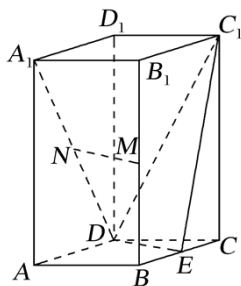


微专题 15 空间角、距离的计算(几何法、向量法)

高考定位 以空间几何体为载体考查空间角(以线面角为主)是高考命题的重点,常与空间线面位置关系的证明相结合,热点为空间角的求解,常以解答题的形式进行考查.高考注重利用向量方法解决空间角问题,但也可利用几何法来求解.

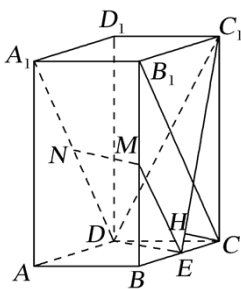
真题演练 感悟高考 练真题 明方向

1.(2019·全国 I 卷)如图,直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.



- (1)证明: $MN \parallel$ 平面 C_1DE ;
(2)求点 C 到平面 C_1DE 的距离.

(1)证明 连接 B_1C, ME .



因为 M, E 分别为 BB_1, BC 的中点, 所以 $ME \parallel B_1C$, 且 $ME = \frac{1}{2}B_1C$.

又因为 N 为 A_1D 的中点,

所以 $ND = \frac{1}{2}A_1D$.

由题设知 $A_1B_1 \perp DC$, 可得 $B_1C \perp A_1D$,

故 $ME \parallel ND$, 因此四边形 $MNDE$ 为平行四边形, 所以 $MN \parallel ED$.

又 $MN \not\subset$ 平面 C_1DE , $ED \subset$ 平面 C_1DE ,

所以 $MN \parallel$ 平面 C_1DE .

(2)解 过点 C 作 C_1E 的垂线, 垂足为 H .

由已知可得 $DE \perp BC$, $DE \perp C_1C$,

又 $BC \cap C_1C = C$, $BC, C_1C \subset$ 平面 C_1CE ,

所以 $DE \perp$ 平面 C_1CE ,

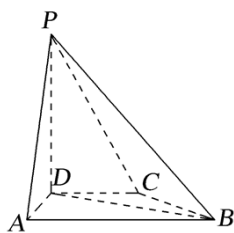
故 $DE \perp CH$. 所以 $CH \perp$ 平面 C_1DE , 故 CH 的长即为点 C 到平面 C_1DE 的距离.

由已知可得 $CE = 1$, $C_1C = 4$,

所以 $C_1E = \sqrt{17}$, 故 $CH = \frac{4\sqrt{17}}{17}$.

从而点 C 到平面 C_1DE 的距离为 $\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

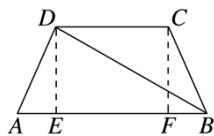
2.(2022·全国甲卷)在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $CD \parallel AB$, $AD = DC = CB = 1$, $AB = 2$, $DP = \sqrt{3}$.



(1)证明: $BD \perp PA$;

(2)求 PD 与平面 PAB 所成的角的正弦值.

(1)证明 在四边形 $ABCD$ 中, 作 $DE \perp AB$ 于点 E , $CF \perp AB$ 于点 F , 如图.



因为 $CD \parallel AB$, $AD = CD = CB = 1$, $AB = 2$,

所以四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,

所以 $AE = BF = \frac{1}{2}$,

故 $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$BD = \sqrt{DE^2 + BE^2} = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } AD^2 + BD^2 = AB^2,$$

所以 $AD \perp BD$.

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PD \perp BD$,

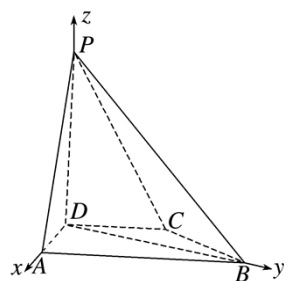
又 $PD \cap AD = D$, $PD, AD \subset$ 平面 PAD ,

所以 $BD \perp$ 平面 PAD .

