2023-2024 学年天津市高三下学期高考数学模拟试题

（四模）

本试卷分和第Ⅱ卷两部分，共 150 分.考试结束后，请交回答题卡.

第 I 卷

一、选择题（在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1．已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6,7\},A=\{4,5,6\},B=\{1,3,5,7\}$，则$A\cap(\complement_U B)=$（　）

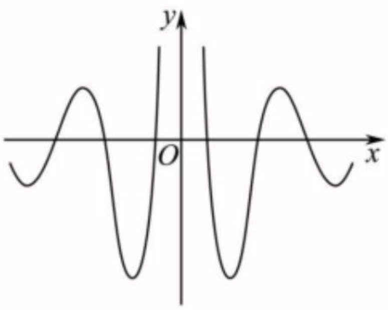
A．$\{2,4\}$　　B．$\{2,6\}$　　C．$\{4,6\}$　　D．$\{2,4,5,6\}$

2．“$\frac{2x-1}{x+2}\le 1$”是“$\left|x-\frac{1}{2}\right|\le\frac{5}{2}$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

3．如图，下列能表达这条曲线的函数是（　）



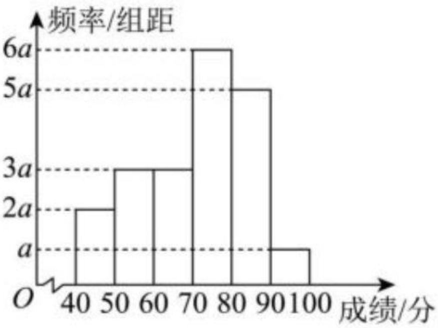
A．$f(x)=\frac{\sin 5x}{2^{-x}-2^{x}}$　　B．$f(x)=\frac{\cos x}{2^{x}-2^{-x}}$

C．$f(x)=\frac{\cos 5x}{\left|2^{x}-2^{-x}\right|}$　　D．$f(x)=\frac{\sin 5x}{\left|2^{x}-2^{-x}\right|}$

4．已知等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n,T_n，若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n+4}{n+2}$，则$\frac{a_5+a_8}{b_2+b_{11}}=$（　）

A．$\frac{17}{13}$　　B．$\frac{37}{13}$　　C．$\frac{20}{7}$　　D．$\frac{37}{7}$

5．某校举办了数学知识竞赛，并将 1000 名学生的竞赛成绩（满分 100 分，成绩取整数）整理成如图所示的频率分布直方图，则以下四个说法正确的个数为（　）



①a 的值为 0.005

②估计这组数据的众数为 75

③估计这组数据的下四分位数为 60

④估计成绩高于 80 分的有 300 人

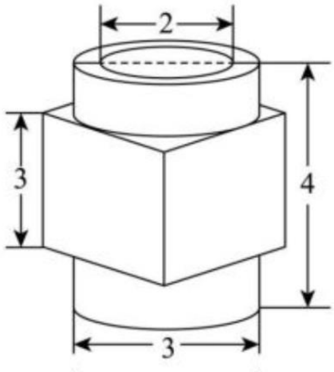
A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．已知 $a=(\sqrt{3})^3, b=10^{\frac{1}{3}}, c=6^{\log_2 3}$，则 a,b,c 的大小关系为（　）

A．$c>a>b$　　B．$c>b>a$

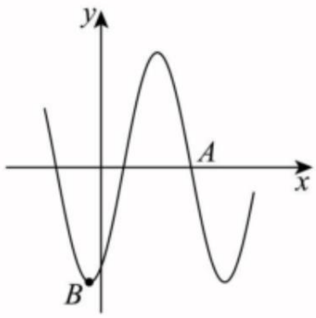
C．$a>c>b$　　D．$b>c>a$

7．三星堆遗址祭祀坑区 4 号坑发现了玉琮.一种内圆外方的筒型玉器，是古人用于祭祀的礼器.假定某玉琮中间内空，形状对称，如图所示，圆筒内径长 2 cm，外径长 3 cm，筒高 4 cm，中部为棱长是 3cm 的正方体的一部分，圆筒的外侧面内切于正方体的侧面，则该玉琮的体积为（　）



