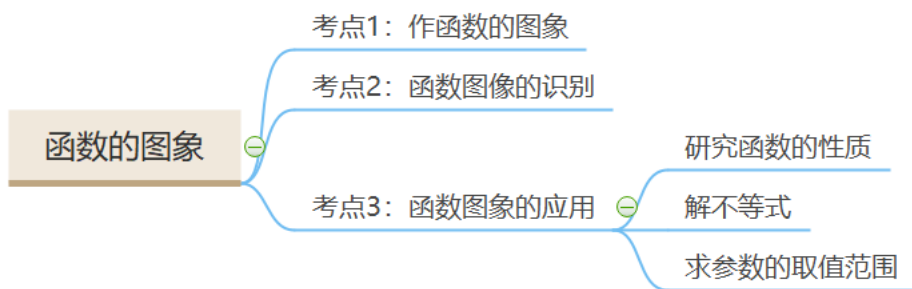


第13讲 函数的图象



01

走进教材 · 自主回顾

1. 利用描点法作函数图象

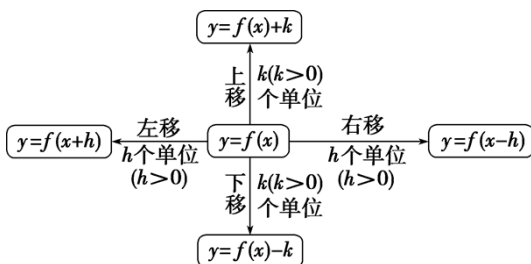
其基本步骤是：列表、描点、连线。

首先：①确定函数的定义域；②化简函数解析式；③讨论函数的性质(奇偶性、单调性、周期性、对称性等)。

其次：列表(尤其注意特殊点、零点、最大值点、最小值点、与坐标轴的交点等)，描点，连线。

2. 利用图象变换法作函数的图象

(1) 平移变换



(2) 对称变换

① $y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{关于}x\text{轴对称}}$ $y=-f(x)$.

② $y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{关于}y\text{轴对称}}$ $y=f(-x)$.

③ $y=f(x)$ $\xrightarrow{\text{关于原点对称}}$ $y=-f(-x)$.

$$\textcircled{4} y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1) \xrightarrow{\text{关于 } y=x \text{ 对称}} y = \log_a x (x > 0).$$

(3) 翻折变换

$$\textcircled{1} y = f(x) \xrightarrow{\text{保留 } x \text{ 轴及上方图象, 将 } x \text{ 轴下方图象翻折上去}} y = |f(x)|;$$

$$\textcircled{2} y = f(x) \xrightarrow{\text{保留 } y \text{ 轴及右边图象, 并作其关于 } y \text{ 轴对称的图象}} y = f(|x|).$$

(4) 伸缩变换

$$\textcircled{1} y = f(x) \xrightarrow{\begin{array}{l} a > 1, \text{ 横坐标缩短为原来的 } \frac{1}{a} \text{ 倍, 纵坐标不变} \\ 0 < a < 1, \text{ 横坐标伸长为原来的 } \frac{1}{a} \text{ 倍, 纵坐标不变} \end{array}} y = f(ax).$$

$$\textcircled{2} y = f(x) \xrightarrow{\begin{array}{l} a > 1, \text{ 纵坐标伸长为原来的 } a \text{ 倍, 横坐标不变} \\ 0 < a < 1, \text{ 纵坐标缩短为原来的 } a \text{ 倍, 横坐标不变} \end{array}} y = af(x).$$

☺ 常用结论

1. 函数图象平移变换的八字方针

(1) “左加右减”，要注意加减指的是自变量.

(2) “上加下减”，要注意加减指的是函数值.

2. 函数图象自身的轴对称

(1) $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 的图象关于 y 轴对称.

(2) 函数 $y = f(x)$ 的图象关于 $x = a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x) = f(a-x) \Leftrightarrow f(x) = f(2a-x) \Leftrightarrow f(-x) = f(2a+x)$.