又因为 $PA \subset$ 平面 PAD ,

所以 $BD \perp PA$.

(2)解 由(1)知, DA, DB, DP 两两垂直,



如图, 以点 D 为原点建立空间直角坐标系,

则 $D(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{3})$,

则 $\vec{AP} = (-1, 0, \sqrt{3})$, $\vec{BP} = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

$\vec{DP} = (0, 0, \sqrt{3})$.

设平面 PAB 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则有 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{AP} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{BP} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} -x + \sqrt{3}z = 0, \\ -\sqrt{3}y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$$

可取 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, 1)$,

$$\text{则 } \cos \langle \mathbf{n}, \vec{DP} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \vec{DP}}{|\mathbf{n}| |\vec{DP}|} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

所以 PD 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

热点聚焦 分类突破 研热点 析考向

热点一 异面直线所成的角

■ 核心归纳

求异面直线所成角的方法

方法一：几何法.用几何法求两条异面直线所成角的步骤为：①利用定义构造角，可固定一条直线，平移另一条直线，或将两条直线同时平移到某个特殊的位置；②证明找到(或作出)的角即为所求角；③通过解三角形来求角.

方法二：空间向量法.用空间向量法求两条异面直线 a, b 所成角 θ 的步骤为：

①求出直线 a, b 的方向向量，分别记为 m, n ；

②计算 $\cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m||n|}$ ；

③利用 $\cos \theta = |\cos \langle m, n \rangle|$ ，以及 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，求出角 θ .

例 1 (2021·全国乙卷)在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， P 为 B_1D_1 的中点，则直线 PB 与 AD_1 所成的角为()

A. $\frac{\pi}{2}$

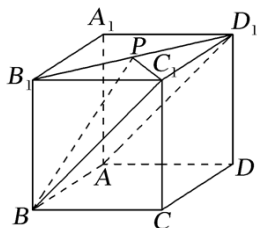
B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

答案 D

解析 法一 如图，连接 C_1P ，因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，且 P 为 B_1D_1 的中点，所以 $C_1P \perp B_1D_1$ ，



又 $C_1P \perp BB_1$ ， $B_1D_1 \cap BB_1 = B_1$ ， $B_1D_1, BB_1 \subset$ 平面 B_1BP ，

所以 $C_1P \perp$ 平面 B_1BP .

又 $BP \subset$ 平面 B_1BP ，所以有 $C_1P \perp BP$.

连接 BC_1 ，则 $AD_1 \parallel BC_1$ ，

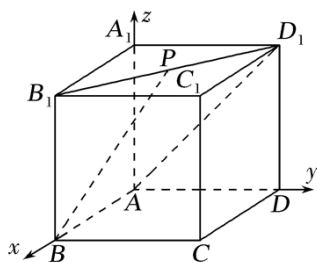
所以 $\angle PBC_1$ 为直线 PB 与 AD_1 所成的角.

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，

则在 $\text{Rt}\triangle C_1PB$ 中， $C_1P = \frac{1}{2}B_1D_1 = \sqrt{2}$ ， $BC_1 = 2\sqrt{2}$ ， $\sin \angle PBC_1 = \frac{PC_1}{BC_1} = \frac{1}{2}$ ，

所以 $\angle PBC_1 = \frac{\pi}{6}$ ，故选 D.

法二 如图，



以 A 为坐标原点， AB ， AD ， AA_1 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系，设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则 $A(0, 0, 0)$ ， $B(2, 0, 0)$ ，

$P(1, 1, 2)$ ， $D_1(0, 2, 2)$ ， $\vec{PB} = (1, -1, -2)$ ， $\vec{AD_1} = (0, 2, 2)$.

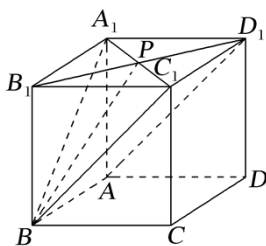
设直线 PB 与 AD_1 所成的角为 θ ，

$$\cos \theta = \frac{|\vec{PB} \cdot \vec{AD_1}|}{|\vec{PB}| |\vec{AD_1}|} = \frac{|-6|}{\sqrt{6} \times \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因为 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，

所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$ ，故选 D.

