

四川省绵阳市重点中学 2023 年高三下学期第四次周练数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

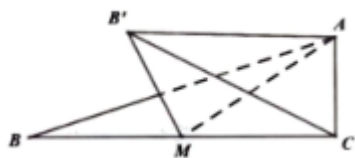
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化。每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”。如图就是一重卦。在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦至少有 2 个阳爻的概率是（ ）



- A. $\frac{7}{64}$ B. $\frac{11}{32}$ C. $\frac{57}{64}$ D. $\frac{11}{16}$

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 M 是边 BC 的中点，将 $\triangle ABC$ 沿着 AM 翻折成 $\triangle AB'C$ ，且点 B' 不在平面 ABC 内，点 P 是线段 $B'C$ 上一点。若二面角 $B'-AM-C$ 与二面角 $B'-PM-C$ 的平面角相等，则直线 AP 经过 $\triangle AB'C$ 的（ ）



- A. 重心 B. 垂心 C. 内心 D. 外心

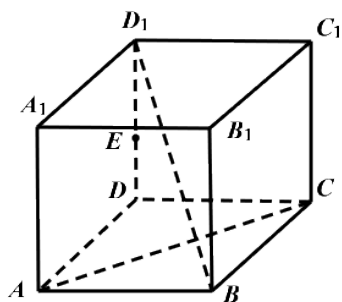
3. 若圆锥轴截面面积为 $2\sqrt{3}$ ，母线与底面所成角为 60° ，则体积为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

4. 已知函数 $f(x) = x^3 + \sin x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ，若 $f(2a-1) > f(0)$ ，则 a 的取值范围为（ ）

- A. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $(0, 1)$ C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

5. 如图，点 E 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 DD_1 的中点，点 F, M 分别在线段 AC, BD_1 （不包含端点）上运动，则（ ）



- A. 在点 F 的运动过程中, 存在 $EF \parallel BC_1$
- B. 在点 M 的运动过程中, 不存在 $B_1M \perp AE$
- C. 四面体 $EMAC$ 的体积为定值
- D. 四面体 FA_1C_1B 的体积不为定值

6. 已知角 α 的终边与单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 交于点 $P\left(\frac{1}{3}, y_0\right)$, 则 $\cos 2\alpha$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $-\frac{7}{9}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

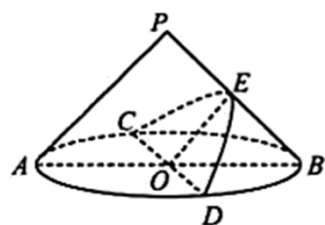
7. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果, 哥德巴赫猜想的内容是: 每个大于 2 的偶数都可以表示为两个素数的和, 例如: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, 那么在不超过 18 的素数中随机选取两个不同的数, 其和等于 16 的概率为 ()

- A. $\frac{1}{21}$ B. $\frac{2}{21}$ C. $\frac{1}{15}$ D. $\frac{2}{15}$

8. 设集合 $A = \{x \mid x < 3\}$, $B = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(2, 3)$ C. $(-\infty, 0) \cup (2, 3)$ D. $(-\infty, 3)$

9. 如图, 圆锥底面半径为 $\sqrt{2}$, 体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$, AB 、 CD 是底面圆 O 的两条互相垂直的直径, E 是母线 PB 的中点, 已知过 CD 与 E 的平面与圆锥侧面的交线是以 E 为顶点的抛物线的一部分, 则该抛物线的焦点到圆锥顶点 P 的距离等于 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

10. 已知 $p: \exists x_0 > 1, \log_{\frac{1}{2}} x_0 > \frac{1}{2}$; $q: \forall x \in R, e^x > x$, 则下列说法中正确的是 ()

- A. $p \vee q$ 是假命题
B. $p \wedge q$ 是真命题
C. $p \vee (\neg q)$ 是真命题
D. $p \wedge (\neg q)$ 是假命题

11. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 满足 $|\vec{b}| = 2, |\vec{a} + \vec{b}| = 1, \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ 且 $\lambda + 2\mu = 1$, 若对每一个确定的向量 $\vec{a}$, 记 $|\vec{c}|$ 的最小值为 m , 则当 $\vec{a}$ 变化时, m 的最大值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{2}$
D. 1

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 点 $P(x_0, y_0)$ 是直线 $bx - ay + 4a = 0$ 上任意一点, 若圆

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$ 与双曲线 C 的右支没有公共点, 则双曲线的离心率取值范围是 ().

- A. $(1, 2]$
B. $(1, 4]$
C. $[2, +\infty)$
D. $[4, +\infty)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 将含有甲、乙、丙的 6 人平均分成两组参加“文明交通”志愿者活动, 其中一组指挥交通, 一组分发宣传资料, 则甲、乙至少一人参加指挥交通且甲、丙不在同一个组的概率为_____.

14. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 并且当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $f(x) = 2^x - 1$, 则 $f(123) =$ _____

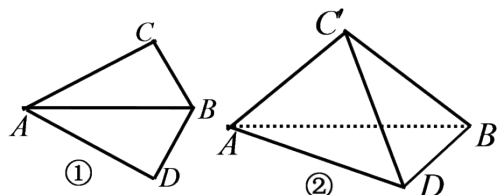
15. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且 $3a_2, \frac{1}{2}a_3, 4a_1$ 成等差数列, 则

$\log_2(a_3 + a_4) - \log_2(a_4 + a_5) =$ _____.

16. 已知一个圆锥的底面积和侧面积分别为 9π 和 15π , 则该圆锥的体积为_____

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在平面四边形 $ACBD$ (图①) 中, $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 均为直角三角形且有公共斜边 AB , 设 $AB = 2$, $\angle BAD = 30^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 沿 AB 折起, 构成如图②所示的三棱锥 $C' - ABD$, 且使 $C'D = \sqrt{2}$.



- (1) 求证: 平面 $C'AB \perp$ 平面 DAB ;
(2) 求二面角 $A - C'D - B$ 的余弦值.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - 2 \ln x + 3x - 5$, $g(x) = \ln x + \frac{2x-a}{x} + \frac{a}{x^2}$.

(1) 求证: $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上有且仅有一个零点 x_0 , 且 $x_0 \in \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$;

(2) 若当 $x \geq 1$ 时, 不等式 $g(x) \geq 0$ 恒成立, 求证: $a < \frac{49}{4}$.

19. (12 分) 已知椭圆 C 的焦点在 x 轴上, 且顺次连接四个顶点恰好构成了一个边长 $\sqrt{3}$ 为且面积为 $2\sqrt{2}$ 的菱形.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 $M(-3, 0)$, 过椭圆 C 右焦点 F 的直线 l 交于 A 、 B 两点, 若对满足条件的任意直线 l , 不等式

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leq \lambda (\lambda \in \mathbb{R})$ 恒成立, 求 λ 的最小值.

20. (12 分) 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 点 P 在 x 轴上, O 为坐标原点, 且满足 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4} \overrightarrow{OF}$, 经

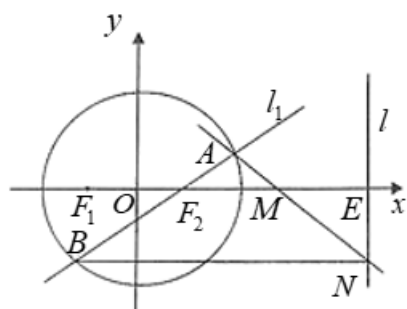
过点 P 且垂直于 x 轴的直线与抛物线 C 交于 A 、 B 两点, 且 $|AB| = 8$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 直线 l 与抛物线 C 交于 M 、 N 两点, 若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -64$, 求点 F 到直线 l 的最大距离.

21. (12 分) 设点 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1 (a > 2)$ 的左, 右焦点, P 为椭圆 C 上任意一点, 且

$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 的最小值为 1.



(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 如图, 直线 $l: x = 5$ 与 x 轴交于点 E , 过点 F_2 且斜率 $k \neq 0$ 的直线 l_1 与椭圆交于 A 、 B 两点, M 为线段 EF_2 的中点, 直线 AM 交直线 l 于点 N , 证明: 直线 $BN \perp l$.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1}{2x} - ax^2 + x (a \geq 0)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的极值点的个数;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 证明 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{x_1 + x_2} > \frac{3}{4} - \ln 2$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

利用组合的方法求所求的事件的对立事件,即该重卦没有阳爻或只有 1 个阳爻的概率,再根据两对立事件的概率和为 1 求解即可.

【详解】

设“该重卦至少有 2 个阳爻”为事件 A .所有“重卦”共有 2^6 种;“该重卦至少有 2 个阳爻”的对立事件 $\bar{A}$ 是“该重卦没有阳爻或只有 1 个阳爻”,其中,没有阳爻(即 6 个全部是阴爻)的情况有 1 种,只有 1 个阳爻的情况有 $C_6^1 = 6$ 种,故

$$P(\bar{A}) = \frac{1+6}{2^6} = \frac{7}{64}, \text{ 所以该重卦至少有 2 个阳爻的概率是 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64}.$$

故选: C

【点睛】

本题主要考查了对立事件概率和为 1 的方法求解事件概率的方法,属于基础题.