A．$\left(27-\frac{9\pi}{4}\right)\text{cm}^3$　　B．$\left(27-\frac{7\pi}{4}\right)\text{cm}^3$　　C．$\left(27+\frac{\pi}{4}\right)\text{cm}^3$　　D．$\left(27+\frac{3\pi}{4}\right)\text{cm}^3$

8．已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，其中 $A\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，$B\left(-\frac{\pi}{24},-2\right)$，则以下五个说法正确的个数为（　）



①函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期是 π；

②函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$ 上单调递减；

③函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{11\pi}{24}$ 对称；

④将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{24}$ 个单位长度后关于 y 轴对称；

⑤当 $x\in\left(\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right)$ 时，$f\left(x\right)\in\left(-\sqrt{3},2\right)$.

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

9．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a,b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，经过 F_1 的直线交双曲线的左支于A，B，$\triangle ABF_2$ 的内切圆的圆心为 I，$\angle BF_2A$ 的角平分线为 F_2M 交 AB 于 M，且 $\left|F_2I\right|:\left|IM\right|=2:1$，若 $S_{\triangle IAF_2}:S_{\triangle IBF_2}=\mathbf{3:5}$，则该双曲线的离心率是（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　　　B．$\dfrac{4}{3}$　　　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　　　D．2

第II卷

二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，共30分.）

10．若 $\left(3-\mathrm{i}\right)z=3\mathrm{i}$，则 z 的共轭复数为__________.

11．在 $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{3}{x}\right)^5$ 的展开式中，$\dfrac{1}{x}$ 的系数为__________.（结果用数字表示）

12．已知直线 $x+y-5=0$ 与圆 $C:x^2+y^2-4x+2y-m=0$ 相交于 A,B 两点，且 $\left|\mathrm{AB}\right|=4$，则实数 $m=$________

13．某射击小组共有10名射手，其中一级射手3人，二级射手2人，三级射手5人，现选出2人参赛，在至少有一人是一级射手的条件下，另一人是三级射手的概率为__________；若一、二、三级射手获胜概率分别是0.9，0.7，0.5，则任选一名射手能够获胜的概率为__________.

14．已知$\triangle ABC$中，$AB=6,AC=3$，且$\left|\lambda\overrightarrow{AB}+(2-2\lambda)\overrightarrow{AC}\right|(\lambda\in\mathbf{R})$的最小值为$3\sqrt{3}$，则$B=$__________，若$P$为边$AB$上任意一点，则$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的最小值是__________.

15．对任意$x\in R$，不等式$(x+a)|x-2+a|\geq x|x-2|-a$恒成立，则$a$的取值范围是______.

三、解答题（本大题共5小题，共75分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

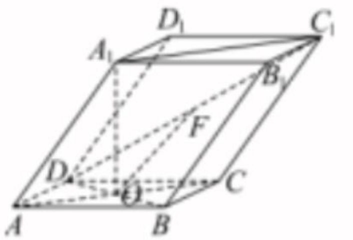
16．已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，满足$c\cos B+b\cos C=\dfrac{a}{2\cos A}$.

(1)求角A的大小；

(2)若$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求$\sin(2B+A)$的值；

(3)若$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$a=3$，求$\triangle ABC$的周长和外接圆的面积.

17．如图，棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面是菱形，$\angle DAB=60^\circ$，所有棱长都为2，$AC\cap BD=O$，$A_1O\perp$平面$ABCD,F$为DC_1的中点.



(1)证明：$OF//$平面BCC_1B_1；

(2)求二面角$D-AA_1-C$的余弦值；

(3)求点F到直线DA_1的距离.