法三 如图，连接 BC_1 ， A_1B ， A_1P ， PC_1 ，则易知 $AD_1 \parallel BC_1$ ，所以直线 PB 与 AD_1 所成的角等于直线 PB 与 BC_1 所成的角.



由 P 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 B_1D_1 的中点，知 A_1 ， P ， C_1 三点共线，且 P

为 A_1C_1 的中点.

易知 $A_1B=BC_1=A_1C_1$, 所以 $\triangle A_1BC_1$ 为等边三角形,

$$\text{所以 } \angle A_1BC_1 = \frac{\pi}{3},$$

又 P 为 A_1C_1 的中点,

$$\text{所以可得 } \angle PBC_1 = \frac{1}{2} \angle A_1BC_1 = \frac{\pi}{6},$$

故直线 PB 与 AD_1 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$, 故选 D.

易错提醒 (1)利用几何法求异面直线所成的角时, 通过平移直线所得的角不一定是两异面直线所成的角, 也可能是其补角.

(2)用向量法时, 也要注意向量夹角与异面直线所成角的范围不同.

训练 1 (1)(2022·湖北部分学校质检)在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $BB_1=2AB=2BC$, P, Q 分别为 B_1C_1, BC 的中点, 则异面直线 AQ 与 BP 所成角的余弦值是 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{2\sqrt{17}}{17}$

C. $\frac{\sqrt{85}}{85}$

D. $\frac{2\sqrt{85}}{85}$

答案 C

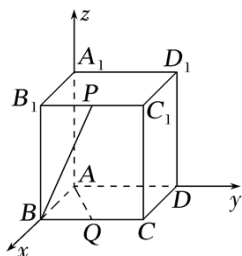
解析 法一 不妨设 $AB=2$, 则 $BC=2, BB_1=4$, 连接 A_1P, A_1B (图略), 则 $A_1P \parallel AQ$,

$\therefore \angle A_1PB$ (或其补角)为异面直线 AQ 与 BP 所成的角.

由勾股定理得 $BP=\sqrt{17}, A_1P=\sqrt{5}, A_1B=2\sqrt{5}$, 在 $\triangle A_1BP$ 中, 由余弦定理的推

论得, $\cos \angle A_1PB = \frac{(\sqrt{17})^2 + (\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{5})^2}{2 \times \sqrt{17} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{85}}{85}$. 故选 C.

法二 如图建立空间直角坐标系, 不妨设 $AB=2$,



则 $BC=2$, $BB_1=4$.

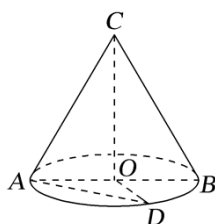
故 $B(2, 0, 0)$, $P(2, 1, 4)$, $Q(2, 1, 0)$,

所以 $\vec{BP}=(0, 1, 4)$, $\vec{AQ}=(2, 1, 0)$,

设直线 AQ 与 BP 所成的角为 θ ,

$$\text{所以 } \cos \theta = |\cos \langle \vec{BP}, \vec{AQ} \rangle| = \left| \frac{1}{\sqrt{17} \times \sqrt{5}} \right| = \frac{\sqrt{85}}{85}.$$

(2)(2022·河南名校大联考)如图,圆锥的底面直径 $AB=2$, 其侧面展开图为半圆, 底面圆的弦 $AD=\sqrt{3}$, 则异面直线 AD 与 BC 所成的角的余弦值为()



A.0

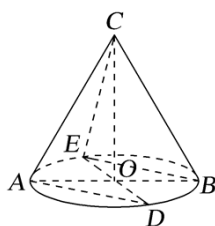
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

答案 C

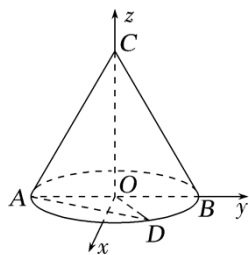
解析 法一 如图,延长 DO 交圆于 E ,连接 BE, CE , 易知 $AD=BE=\sqrt{3}$, $AD \parallel BE$,
 $\therefore \angle EBC$ (或其补角)为异面直线 AD 与 BC 所成的角.