(3) 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且有 $f(a+x) = f(b-x)$ ，则函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称.

3. 函数图象自身的中心对称

(1) $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 的图象关于原点对称.

(2) 函数 $y = f(x)$ 的图象关于 $(a, 0)$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x) = -f(a-x) \Leftrightarrow f(x) = -f(2a-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(2a+x)$.

(3) 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 成中心对称 $\Leftrightarrow f(a+x) = 2b - f(a-x) \Leftrightarrow f(x) = 2b - f(2a-x)$.

4. 两个函数图象之间的对称关系

(1) 函数 $y = f(a+x)$ 与 $y = f(b-x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{b-a}{2}$ 对称 (由 $a+x = b-x$ 得对称轴方程);

(2) 函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(2a-x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 对称;

(3) 函数 $y = f(x)$ 与 $y = 2b - f(-x)$ 的图象关于点 $(0, b)$ 对称.

考点 1 作函数的图象

[名师点睛]

函数图象的画法

直接法

→ 当函数解析式(或变形后的解析式)是熟悉的基本函数时,就可根据这些函数的特征找出图象的关键点直接作出图象

转化法

→ 含有绝对值符号的函数,可脱掉绝对值符号,转化为分段函数来画图象

图象变换法

→ 若函数图象可由某个基本函数的图象经过平移、翻折、对称得到,可利用图象变换作出,但要注意变换顺序,对不能直接找到熟悉的基本函数的要先变形,并应注意平移变换的顺序对变换单位及解析式的影响

[典例] (2022·全国·高三专题练习) 分别画出下列函数的图象:

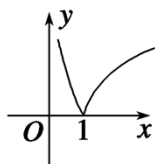
(1) $y = |\lg x|$; (2) $y = 2^{x+2}$;

(3) $y = x^2 - 2|x| - 1$; (4) $y = \frac{x+2}{x-1}$.

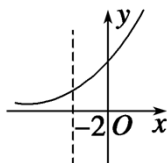
【解】(1) $y = |\lg x| = \begin{cases} \lg x, & x \geq 1 \\ -\lg x, & 0 < x < 1 \end{cases}$ 的图象如图①.

(2) 将 $y = 2^x$ 的图象向左平移 2 个单位即得 $y = 2^{x+2}$ 的图象.

图象如图②.



①



②

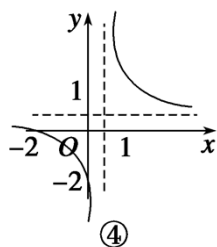
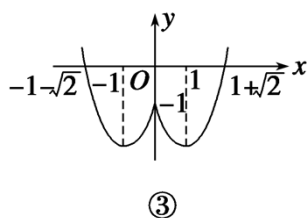
(3) $y = x^2 - 2|x| - 1 = \begin{cases} x^2 - 2x - 1, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 1, & x < 0 \end{cases}$ 的图象如图③.

(4) 因为 $y = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$,

所以先作出 $y = \frac{3}{x}$ 的图象，

将其图象向右平移 1 个单位，再向上平移 1 个单位，

即得 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 的图象，如图④.



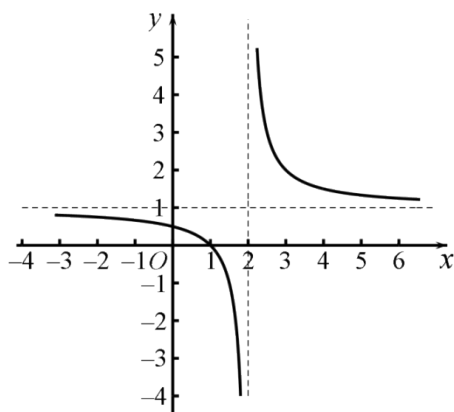
[举一反三]

1. (2022·全国·高三专题练习) 作出下列函数的大致图像，并写出函数的单调区间和值域：

(1) $y = \frac{x-1}{x-2}$; (2) $y = x^2 - 4|x|$; (3) $y = (x-1)^{\frac{1}{3}} + 2$;

(4) $y = \left| \frac{x}{x+2} \right|$; (5) $y = |x(1-x)|$; (6) $y = \frac{1}{2-|x|}$.

