

北京市门头沟区 2023-2024 学年高三下学期 3 月综合练习(一
模) 数学试卷

学校:_____ 姓名:_____ 班级:_____ 考号:_____

一、单选题

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{x | 1 < x < 4\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

A. $\{2, 3\}$

B. $\{0, 1, 2\}$

C. $\{1, 2\}$

D. $\{1, 2, 3\}$

【答案】A

【分析】求 $A \cap B$, 判断选项.

【详解】根据题意可得, $A \cap B = \{2, 3\}$,

故选: A

2. 在复平面内, 复数 z 满足 $iz = 3 - 4i$, 则 z 的虚部为 ()

A. $3i$

B. $-3i$

C. 3

D. -3

【答案】D

【分析】由 $iz = 3 - 4i$, 化简得到 $z = -4 - 3i$ 求解.

【详解】解: 因为复数 z 满足 $iz = 3 - 4i$,

所以 $z = \frac{3 - 4i}{i} = -4 - 3i$,

所以 z 的虚部为 -3,

故选: D

3. 下列函数中, 既是奇函数又在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

A. $y = x^{\frac{1}{2}}$

B. $y = \frac{1}{x}$

C. $y = \tan x$

D. $y = x|x|$

【答案】D

【分析】

根据基本初等函数的单调性与奇偶性判断即可.

【详解】对于 A: $y = x^{\frac{1}{2}}$ 定义域为 $[0, +\infty)$, 为非奇非偶函数, 故 A 错误;

对于 B: $y = \frac{1}{x}$ 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 为奇函数, 但是函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

故 B 错误;

对于 C: $y = \tan x$ 为奇函数, 定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 但是函数在 $(0, +\infty)$ 上不单调, 故 C 错误;

对于 D: 令 $y = f(x) = x|x|$ 定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(-x) = -x|-x| = -x|x| = -f(x)$,

所以 $y = x|x|$ 为奇函数, 且当 $x > 0$ 时 $y = x^2$, 函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 D 正确.

故选: D

4. 已知双曲线 C 经过点 $(0, 1)$, 离心率为 2, 则 C 的标准方程为 ()

A. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

B. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

C. $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$

D. $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$

【答案】C

【分析】

根据题意设出双曲线方程, 在根据离心率公式, 即可求出.

【详解】由题意知, 双曲线的焦点在 y 轴上,

设双曲线的方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

则 $a = 1$,

因为 $e = \frac{c}{a} = 2$, 所以 $c = 2$,

所以 $b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$,

所以双曲线的标准方程为 $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$.

故选: C

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_3 = 30, a_8 = 4$, 则 $S_9 =$ ()

A. 54

B. 63

C. 72

D. 135

【答案】B

【分析】

根据给定条件, 利用等差数列的性质求出 a_2 , 再求出 S_9 .

【详解】等差数列 $\{a_n\}$ 中, 由 $S_3 = 30$, 得 $3a_2 = a_1 + a_2 + a_3 = 30$, 解得 $a_2 = 10$, 而 $a_8 = 4$,

$$\text{所以 } S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9(a_2 + a_8)}{2} = 63.$$

故选：B

6. 设 $a > 0, b > 0$, 则 “ $\lg(a+b) > 0$ ” 是 “ $\lg(ab) > 0$ ” 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【分析】

利用特殊值法，和对数函数的性质与逻辑关系进行判断选项.

【详解】若 $a > 0, b > 0$, 由 $\lg(a+b) > 0$, 取 $a = 3, b = \frac{1}{3}$, 但是 $\lg(ab) = 0$,

而 $\lg(ab) > 0$, 则 $ab > 1$, 又 $a > 0, b > 0$, 则 a, b 中至少有一个大于 1,

若都小于等于 1, 根据不等式的性质可知, 乘积也小于等于 1, 与乘积大于 1 矛盾,

则 $a+b > 1$, 故 $\lg(a+b) > 0$,

所以 $\lg(a+b) > 0$ 是 $\lg(ab) > 0$ 的必要而不充分条件.

故选：B

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 120^\circ, a = \sqrt{19}, b - c = 1$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$
C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

【答案】A

【分析】

先利用余弦定理求出 c , 再利用面积公式求解.

