)\right]$

解： 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln\left(a^1\cdot a^2\ldots a^n\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\ln a+2\ln a+\ldots+n\ln a\right]$

$=\ln a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$

$=\ln a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)n}{n^2\cdot 2}$

$=\dfrac{1}{2}\ln a\left(a>0,a\neq 1\right)$

四、综合题（每题 10 分，共 20 分）

21． 设 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_3\left(x\right)=f\left\{f\left[f\left(x\right)\right]\right\}$并讨论 $f_3\left(x\right)$的奇偶性与有界性。

解：（1） 求 $f_3\left(x\right)$

Q $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ \therefore f_2\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

$f_3\left(x\right)=f\left[f_2\left(x\right)\right]=\dfrac{f_2\left(x\right)}{\sqrt{1+f_2^{\,2}\left(x\right)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$

（2） 讨论 $f_3\left(x\right)$的奇偶性

Q $f_3\left(-x\right)=\dfrac{-x}{\sqrt{1+3x^2}}=-f_3\left(x\right)$

$\therefore f_3\left(x\right)$为奇函数

（3） 讨论 $f_3\left(x\right)$的有界性

Q $\left|f_3\left(x\right)\right|=\dfrac{|x|}{\sqrt{1+3x^2}}<\dfrac{|x|}{\sqrt{3}|x|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\qquad\therefore f_3\left(x\right)$有界

22． 从一块半径为 **R** 的圆铁片上挖去一个扇形，把留下的中心角为 φ

的扇形做成一个漏斗（如图），试将漏斗的容积 **V** 表示成中心角 φ 的函数。

解：（1）列出函数关系式，设漏斗高为 h，底半径为 r，依题意：漏斗容积 **V**=$\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\because h=\sqrt{R^2-r^2}, 2\pi r=R\varphi$

$\therefore r^2=\frac{R^2\varphi^2}{4\pi^2} h=\sqrt{R^2-\frac{R^2\varphi^2}{4\pi^2}}$

故 $V=\frac{\pi}{3}\frac{R^2\varphi^2}{4\pi^2}\cdot R\frac{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}{2\pi}$

$=\frac{\pi R^3\varphi^2}{24\pi^3}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}$

（2）函数的概念域

$\because 4\pi^2-\varphi^2>0, \varphi^2<(2\pi)^2 \quad \therefore (0<\varphi<2\pi)$

故 $V=\frac{R^3\varphi^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}\ (0<\varphi<2\pi)$

五、证明题（每题 **9** 分，共 **18** 分）

23．设 $f(x)$ 为概念在 $(-\infty,+\infty)$ 的任意函数，证明 $f(x)$ 可表示为一个偶函数与一个奇函数之和。

证：(1) $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$

(2)令 $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}(-\infty<x<+\infty)$

$\because g(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=g(x)$

$\therefore g(x)$ 为偶函数

(3)令 $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}(-\infty<x<+\infty)$

$\because \varphi(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\varphi(x)$

$\therefore \varphi(x)$ 为奇函数

（**4**）综上所述：$f(x)=g(x)$ 偶函数+$\varphi(x)$ 奇函数

24 设 $f(x)$ 知足函数方程 **2** $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ $=\frac{1}{x}$，证明 $f(x)$ 为奇函数。

证：（**1**）$\because 2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\ldots\ldots(1)$

令 $\frac{1}{x}=t, 2f\left(\frac{1}{t}\right)+f(t)=t$ $\because$ 函数与自变量的记号无关

$\therefore 2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=x\ldots\ldots(2)$

（**2**）消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，求出 $f(x)$

$(2)-2\times(1): f(x)-4f(x)=x-\frac{2}{x}$

$-3f(x)=\frac{x^2-2}{x}, f(x)=\frac{2-x^2}{3x}$

（**3**）$\because f(x)$ 的概念域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

又 $\because f(-x)=\frac{2-x^2}{-3x}=-f(x)$

$\therefore f(x)$ 为奇函数

***选做题**

1 已 知 $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$， 求

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+2}+\ldots+\frac{n^2}{n^3+n}\right)$

解: $\because \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+n}$

$\leq\frac{1^2}{n^3+1}+\ldots+\frac{n^2}{n^3+n}\leq\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+1}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n)}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}=\frac{1}{3}$$

∴由夹逼定理知，原式$=\frac{1}{3}$

2 假设关于任意的 x,y，函数知足：$f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明 $f(y)$ 为奇函数。

解 **(1)**求 $f(0)$：令

$$x=0,y=0,f(0)=2f(0)\to f(0)=0$$

(2)令 $x=-y:f(0)=f(-y)+f(y)\to f(-y)=-f(y)$

$\therefore f(y)$ 为奇函数

第二讲：函数的极限与洛必达法那么的强化练习题答案

一、单项选择题（每题 **4** 分，共 **24** 分）

1． 以下极限正确的（　）

A． $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$　**B．** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$不存在

C． $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$　**D．** $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$

解： $\because \lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$　$\therefore$选 **C**

注：$A\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0;B\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1-0}{1+0}=1$

2． 以下极限正确的选项是（　）

A． $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$　**B．** $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=0$