2、A

【解析】

根据题意 P 到两个平面的距离相等, 根据等体积法得到 $V_{P-ABC} = V_{P-DEF}$, 得到答案.

【详解】

二面角 $P-AB-DE$ 与二面角 $P-BC-DE$ 的平面角相等, 故 P 到两个平面的距离相等.

故 $V_{P-ABC} = V_{P-DEF}$, 即 $V_{P-ABC} = V_{P-DEF}$, 两三棱锥高相等, 故 $PA = PD$,

故 $P'D = PD$, 故 P 为 PD' 中点.

故选: A.

【点睛】

本题考查了二面角, 等体积法, 意在考查学生的计算能力和空间想象能力.

3、D

【解析】

设圆锥底面圆的半径为 r ，由轴截面面积为 $2\sqrt{3}$ 可得半径 r ，再利用圆锥体积公式计算即可。

【详解】

设圆锥底面圆的半径为 r ，由已知， $\frac{1}{2} \times 2r \times \sqrt{3}r = 2\sqrt{3}$ ，解得 $r = \sqrt{2}$ ，

所以圆锥的体积 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times \sqrt{3}r = \frac{2\sqrt{6}}{3} \pi$ 。

故选：D

【点睛】

本题考查圆锥的体积的计算，涉及到圆锥的定义，是一道容易题。

4、C

【解析】

求出函数定义域，在定义域内确定函数的单调性，利用单调性解不等式。

【详解】

由 $\frac{1+x}{1-x} > 0$ 得 $-1 < x < 1$ ，

在 $x \in (-1, 1)$ 时， $y = x^3$ 是增函数， $y = \sin x$ 是增函数， $y = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(-1 + \frac{2}{1-x})$ 是增函数， $\therefore$

$f(x) = x^3 + \sin x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 是增函数，

$\therefore$ 由 $f(2a-1) > f(0)$ 得 $0 < 2a-1 < 1$ ，解得 $\frac{1}{2} < a < 1$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查函数的单调性，考查解函数不等式，解题关键是确定函数的单调性，解题时可先确定函数定义域，在定义域内求解。

5、C

【解析】

采用逐一验证法，根据线线、线面之间的关系以及四面体的体积公式，可得结果。

【详解】

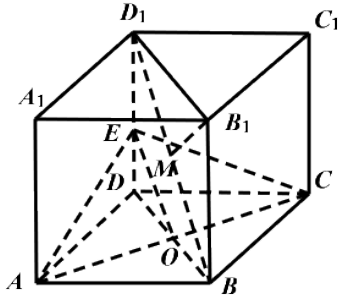
A 错误

由 $EF \subset \text{平面 } AEC$, $BC_1 \parallel AD_1$

而 AD_1 与平面 AEC 相交,

故可知 BC_1 与平面 AEC 相交, 所以不存在 $EF \parallel BC_1$

B 错误, 如图, 作 $B_1M \perp BD_1$



由 $AC \perp BD, AC \perp BB_1, BD \cap BB_1 = B$

又 $BD, BB_1 \subset \text{平面 } BB_1D_1D$, 所以 $AC \perp \text{平面 } BB_1D_1D$

又 $B_1M \subset \text{平面 } BB_1D_1D$, 所以 $B_1M \perp AC$

由 $OE \parallel BD_1$, 所以 $B_1M \perp OE$

$AC \cap OE = O$, $AC, OE \subset \text{平面 } AEC$

所以 $B_1M \perp \text{平面 } AEC$, 又 $AE \subset \text{平面 } AEC$

所以 $B_1M \perp AE$, 所以存在

C 正确

四面体 $EMAC$ 的体积为 $V_{M-AEC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle AEC} \cdot h$

其中 h 为点 M 到平面 AEC 的距离,

由 $OE \parallel BD_1$, $OE \subset \text{平面 } AEC$, $BD_1 \not\subset \text{平面 } AEC$

所以 $BD_1 \parallel \text{平面 } AEC$,

则点 M 到平面 AEC 的距离即点 B 到平面 AEC 的距离,

所以 h 为定值, 故四面体 $EMAC$ 的体积为定值

D 错误

由 $AC \parallel A_1C_1$, $A_1C_1 \subset \text{平面 } A_1C_1B$, $AC \not\subset \text{平面 } A_1C_1B$

所以 $AC \parallel$ 平面 A_1C_1B ,

则点 F 到平面 A_1C_1B 的距离 h_1 即为点 A 到平面 A_1C_1B 的距离,

所以 h_1 为定值

所以四面体 FA_1C_1B 的体积 $V_{F-A_1C_1B} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta A_1C_1B} \cdot h_1$ 为定值

故选: C

【点睛】

本题考查线面、线线之间的关系, 考查分析能力以及逻辑推理能力, 熟练线面垂直与平行的判定定理以及性质定理, 中档题.