【详解】 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(c+1)^2 + c^2 - 19}{2(c+1)c} = -\frac{1}{2},$

解得 $c = 2$, 则 $b = 3$,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

故选：A.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4, AC = 3$, 且 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ()

- A. 16 B. -16 C. 20 D. -20

【答案】B

【分析】

将 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ 两边平方，即可得到 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ，再由数量积的运算律计算可得.

【详解】因为 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ ，所以 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2$ ，

$$\text{即 } \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2,$$

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ，即 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ，

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 = 0 - 4^2 = -16.$$

故选：B

9. 在平面直角坐标系中，记 d 为点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 到直线 $kx - y - 3k + 4 = 0$ 的距离，则当 θ, k 变化时， d 的最大值与最小值之差为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

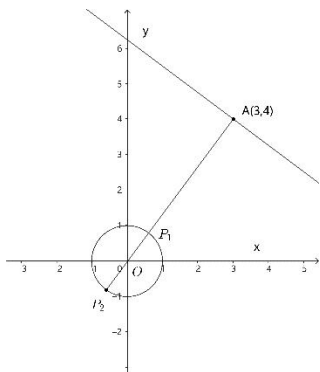
D. 6

【答案】D

【分析】

由直线方程得到其过定点 $A(3,4)$ ，而 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 可看成单位圆上的一点，故可将求点 P 到直线之距转化为求圆心到直线之距，要使距离最大，需使直线 $l \perp OA$ ，此时最大距离即圆心到点 $A(3,4)$ 的距离再加上半径即得.

【详解】由直线 $l: kx - y - 3k + 4 = 0$ 整理得 $k(x-3) - y + 4 = 0$ ，可知直线经过定点 $A(3,4)$ ，
而由 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 知，点 P 可看成圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上的动点，
于是求点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 到直线 $kx - y - 3k + 4 = 0$ 的距离最值可通过求圆心到直线的距离得到.



如图知当直线 l 与圆相交时， $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 到直线 $kx - y - 3k + 4 = 0$ 的距离最小值为

$$d_{\min} = 0,$$

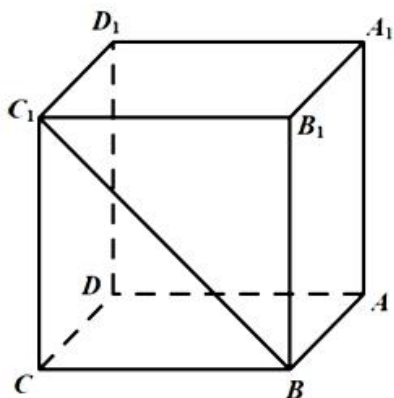
要使点 P 到直线 l 距离最大，需使圆心 $O(0,0)$ 到直线 l 距离最大，

又因直线 l 过定点 $A(3,4)$ ，故当且仅当 $l \perp OA$ 时距离最大，（若直线 l 与 OA 不垂直，则过点 O 作直线 l 的垂线段长必定比 OA 短）

此时 $|OA|=5$ ，故点 P 到直线 l 距离的最大值为 $d_{\max} = |OA| + r = 5 + 1 = 6$ ，即 d 的最大值与最小值之差为 $6 - 0 = 6$ 。

故选：D.

10. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 为线段 BC_1 上的动点，则下列结论正确的个数是（ ）



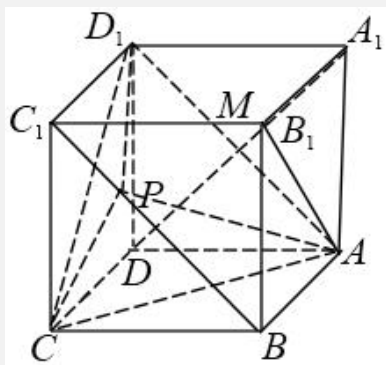
- (1) 三棱锥 $A-D_1PC$ 的体积为定值；
- (2) 直线 AP 与平面 ACD_1 所成的角的大小不变；
- (3) 直线 AP 与 A_1D 所成的角的大小不变；
- (4) $A_1C \perp DP$ 。