由圆锥侧面展开图为半圆, 易得 $BC=2$, 在 $\triangle BEC$ 中, $BC=CE=2$, $BE=\sqrt{3}$,

$$\therefore \cos \angle EBC = \frac{2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

法二 由圆锥侧面展开图为半圆, 易得 $BC=2$, 又 $BO=1$,



所以 $CO = \sqrt{3}$,

在 $\triangle AOD$ 中, $AO = DO = 1$, $AD = \sqrt{3}$,

由余弦定理得 $\cos \angle AOD = \frac{1+1-3}{2 \times 1 \times 1} = -\frac{1}{2}$,

则 $\angle AOD = \frac{2\pi}{3}$,

以 O 为坐标原点, OB 所在直线为 y 轴, OC 所在直线为 z 轴, 建立空间直角坐

标系如图, 则 $A(0, -1, 0)$, $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, \sqrt{3})$,

所以 $\vec{AD} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$, $\vec{BC} = (0, -1, \sqrt{3})$,

故 $\cos \langle \vec{AD}, \vec{BC} \rangle = \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3} \times 2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$,

又异面直线所成角范围为 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,

故直线 AD 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

热点二 直线与平面所成的角

■ 核心归纳

求直线与平面所成角的方法

方法一: 几何法. 步骤为: ①找出直线 l 在平面 α 上的射影; ②证明所找的角就是所求的角; ③把这个角置于一个三角形中, 通过解三角形来求角.

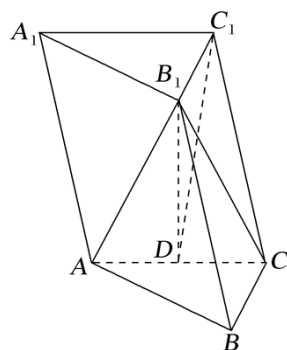
方法二: 空间向量法. 步骤为:

①求出平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与直线 AB 的方向向量 $\vec{AB}$;

② 计算 $\cos \langle \vec{AB}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{n}}{|\vec{AB}| |\vec{n}|}$;

③ 利用 $\sin \theta = |\cos \langle \vec{AB}, \vec{n} \rangle|$, 以及 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 求出角 θ .

例 2 (2022·南京一模) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=13$, $AB=8$, $BC=6$, $AB \perp BC$, $AB_1=B_1C$, D 为 AC 的中点, 平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABC .



(1) 求证: $B_1D \perp$ 平面 ABC ;

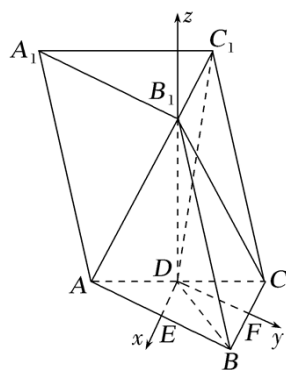
(2) 求直线 C_1D 与平面 AB_1C 所成角的正弦值.

(1) 证明 因为 $AB_1=B_1C$, D 为 AC 的中点, 所以 $B_1D \perp AC$.

又平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABC , 平面 $AB_1C \cap$ 平面 $ABC=AC$, $B_1D \subset$ 平面 AB_1C ,

所以 $B_1D \perp$ 平面 ABC .

(2) 解 法一 在平面 ABC 内, 过点 D 作 BC 的平行线, 交 AB 于点 E , 过点 D 作 AB 的平行线, 交 BC 于点 F ,



连接 DE , DF , BD .

由(1)知 $B_1D \perp$ 平面 ABC ,

所以 $B_1D \perp AC$, $B_1D \perp BD$.