6、B

【解析】

先由三角函数的定义求出 $\sin \alpha$, 再由二倍角公式可求 $\cos 2\alpha$.

【详解】

解: 角 α 的终边与单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 交于点 $P\left(\frac{1}{3}, y_0\right)$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3},$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9},$$

故选: B

【点睛】

考查三角函数的定义和二倍角公式, 是基础题.

7、B

【解析】

先求出从不超过 18 的素数中随机选取两个不同的数的所有可能结果, 然后再求出其和等于 16 的结果, 根据等可能事件的概率公式可求.

【详解】

解: 不超过 18 的素数有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 共 7 个, 从中随机选取两个不同的数共有 $C_7^2 = 21$,

其和等于 16 的结果 (3,13), (5,11) 共 2 种等可能的结果,

$$\text{故概率 } P = \frac{2}{21}.$$

故选：B.

【点睛】

古典概型要求能够列举出所有事件和发生事件的个数，本题不可以列举出所有事件但可以用分步计数得到，属于基础题.

8、C

【解析】

直接求交集得到答案.

【详解】

集合 $A = \{x | x < 3\}$, $B = \{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$, 则 $A \cap B = (-\infty, 0) \cup (2, 3)$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了交集运算，属于简单题.

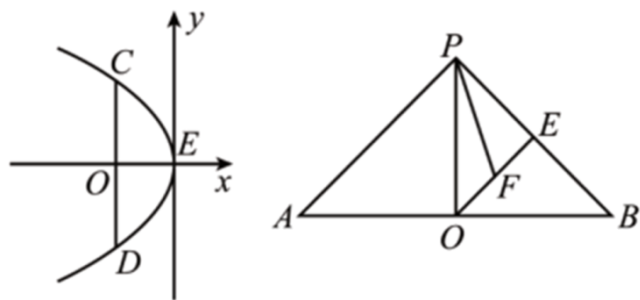
9、D

【解析】

建立平面直角坐标系，求得抛物线的轨迹方程，解直角三角形求得抛物线的焦点到圆锥顶点 P 的距离.

【详解】

将抛物线放入坐标系，如图所示，



$$\because PO = \sqrt{2}, OE = 1, OC = OD = \sqrt{2},$$

$$\therefore C(-1, \sqrt{2}), \text{ 设抛物线 } y^2 = 2px, \text{ 代入 } C \text{ 点,}$$

$$\text{可得 } y^2 = -2x$$

$$\therefore \text{焦点为 } \left(-\frac{1}{2}, 0\right),$$

即焦点为 OE 中点，设焦点为 F ,

$$EF = \frac{1}{2}, PE = 1, \therefore PF = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

故选：D

【点睛】

本小题考查圆锥曲线的概念，抛物线的性质，两点间的距离等基础知识；考查运算求解能力，空间想象能力，推理论证能力，应用意识.

10、D

【解析】

举例判断命题 p 与 q 的真假，再由复合命题的真假判断得答案.

【详解】

当 $x_0 > 1$ 时， $\log_{\frac{1}{2}} x_0 < 0$ ，故 p 命题为假命题；

记 $f(x) = e^x - x$ 的导数为 $f'(x) = e^x - 1$ ，

易知 $f(x) = e^x - x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递减，在 $(0, +\infty)$ 上递增，

$\therefore f(x) > f(0) = 1 > 0$ ，即 $\forall x \in R, e^x > x$ ，故 q 命题为真命题；

$\therefore p \wedge (\neg q)$ 是假命题

故选 D

【点睛】

本题考查复合命题的真假判断，考查全称命题与特称命题的真假，考查指对函数的图象与性质，是基础题.

11、B

【解析】

根据题意，建立平面直角坐标系. 令 $\vec{OP} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$. E 为 OB 中点. 由 $\left| \vec{a} + \vec{b} \right| = 1$ 即可求得 P 点的轨迹方程. 将 $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ 变形, 结合 $\lambda + 2\mu = 1$ 及平面向量基本定理可知 P, C, E 三点共线. 由圆切线的性质可知 $|\vec{c}|$ 的最小值 m 即为 O 到直线 PE 的距离最小值, 且当 PE 与圆 M 相切时, m 有最大值. 利用圆的切线性质及点到直线距离公式即可求得直线方程, 进而求得原点到直线的距离, 即为 m 的最大值.

【详解】

根据题意, $|\vec{b}| = 2$, 设 $\vec{OP} = \vec{a} = (x, y)$, $\vec{OB} = \vec{b} = (2, 0)$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $E(1, 0)$

则 $\vec{OE} = \frac{1}{2}\vec{b}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/417003003104006056>