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【分析】由已知可得 $BC_1 \parallel$ 面 ACD_1 ，可得 BC_1 上任意一点到平面 AD_1C 的距离相等，即可判断 (1)；点 P 在直线 BC_1 上运动时，直线 AB 与平面 AD_1C 所成的角和直线 AC_1 与平面 AD_1C 所成的角不相等，即可判断 (2)；根据线面垂直的判定定理可证得 $A_1D \perp$ 平面 ABC_1D_1 ，再由线面垂直的性质即可判断 (3)；由线面垂直的判定定理可证 $A_1C \perp$ 平面 BDC_1 ，即可判断 (4)

【详解】



对于 (1), 因为 $BC_1 \parallel AD_1$, $BC_1 \not\subset \text{面 } ACD_1$, $AD_1 \subset \text{面 } ACD_1$, 所以 $BC_1 \parallel \text{面 } ACD_1$,

所以 BC_1 上任意一点到平面 AD_1C 的距离相等, 又 $V_{A-CPD_1} = V_{P-CAD_1}$, 所以三棱锥 $A-D_1PC$ 的体积不变, 故正确;

对于 (2), 点 P 在直线 BC_1 上运动时, 直线 AB 与平面 AD_1C 所成的角和直线 AC_1 与平面 AD_1C 所成的角不相等, 故错误;

对于 (3), 设 $AD_1 \cap A_1D = M$, 则 $AD_1 \perp A_1D$, 又 $AB \perp \text{面 } AA_1D_1D$, 所以 $AB \perp A_1D$, 又 $AB \cap AD_1 = A$, 所以 $A_1D \perp \text{平面 } ABC_1D_1$,

又 $AP \subset \text{平面 } ABC_1D_1$, 所以 $A_1D \perp AP$, 所以点 P 在直线 BC_1 上运动时, 直线 AP 与直线 A_1D 所成的角的大小不变, 故正确;

对于 (4), 因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体, 则 $AA_1 \perp \text{平面 } ABCD$, 且 $BD \subset \text{平面 } ABCD$, 则 $AA_1 \perp BD$, 又 $AC \perp BD$, 且 $AA_1 \cap AC = A$, $AA_1, AC \subset \text{平面 } A_1AC$,

所以 $BD \perp \text{平面 } A_1AC$, 且 $A_1C \subset \text{平面 } A_1AC$, 所以 $BD \perp A_1C$,

又 $A_1B_1 \perp \text{平面 } BB_1C_1C$, 且 $BC_1 \subset \text{平面 } BB_1C_1C$, 所以 $A_1B_1 \perp BC_1$, 又 $B_1C \perp BC_1$,

且 $A_1B_1 \cap B_1C = B_1$, $A_1B_1, B_1C \subset \text{平面 } A_1B_1C$, 所以 $BC_1 \perp \text{平面 } A_1B_1C$,

且 $A_1C \subset \text{平面 } A_1B_1C$, 所以 $BC_1 \perp A_1C$,

又 $BC_1 \cap BD = B$, $BC_1, BD \subset \text{平面 } BDC_1$, 所以 $A_1C \perp \text{平面 } BDC_1$,

且 $DP \subset \text{平面 } BDC_1$, 所以 $A_1C \perp DP$, 故正确;

故选: C

二、填空题

11. $\left(\frac{1}{x}-2x\right)^6$ 的展开式中常数项为_____ (用数字作答)

【答案】 -160

【分析】

根据题意，由题意可得二项式展开式的通项公式，代入计算，即可得到结果.

【详解】 因为 $\left(\frac{1}{x}-2x\right)^6$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_6^r \left(\frac{1}{x}\right)^{6-r} \cdot (-2x)^r = (-2)^r \cdot C_6^r x^{2-6r}$,

令 $2r-6=0$ 可得 $r=3$ ，则展开式中的常数项为 $T_4 = (-2)^3 \cdot C_6^3 \cdot x^0 = -160$.

故答案为：-160

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，点 M 在 C 上，若 $|MF| = 3$ ，则 M 到直线 $x = -2$ 的距离为：_____.