18．已知$\{a_n\}$是公比为q的等比数列．对于给定的$k(k=1,2,3\cdots n)$，设$T^{(k)}$是首项为a_k，公差为$2a_k-1$的等差数列$\{a_n\}$，记$T^{(k)}$的第i项为$b_i^{(k)}$．若$b_1^{(1)}+b_1^{(2)}=b_2^{(2)}$，且$b_2^{(1)}=b_3^{(2)}$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{b_i^{(2)}b_{i+1}^{(2)}}$；

(3)求$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^{(k)}$.

19．在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，直线$l$与$\Gamma$

相切，与圆 O：$x^2+y^2=3a^2$ 相交于 A，B 两点.当 l 垂直于 x 轴时，$|AB|=2\sqrt{6}$.

(1)求Γ的方程；

(2)对于给定的点集 M，N，若 M 中的每个点在 N 中都存在距离最小的点，且所有最小距离的最大值存在，则记此最大值为$d(M,N)$.

（ⅰ）若 M，N 分别为线段 AB 与圆 O 上任意一点，P 为圆 O 上一点，当$\triangle PAB$ 的面积最大时，求$d(M,N)$；

（ⅱ）若$d(M,N)$，$d(N,M)$均存在，记两者中的较大者为$H(M,N)$.已知$H(X,Y)$，$H(Y,Z)$，$H(X,Z)$均存在，证明.$H(X,Z)+H(Y,Z)\geqslant H(X,Y)$

20．已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-mx,x\in\left(0,+\infty\right)$.

(1)证明：当$m\le \mathrm{e}$时，$f\left(x\right)\ge 0$；

(2)若函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-x\ln x-1$有两个零点$x_1,x_2$.

①求m的取值范围；

②证明：$x_1+\ln x_2<m-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1．C

【分析】直接由交集补集的定义求解即可

【详解】因为$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}, A=\{4,5,6\}, B=\{1,3,5,7\}$，

所以$\complement_U B=\{2,4,6\}$，所以$A\cap(\complement_U B)=\{4,6\}$，

故选：C.

2．A

【分析】根据绝对值的定义和分式不等式的解法，求得不等式的解集，结合充分条件、必要条件的判定方法，即可求解.

【详解】由不等式$\frac{2x-1}{x+2}\le 1$，可得$\frac{x-3}{x+2}\le 0$，所以$\begin{cases}(x-3)(x+2)\le 0\\ x+2\ne 0\end{cases}$，解得$-2<x\le 3$，

又由$\left|x-\frac{1}{2}\right|\le\frac{5}{2}$，可得$-\frac{5}{2}\le x-\frac{1}{2}\le\frac{5}{2}$，解得$-2\le x\le 3$，

因为$\{x|-2<x\le 3\}$是$\{x|-2\le x\le 3\}$的真子集，

所以“$\frac{2x-1}{x+2}\le 1$”是“$\left|x-\frac{1}{2}\right|\le\frac{5}{2}$”的充分不必要条件.

故选：A.

3．C

【分析】由函数的对称性及特殊点的函数值，即可得出结果.

【详解】解：观察图象可知，函数的图象关于y轴对称，应是偶函数，

而选项B，$f(-x)=\frac{\cos(-x)}{2^{-x}-2^{x}}=\frac{\cos x}{2^{-x}-2^{x}}=-f(x)$，是奇函数，图象关于原点对称，不符合题意，

选项D，$f(x)=\frac{\sin 5(-x)}{\left|2^{-x}-2^{x}\right|}=-\frac{\sin 5x}{\left|2^{x}-2^{-x}\right|}=-f(x)$，是奇函数，图象关于原点对称，不符合题意，

对选项A而言，当$x\in\left(0,\frac{\pi}{5}\right)$时，$f(x)<0$，不符合题意.

故选：C.

本题考查函数的图象及其性质，考查运算求解能力，属于基础题.

4．C

【分析】由等差数列的前n项和公式及等差数列的性质，即可求解结果.

【详解】因为S_n,T_n是等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和，

$S_{12}=\frac{12\left(a_1+a_{12}\right)}{2},T_{12}=\frac{12\left(b_1+b_{12}\right)}{2}$，又$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n+4}{n+2}$

所以$\frac{a_5+a_8}{b_2+b_{11}}=\frac{a_1+a_{12}}{b_1+b_{12}}=\frac{S_{12}}{T_{12}}=\frac{3\times12+4}{12+2}=\frac{20}{7}$

故选：C.