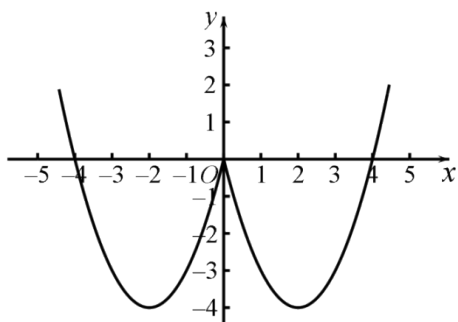
【解】(1) $y = \frac{x-1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$ ，图象如图所示：



函数在 $(-\infty, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 为减函数.

因为 $\frac{1}{x-2} \neq 0$ ，所以 $1 + \frac{1}{x-2} \neq 1$ ，故值域为： $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ；

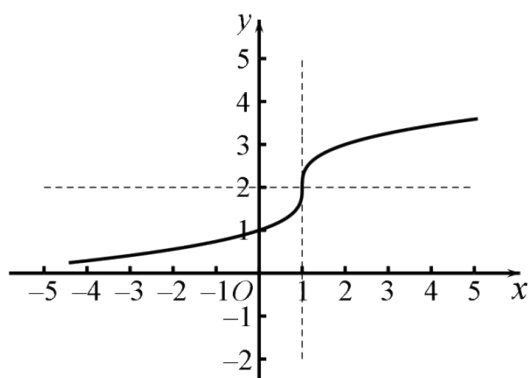
(2) $y = x^2 - 4|x| = \begin{cases} x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4, & x < 0 \\ x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4, & x \geq 0 \end{cases}$ ，图象如图所示：



函数在 $(-\infty, -2]$ 和 $[0, 2]$ 为减函数，在 $[-2, 0]$ 和 $[2, +\infty)$ 为增函数，

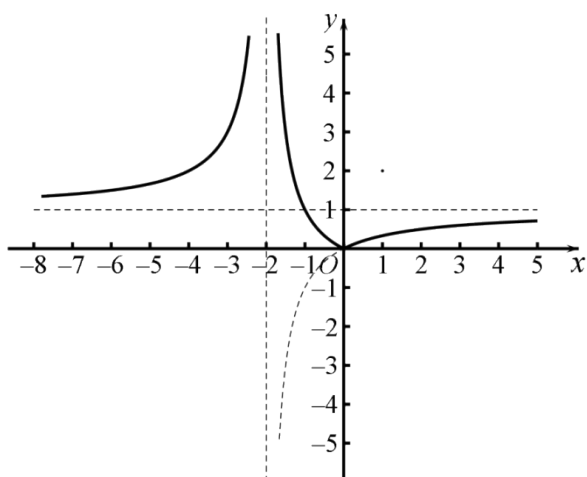
当 $x = \pm 2$ 时， y 取得最小值 -4 ，故值域： $[-4, +\infty)$ ；

(3) 函数 $y = (x-1)^{\frac{1}{3}} + 2$ 的图象如图所示：



函数在 R 上为增函数，值域： R .