因为 $AB \perp BC$,

所以 $DE \perp DF$,

故以 $\{\vec{DE}, \vec{DF}, \vec{DB_1}\}$ 为基底建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.

因为 $AB=8$, $BC=6$, $AB \perp BC$,

所以 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$, $BD = \frac{1}{2}AC = 5$.

又 $AA_1 = BB_1 = 13$, $AB \perp BC$,

所以 $B_1D = \sqrt{BB_1^2 - BD^2} = 12$.

易得 $D(0, 0, 0)$, $A(3, -4, 0)$, $B(3, 4, 0)$, $C(-3, 4, 0)$, $B_1(0, 0, 12)$,

则 $\vec{AC} = (-6, 8, 0)$, $\vec{BC} = (-6, 0, 0)$, $\vec{B_1C} = (-3, 4, -12)$.

设点 $C_1(x, y, z)$, 则 $\vec{B_1C_1} = (x, y, z-12)$,

由 $\vec{BC} = \vec{B_1C_1}$,

得 $(-6, 0, 0) = (x, y, z-12)$,

所以 $\begin{cases} x = -6, \\ y = 0, \\ z = 12, \end{cases}$ 即 $C_1(-6, 0, 12)$,

所以 $\vec{C_1D} = (6, 0, -12)$.

设平面 AB_1C 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{AC} = -6x_1 + 8y_1 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{B_1C} = -3x_1 + 4y_1 - 12z_1 = 0, \end{cases}$

得 $3x_1 = 4y_1$, $z_1 = 0$.

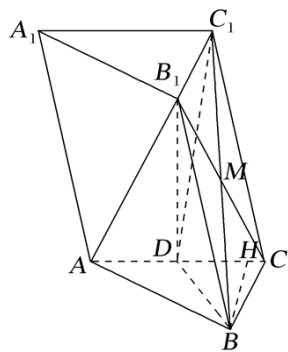
不妨取 $x_1 = 4$, 则 $y_1 = 3$, 得平面 AB_1C 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (4, 3, 0)$.

设直线 C_1D 与平面 AB_1C 所成的角为 θ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } \sin \theta &= |\cos \langle \mathbf{n}, \vec{C_1D} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{n} \cdot \vec{C_1D}}{|\mathbf{n}| \cdot |\vec{C_1D}|} \right| = \left| \frac{4 \times 6 + 3 \times 0 + 0 \times (-12)}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} \times \sqrt{6^2 + 0^2 + (-12)^2}} \right| \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{25}. \end{aligned}$$

$\therefore$ 直线 C_1D 与平面 AB_1C 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{25}$.

法二 连接 BC_1 ，交 B_1C 于点 M ，易知 $BM=MC_1$ ，所以点 C_1 到平面 AB_1C 的距离 d 和点 B 到平面 AB_1C 的距离相等.



过点 B 作 $BH \perp AC$ ，垂足为 H .

又平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABC ，平面 $AB_1C \cap$ 平面 $ABC = AC$ ， $BH \subset$ 平面 ABC ，

所以 $BH \perp$ 平面 AB_1C ，则 BH 为点 B 到平面 AB_1C 的距离.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

因为 $AB=8$ ， $BC=6$ ， $AB \perp BC$ ，

所以 $AC=10$ ，则 $BH = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{24}{5}$ ，

所以 $d = BH = \frac{24}{5}$.

由(1)知 $B_1D \perp$ 平面 ABC ，

又 $BC \subset$ 平面 ABC ，所以 $B_1D \perp BC$.

又 $B_1C_1 \parallel BC$ ，所以 $B_1D \perp B_1C_1$ ，

则 $\triangle DB_1C_1$ 为直角三角形.

连接 BD ，则 $B_1D \perp BD$.

因为 D 为 AC 的中点，所以 $BD = \frac{1}{2}AC = 5$.

又 $AA_1 = BB_1 = 13$ ，所以 $B_1D = 12$.