【答案】 4

【分析】

由抛物线的性质得到 M 到 C 的准线的距离，然后解出 M 的横坐标，最后求出 M 到直线 $x = -2$ 的距离即可.

【详解】 由点 M 在 C 上， $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线为 $x = -1$ ，知 M 到直线 $x = -1$ 的距离等于 $|MF|$.

而 $|MF| = 3$ ，故 M 到直线 $x = -1$ 的距离为 3.

设 M 的坐标为 (x_0, y_0) ，由 M 到直线 $x = -1$ 的距离为 3，知 $|x_0 + 1| = 3$ ，所以 $x_0 = 2$ 或

$x_0 = -4$. 而 $x_0 = \frac{y_0^2}{4} \geq 0$ ，故 $x_0 = 2$.

所以 M 到直线 $x = -2$ 的距离为 $|x_0 + 2| = |2 + 2| = 4$.

故答案为：4.

13. 若函数 $f(x) = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + A \cos x$ ($A > 0$) 的最大值为 $\sqrt{2}$ ，则 $A =$ _____，

$f\left(\frac{\pi}{12}\right) =$ _____.

【答案】 1 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【分析】 利用二倍角公式和辅助角公式，求解

【详解】 $f(x) = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + A \cos x = \sin x + A \cos x = \sqrt{1+A^2} \sin(x+\varphi)$,

由最大值为 $\sqrt{2}$ ， $A > 0$ ，则 $A = 1$,

$$\text{所以 } f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\text{故答案为: } 1; \frac{\sqrt{6}}{2}$$

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, S_n 为其前 n 项和, $a_1 a_3 = 16$, $S_3 = 14$, 则 $a_2 =$ _____; 记 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n (n = 1, 2, \dots)$, 若存在 $n_0 \in \mathbf{N}^*$ 使得 T_n 最大, 则 n_0 的值为_____.

【答案】 4 3 或 4

【分析】由已知利用等比数列的性质可求 $a_2 = 4$, 又 $S_3 = 14$, 可得 $\begin{cases} a_1 \cdot a_3 = 16 \\ a_1 + a_3 = 10 \end{cases}$, 解得

$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_3 = 8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_3 = 2 \end{cases}$, 即可求得 a_2 , 分类讨论可求 q 的值, 即可求解数列的各项, 即可求解.

【详解】等比数列 $\{a_n\}$ 中, 公比 $q > 0$; 由 $a_1 \cdot a_3 = 16 = a_2^2$, 所以 $a_2 = 4$, 又 $S_3 = 14$,

$$\text{所以 } \begin{cases} a_1 \cdot a_3 = 16 \\ a_1 + a_3 = 10 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_3 = 8 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = 8 \\ a_3 = 2 \end{cases};$$

$$\text{若 } \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_3 = 8 \end{cases} \text{ 时, 可得 } q = 2, \text{ 则 } a_2 = a_1 q = 2 \times 2 = 4,$$

且 $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$ 的值为 $2, 4, 8, 16, \dots$, 可知数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 且各项均大于 1,

所以不会存在 n_0 使得 $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$ 的乘积最大(舍去);

$$\text{若 } \begin{cases} a_1 = 8 \\ a_3 = 2 \end{cases} \text{ 时, 可得 } q = \frac{1}{2}, \text{ 则 } a_2 = a_1 q = 8 \times \frac{1}{2} = 4,$$

且 $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$ 的值为 $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$,

可知数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 从第 5 项起各项小于 1 且为正数,

前 4 项均为正数且大于等于 1,

所以存在 $n_0 = 3$ 或 $n_0 = 4$, 使得 $8 \times 4 \times 2 \times 1$ 的乘积最大,

综上, 可得 n_0 的一个可能值是 3 或 4.

故答案为: 4; 3 或 4

15. 设 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1 \\ x^2 - 3ax + 2a^2, & x \geq 1 \end{cases}$, 给出下列四个结论:

- ① 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{4}$;
- ② 存在 $a > 0$, 使得 $f(x)$ 只有一个零点;
- ③ 存在 $a > 0$, 使得 $f(x)$ 有三个不同零点;
- ④ $\forall a \in (-\infty, 0)$, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是单调递增函数.