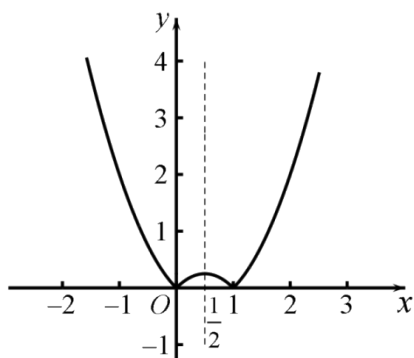
(4) $y = \left| \frac{x}{x+2} \right| = \left| \frac{x+2-2}{x+2} \right| = \left| 1 + \frac{-2}{x+2} \right|$ ， 图象如图所示：



函数在 $(-\infty, -2)$ 和 $[0, +\infty)$ 为增函数，在 $(-2, 0]$ 为减函数，

值域为： $[0, +\infty)$.

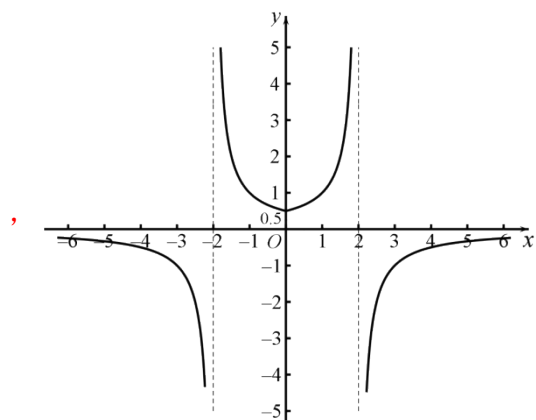
(5) $y = |x(1-x)| = |x(x-1)|$ ，图象如图所示：



函数在 $(-\infty, 0]$ 和 $[\frac{1}{2}, 1]$ 为减函数，在 $[0, \frac{1}{2}]$ 和 $[1, +\infty)$ 为增函数.

值域为： $[0, +\infty)$ ；

(6) $y = \frac{1}{2-|x|}$

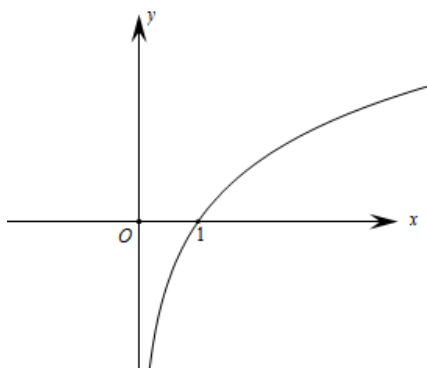


函数在 $(-\infty, -2)$ 和 $(-2, 0]$ 为减函数，在 $[0, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 为增函数，

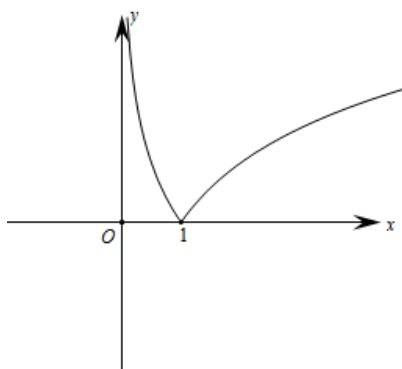
值域为： $(-\infty, 0) \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$.

2. (2022·北京·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ ，作出 $y = |f(x)|$ 的大致图像并写出它的单调性；