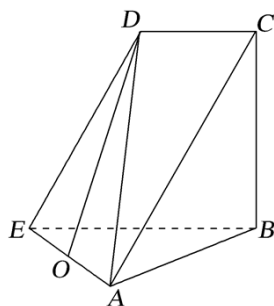
又 $B_1C_1 = BC = 6$ ，所以 $C_1D = 6\sqrt{5}$.

设直线 C_1D 与平面 AB_1C 所成的角为 θ ，

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{d}{C_1D} = \frac{\frac{24}{5}}{6\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{25}.$$

规律方法 (1)几何法求线面角的关键找出线面角(重点是找垂线与射影),然后在三角形中应用余弦定理(勾股定理)求解;(2)向量法求线面角时要注意:线面角 θ 与直线的方向向量 $\boldsymbol{a}$ 和平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 所成的角 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \rangle$ 的关系是 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \rangle + \theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \rangle - \theta = \frac{\pi}{2}$, 所以应用向量法求的是线面角的正弦值, 而不是余弦值.

训练 2 (2022·湖北十校联考)如图, 在四棱锥 $A-BCDE$ 中, $CD \parallel BE$, $CD = \frac{1}{2}EB = 1$, $CB \perp BE$, $AE = AB = BC = \sqrt{2}$, $AD = \sqrt{3}$, O 是 AE 的中点.



(1)求证: $DO \parallel$ 平面 ABC ;

(2)求 DA 与平面 ABC 所成角的正弦值.

(1)证明 法一 取 AB 的中点为 F , 连接 CF , OF (图略),

因为 O , F 分别为 AE , AB 的中点,

所以 $OF \parallel BE$, 且 $OF = \frac{1}{2}BE$.

又 $CD \parallel BE$, $CD = \frac{1}{2}EB$,

所以 $OF \parallel CD$, 且 $OF = CD$,

所以四边形 $OFCD$ 为平行四边形,

所以 $DO \parallel CF$,

又 $CF \subset$ 平面 ABC , $DO \not\subset$ 平面 ABC ,

所以 $DO \parallel$ 平面 ABC .

法二 取 BE 的中点为 G , 连接 OG , DG (图略), 则 $CD \parallel GB$, 且 $CD = GB$,

所以四边形 $DGBC$ 为平行四边形,

所以 $DG \parallel BC$,

又 $BC \subset \text{平面 } ABC$, $DG \not\subset \text{平面 } ABC$,

所以 $DG \parallel \text{平面 } ABC$.

因为 O, G 分别为 AE, BE 的中点,

所以 $OG \parallel AB$,

又 $AB \subset \text{平面 } ABC$, $OG \not\subset \text{平面 } ABC$,

所以 $OG \parallel \text{平面 } ABC$,

又 $OG \cap DG = G$, $OG, DG \subset \text{平面 } DOG$,

所以平面 $DOG \parallel \text{平面 } ABC$,

又 $DO \subset \text{平面 } DOG$,

所以 $DO \parallel \text{平面 } ABC$.

(2)解 法一 取 EB 的中点为 G , 连接 AG, DG , 易得 $DG \parallel BC$.

因为 $AE = AB = \sqrt{2}$, $BE = 2$,

所以 $AE^2 + AB^2 = BE^2$,

所以 $AB \perp AE$, $\triangle ABE$ 为等腰直角三角形, 所以 $AG \perp BE$, $AG = 1$,

又 $AD = \sqrt{3}$, $DG = BC = \sqrt{2}$,

所以 $AG^2 + DG^2 = AD^2$, 所以 $DG \perp AG$.

又 $BE \perp AG$, $BE \cap DG = G$, $BE, DG \subset \text{平面 } BCDE$, 所以 $AG \perp \text{平面 } BCDE$.