5．D

【分析】利用频率分布直方图的性质判断①，利用众数、百分位数的求法判断②③，根据频率分布直方图计算可估计总体判断④.

【详解】由频率分布直方图可知$10\times\left(2a+3a+3a+6a+5a+a\right)=1$，解得$a=0.005$，①正确；

根据频率分布直方图可知众数落在区间$\left[70,80\right)$，用区间中点表示众数，即众数为75，②正确；

前两组频率之和为$\left(0.01+0.015\right)\times10=0.25$，所以这组数据的下四分位数为60，③正确；

成绩高于80分的频率为$\left(0.025+0.005\right)\times10=0.3$，所以估计总体成绩高于80分的有

$1000\times0.3=300$人，④正确；

综上①②③④正确，

故选：D

6．A

【分析】对a,b同时6次方后比较大小，即可判断a,b大小；对a,c，根据$a<6<c$，即可比较大小.

【详解】由题可得$a=3^{\frac{3}{2}}>1,b=10^{\frac{1}{3}}>1$，则$a^6=3^9>b^6=10^2$，故$a>b$；

又$\log_2 3>1,a=3\sqrt{3}<6<6^{\log_2 3}$，故$c>a$，综上所述.$c>a>b$

故选：A.

7．B

【分析】根据几何体的特点，结合长方体，圆柱体体积的计算公式，求解即可.

【详解】圆筒体积为底面半径$\frac{3}{2}$，高度为4的圆柱体的体积减去底面半径为1，高度为4的圆柱体的体积，

故其体积$V_1=\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^2\times4-\pi\times1^2\times4=5\pi cm^3$；

中间部分的体积为棱长为3的长方体的体积减去底面半径为$\frac{3}{2}$，高为3的圆柱体的体积，

故其体积$V_2=27-\pi\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\times3=\left(27-\dfrac{27\pi}{4}\right)\text{cm}^3$；

故玉琮的体积$V=27-\dfrac{27\pi}{4}+5\pi=\left(27-\dfrac{7}{4}\pi\right)\text{cm}^3$.

故选：B.

8．C

【分析】根据函数图象求出$f(x)$的解析式，再根据正弦函数的图象和性质逐一判断即可.

【详解】由图像可知$\dfrac{3}{4}T=\dfrac{\pi}{3}-\left(-\dfrac{\pi}{24}\right)$，解得$T=\dfrac{\pi}{2}$，①说法错误，

所以$\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{\pi}{2}$，解得$\omega=4$，

将$B\left(-\dfrac{\pi}{24},-2\right)$代入$f(x)=2\sin(4x+\varphi)$得$\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$，

所以$\varphi-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，即$\varphi=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$，

又因为$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，$f(x)=2\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

当$x\in\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$时，$4x-\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{8\pi}{3},\dfrac{11\pi}{3}\right]$，所以$f(x)$在$\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$上先单调递减，再单调递增，②说法错误；

当$x=\dfrac{11\pi}{24}$时，$4x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{2}$，$f(x)=-2$，所以$f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{11\pi}{24}$对称，③说法正确；

将函数$f(x)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{24}$个单位长度后得到

$f\left(x-\dfrac{\pi}{24}\right)=2\sin\left[4\left(x-\dfrac{\pi}{24}\right)-\dfrac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\cos 4x$，其图象关于$y$轴对称，④说法正确；

当$x\in\left(\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right)$时，$4x-\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{11\pi}{3},\dfrac{14\pi}{3}\right)$，则$\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，$f(x)\in\left(-\sqrt{3},2\right]$，⑤说法错误；

综上③④说法正确，

故选：C

9．A

【分析】根据内切圆于$S_{\triangle IAF_2}:S_{\triangle IBF_2}=3:5$，可设$|AF_2|=3t$，进而得$|BF_2|=5t$，结合