C． $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\sec x}=e$

D． $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

解： $\because \lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=0$　$\therefore$选 **A**

注：$B:+\infty,C:2,D:1$

3． 假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，那么以下正确的选项是　（　）

A． $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty$

B． $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\infty$

C． $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)+g(x)}=0$

D． $\lim\limits_{x\to x_0}kf(x)=\infty(k\neq 0)$

解： $\because \lim\limits_{x\to x_0}kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=k\cdot\infty\overset{k\neq 0}{=\!=\!=}\infty$　$\therefore$选 **D**

4． 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=2$，

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(3x)}=$　（　）

A．3　**B．** $\frac{1}{3}$　**C．2**　**D．** $\frac{1}{2}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(3x)}\overset{3x=2t}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{2}{3}t}{f(2t)}$

$$=\frac{2}{3}\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{f(2t)}{t}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$\therefore$选 **B**

5． 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin x(x<0)\\ 0(x=0)\\ x\sin\frac{1}{x}+a(x>0)\end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，那么 $a=$　（　）

A．-1　**B．0**　**C．1**　**D．2**

解：Q $\lim\limits_{x\to0}=\frac{\sin x}{x}=1,$

$\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(x\sin\frac{1}{x}\right)+a\right]=o+a$

$\therefore a=1$　　　　　　选 **C**

6. 当 $x\to0^+$ 时，$f(x)=\sqrt{1+x^a}-1$ 是比 x 高阶无穷小，那么　　　（　）

A. $a>1$　　　　**B.** $a>0$

C. a 为任意实数　　　　**D.** $a<1$

解： $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+x^a}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^a}{x}\overset{a>1}{=\!=}0\therefore a>1$

应选 **A**

二 、填空题（每题 4 分，共 24 分）

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=$________

解：原式 $\overset{1^\infty}{=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x}}=e^{-1}$

8. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=$________

解：原式 $\overset{(\infty-\infty)}{=\!=}\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^3(3x+2)97}{(3x+1)^{100}}=$________

解：原式 $\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)^3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{97}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

10. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+6}{1-x}$ 存在，

则 $a=$________

解：Q $\lim\limits_{x\to1}(1-x)=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+ax+6\right)=0$

$1+a+6=0,a=-7$

11. $\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x^2}+\frac{\arcsin x}{x}\right)=$________

解　：　Q $\left|\sin\frac{1}{x^2}\right|\le1,\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0\therefore\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x^2}=0$ 又

Q $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}=1$　故　原式=**1**

12. 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\ln\left(1+x^2\right)}{\sin^n x}=0$

且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^n x}{1-\cos x}=0$，那么正整数 $n=$________

解：Q $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\ln\left(1+x^2\right)}{\sin^n x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cdot x^2}{x^n}$

$\overset{n<4}{=\!=}0,\lim\limits_{x\to0}\frac{x^n}{\frac{x^2}{2}}\overset{n>2}{=\!=}0\therefore n>2,n<4,$　故 $n=3$

三、计算题（每题 8 分，共 64 分）

13. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin3x+2x}{\sin2x-3x}$

解：　原式=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\sin3x}{x}+2}{\frac{\sin2x}{x}-3}$

Q $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin3x}{x}=0\left(\left|\sin3x\right|\le1,\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\right)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin2x}{x}=0\left(\left|\sin2x\right|\le1,\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\right)$

$\therefore$ 原式 $=\frac{0+2}{0-3}=-\frac{2}{3}$

14. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$

解：原式 $\overset{\text{有理化}}{=\!=}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\frac{1}{2}$$

15. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$

解： 令 $\frac{1}{x}=t$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}(\cos t+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}$

$$=\lim_{t\to 0}[1+\cos t-1+\sin 2t]^{\frac{1}{t}}$$

$$\overset{(1^{\infty})}{=\!=}e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1+\sin 2t}{t}}=e^{2}$$

16. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$

解： 原式 $\overset{变形}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1-\cos 2x-1]}{\ln[1+\cos 3x-1]}$

$$\overset{等价}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\cos 3x-1}$$

$$\overset{等价}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{-\frac{1}{2}(3x)^2}=\frac{4}{9}$$

注: 原式 $\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}\times\frac{\cos 3x}{-3\sin 3x}$

$$=\ldots\ldots=\frac{4}{9}$$

17. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

解： 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=2$$

18. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}+a,x>0\\ \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x},x<0\end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，求 a 的值。

解： $\because\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(e^{-\frac{1}{x}}+a\right)=e^{-\infty}+a=0+a=a$

$$\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(-x)}{x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

19. $\lim\limits_{x\to 0^{+}}(\sin 3x)^{\frac{1}{1+3\ln x}}$

解： 原式

$$\overset{(0^{0})换底法}{=\!=\!=}e^{\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{\ln(\sin 3x)}{1+3\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^{-}}\frac{3\cos x}{\sin 3x}\Big/\frac{3}{x}}$$

也能够用两个重要极限中的一个，凑一个 1 出来（凡是能够用换底的都能够用重要极限来求）

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{3x}{3\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{x}{3x}}=e^{\frac{1}{3}}$$

20. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

无穷大与 0 之间的转换（笔记）

解： 原式 $\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^{2}}\right]$

$$\overset{通分}{=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^{2}}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1+t-1}{2t(t+1)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t+1}=\frac{1}{2}$$

四、证明题（共 18 分）

21． 当 $x\to\infty$ 时且

$\lim_{x\to\infty}u(x)=0,\lim_{x\to\infty}v(x)=\infty$，

证明 $\lim_{x\to\infty}\left[1+u(x)\right]^{v(x)}=e^{\lim_{x\to\infty}u(x)v(x)}$

证： $\lim_{x\to\infty}\left[1+u(x)\right]^{v(x)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+u(x)\right]^{\frac{1}{u(x)}\cdot u(x)\cdot v(x)}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}u(x)\cdot v(x)}$$

证毕（利用两个重要极限）

22． 当 $x\to0$ 时，证明以下四个差函数的等价无穷小。

（**1**）$\tan x-\sin x$ 等价于 $\frac{x^3}{2}(x\to0)$

Tanx-sinx 能够提取一个 tanx，从而凑成 Tanx*(1-cosx)，用等价无穷小能够得出 1-cosx~1/2x^2,从而整体等价于 x^3/2;

(总结规律：注意 tanx-sinx 有公共因子 tanx，从而充分利用等价无穷小的规律，在不定积分中也一样能够用此方式化解式子)

（**2**）$\tan x-x$ 等价于 $\frac{x^3}{3}(x\to0)$

（**3**）$x-\sin x$ 等价于 $\frac{x^3}{6}\ (x\to0)$

（**4**）$\arcsin x-x$ 等价于 $\frac{x^3}{6}(x\to0)$

证： $(1)\because\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\frac{x^3}{2}}$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\frac{x^3}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{\frac{x^3}{2}}=1$$

当 $x\to0$ 时，$\tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2}$

$$(2)\because\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{\frac{1}{3}x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{x^2}$$

（0/0 型，先用洛比达法那么进行求导，然后利用 tanx 与 secx 之间的关系转换，再利用等价无穷小）

规律总结：见到 tanx 的方式：

与 sinx 同幂组合，注意看是不是能够提取公因式 tanx;

有平方项看是不是能够转化为 secx（转化的时候把转化式子写出来，要注意是加 1 仍是减 1。。）;

注意利用全能公式（看书温习全能公式，归纳适用条件）

（如何将一个 word 文要分两边显示。。。如何就能够够将如此的文档转化为适应的样子？？？问老哥）

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

当 $x\to0$ 时，$\tan x-x\sim\frac{x^2}{3}$

$$(3)\because\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\frac{1}{6}x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=1$$

当 $x\to0$ 时，$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$

$$(4)\because\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x-x}{\frac{1}{6}x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2\cdot 1}=1$$

当 $x\to 0$ 时，$\arcsin x-x$ 等价于 $\frac{1}{6}x^3$

（规律总结：

三角函数，反三角函数与 X 组合，0/0 型的时候应该先用洛比达法那么求一次导，（求导的时候能够对分母先应用等价无穷小，再求导），然后再应用等价无穷小进行化简，，另外应该专门注意，能够先应用极限的四那么运算，（四那么不仅只有加减，还有乘除，应额外熟悉）,将某些难化简，但极限好求的先进行计算，（一样题目要求求的都是极限存在的，因此能够用此方式解题，假设解出来发觉极限不存在，这说明不能用四那么运算，因此再想别的方式））

五、综合题（每题 10 分，共 20 分）

23．求 $\lim_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-12x+1}\right)$

有根号，无从下手时想到用分母有理化，化成指数次幂除以指数次幂的形式。

解： 原式 $\overset{有理化}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-\left(9x^2+2x+1\right)}{3x+\sqrt{9x^2+2x+1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-1}{3x+\sqrt{9x^2+2x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{9+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-2}{3+3}=-\frac{1}{3}$$

24． 已知 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-mx+8}{x^2-(2+n)x+2n}=\frac{1}{5}$，求常数 m,n 的值。

解：（1） ∵原极限存在且

$$\lim_{x\to 2}\left[x^2-(2+n)x+2n\right]=0$$

$$\therefore\lim_{x\to 2}\left(x^2-mx+8\right)=0,4-2m+8=0$$

$$2m=12,m=6$$

（2）Q $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-(2+n)x+2n}$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=}\lim_{x\to 2}\frac{2x-6}{2x-(2+n)}=\frac{4-6}{4-(2+n)}$$

$$=\frac{-2}{2-n}=\frac{1}{5}$$

$\therefore -10=2-n\quad n=12$ 答 $m=6,n=12$

选做题

求 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

解： 原式 $\overset{1^\infty}{=\!=}\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x\cdot e}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]'}{e}}$$

令 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

$$y'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{\frac{1}{1+x}x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$原式=e^{\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{0-\ln(1+x)}{2x+3x^2}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x+3x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

第三讲：函数的持续性与导数、微分的概念的强化练习题答案

一、单项选择题（每题 4 分，共 24 分）

1． 若 $f(x)$ 为是持续函数，

且 $f(0)=1,f(1)=0$，