记 h 为点 D 到平面 ABC 的距离, 连接 BD , 则 $V_{D-ABC} = V_{A-BCD}$,

$$\text{即 } \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot AG,$$

因为 $BC \subset \text{平面 } BCDE$, 所以 $BC \perp AG$,

又 $CB \perp BE$, $BE \cap AG = G$, $BE, AG \subset \text{平面 } ABE$, 所以 $BC \perp \text{平面 } ABE$,

又 $AB \subset \text{平面 } ABE$,

所以 $BC \perp AB$,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1,$$

$$\text{又 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times BC \times CD = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

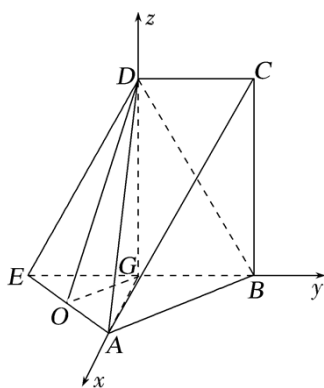
$$\text{所以 } h = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

设 DA 与平面 ABC 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{h}{AD} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$\therefore DA$ 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

法二 如图, 取 EB 的中点为 G , 连接 AG , OG , DG , 由(2)法一可知 $AG \perp BE$, $AB \perp AE$, $BC \perp$ 平面 ABE , $BC \parallel DG$, 所以 $DG \perp$ 平面 ABE .



以 G 为坐标原点, 以 $\vec{GA}$, $\vec{GB}$, $\vec{GD}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向建立空间直角坐标系,

则 $G(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $D(0, 0, \sqrt{2})$, $E(0, -1, 0)$, $\vec{AD} = (-1, 0, \sqrt{2})$.

因为 $AE \subset$ 平面 ABE , 所以 $BC \perp AE$,

又 $AB \perp AE$, $BC \cap AB = B$, $BC, AB \subset$ 平面 ABC , 所以 $AE \perp$ 平面 ABC ,

故平面 ABC 的一个法向量为

$$\vec{AE} = (-1, -1, 0).$$

设 DA 与平面 ABC 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{AD}, \vec{AE} \rangle| = \left| \frac{\vec{AD} \cdot \vec{AE}}{|\vec{AD}| \cdot |\vec{AE}|} \right| = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$\therefore DA$ 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

热点三 二面角

■核心归纳

求二面角的方法

方法一：几何法.步骤为：①找出二面角的平面角(以二面角的棱上任意一点为端点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角就是二面角的平面角)；②证明所找的角就是要求的角；③把这个平面角置于一个三角形中，通过解三角形来求角.求二面角的平面角的口诀：点在棱上，边在面内，垂直于棱，大小确定.

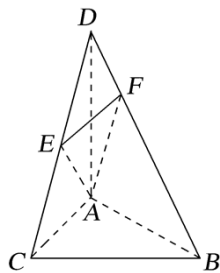
方法二：空间向量法.步骤为：①求两个平面 α, β 的法向量 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ ；②计算

$$\cos \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}| |\boldsymbol{n}|};$$

③根据图形和计算结果判断 θ 是锐角、直角，还是钝角，

从而得出 θ 与 $\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle$ 是相等关系还是互补关系.

例 3 (2022·郑州质测)如图，在三棱锥 $D-ABC$ 中， $DA \perp$ 底面 ABC ， $AC=BC=DA=1$ ， $AB=\sqrt{2}$ ， E 是 CD 的中点，点 F 在 DB 上，且 $EF \perp DB$.



(1)证明： $DB \perp$ 平面 AEF ；

(2)求二面角 $A-DB-C$ 的大小.

法一 (1)证明 $\because DA \perp$ 平面 ABC ，且 $BC \subset$ 平面 ABC ， $\therefore DA \perp BC$.

$$\because AC=BC=1, AB=\sqrt{2},$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore AC \perp BC.$$

$$\because DA \cap AC = A, DA, AC \subset \text{平面 } DAC,$$

$$\therefore BC \perp \text{平面 } DAC,$$

又 $AE \subset$ 平面 DAC ,

$$\therefore BC \perp AE.$$

$$\because DA=AC, E \text{ 是 } CD \text{ 的中点},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/416153240040010104>