其中所有正确结论的序号是_____.

【答案】②③

【分析】

分析函数在 $(-\infty, 1)$ 上的取值范围即可判断①, 对零点在 $(-\infty, 1)$ 、 $[1, +\infty)$ 讨论, 即可判断②, ③, 使得函数在各段单调性, 且在断点左侧的函数值不大于断点右侧函数值, 即可判断④.

【详解】因为 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1 \\ x^2 - 3ax + 2a^2, & x \geq 1 \end{cases}$,

当 $x < 1$ 时 $f(x) = 2^x - a$, 则函数在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增,

又函数 $y = x^2 - 3ax + 2a^2$ 的对称轴为 $x = \frac{3a}{2}$,

对于①: 当 $a = 1$ 时 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x < 1 \\ x^2 - 3x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$,

当 $x < 1$ 时 $0 < 2^x < 2$, 所以 $-1 < 2^x - 1 < 1$, 即 $-1 < f(x) < 1$, 故①错误;

对于②: 当零点位于 $(-\infty, 1)$ 时, 则 $\begin{cases} 2^1 - a > 0 \\ a > 0 \end{cases}$, 解得 $0 < a < 2$,

此时 $0 < \frac{3a}{2} < 3$,

若 $0 < \frac{3a}{2} \leq 1$, 即 $0 < a \leq \frac{2}{3}$ 时 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

此时只需 $f(1) = 1 - 3a + 2a^2 > 0$, 解得 $a > 1$ 或 $a < \frac{1}{2}$, 所以 $0 < a < \frac{1}{2}$,

若 $\frac{3a}{2} > 1$, 即 $a > \frac{2}{3}$ 时, 此时 $\Delta = 9a^2 - 8a^2 = a^2 > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上至少还有 1 个零点, 故不符合题意,

所以 $0 < a < \frac{1}{2}$;

当零点位于 $[1, +\infty)$ ，此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上无零点，则 $2-a \leq 0$ ，解得 $a \geq 2$ ，

此时 $\Delta > 0$ 且 $\frac{3a}{2} > 1$ ，

要使函数 $f(x)$ 只有一个零点，则只需 $f(1) = 1 - 3a + 2a^2 < 0$ ，解得 $\frac{1}{2} < a < 1$ ，

又 $a > 2$ ，显然 a 无解，所以此种情况不符合题意；

综上可得当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 只有一个零点，故②正确；

对于③：使得 $f(x)$ 有三个不同零点，则必然是在 $(-\infty, 1)$ 上有一个零点，在 $[1, +\infty)$ 上有两个零点，

$$\text{则} \begin{cases} 2^1 - a > 0 \\ a > 0 \\ \frac{3a}{2} > 1 \\ f(1) = 1 - 3a + 2a^2 \geq 0 \end{cases}, \text{解得 } 1 \leq a < 2,$$

所以当 $1 \leq a < 2$ 时 $f(x)$ 有三个不同零点，故③正确；

对于④：若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是单调递增函数，则 $\begin{cases} 2^1 - a \leq 1 - 3a + 2a^2 \\ \frac{3a}{2} \leq 1 \end{cases}$ ，解得 $a \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ，

所以当 $a \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 时 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是单调递增函数，故④错误。

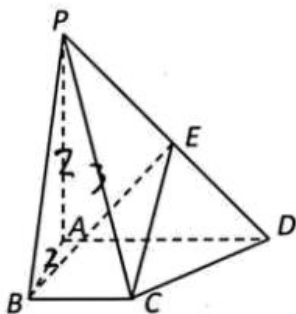
故答案为：②③

【点睛】关键点点睛：第②问关键是分零点所在区间讨论，结合二次函数的性质得到不等式组，求出参数的取值范围，第③问关键是分析得到在 $(-\infty, 1)$ 上有一个零点，在 $[1, +\infty)$ 上有两个零点。

三、解答题

16. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB \perp AD$ ， $AD \parallel BC$ ， $BC = \frac{1}{2}AD$ ，

$PA = AB = 2$ ， E 为棱 PD 的中点。



(1) 求证： $EC \parallel$ 平面 PAB ；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/416211204021010111>