【解】当 $a > 1$ 时，函数 $f(x) = \log_a x$ 的图象，如图所示：

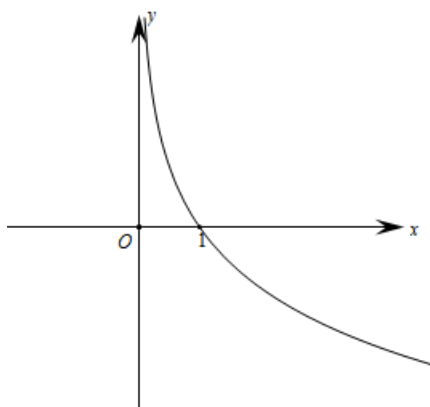


则 $y = |f(x)|$ 的图象，如图所示：

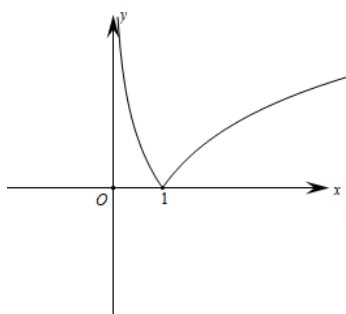


由图象知： $y = |f(x)|$ 在 $(0, 1)$ 上递减，在 $(1, +\infty)$ 上递增；

当 $0 < a < 1$ 时，函数 $f(x) = \log_a x$ 的图象，如图所示：



则 $y = |f(x)|$ 的图象，如图所示：



由图象知： $y = |f(x)|$ 在 $(0, 1)$ 上递减，在 $(1, +\infty)$ 上递增；

考点2 函数图象的识别

[名师点睛]

(1)抓住函数的性质，定性分析

①从函数的定义域，判断图象的左右位置；从函数的值域，判断图象上下位置；

②从函数的单调性，判断图象的变化趋势；

③从周期性，判断图象的循环往复；

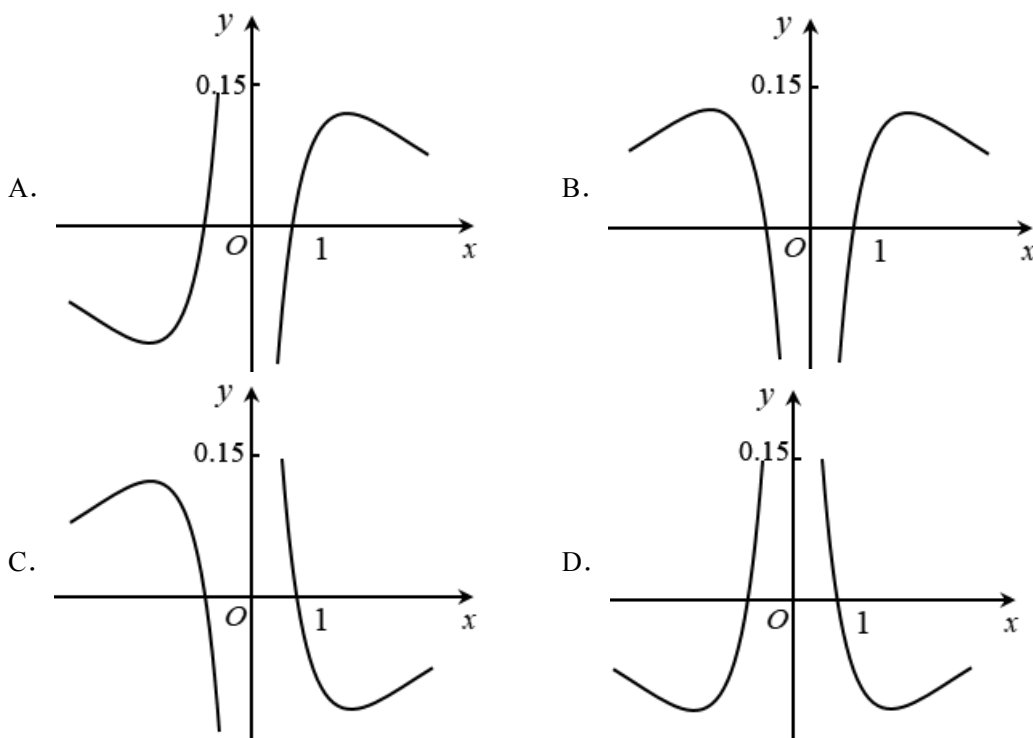
④从函数的奇偶性，判断图象的对称性.

(2)抓住函数的特征，定量计算

利用函数的特征点、特殊值的计算，分析解决问题.

[典例]

1. (2021·天津·高考真题) 函数 $y = \frac{\ln|x|}{x^2+2}$ 的图像大致为 ()



【答案】B

【解析】

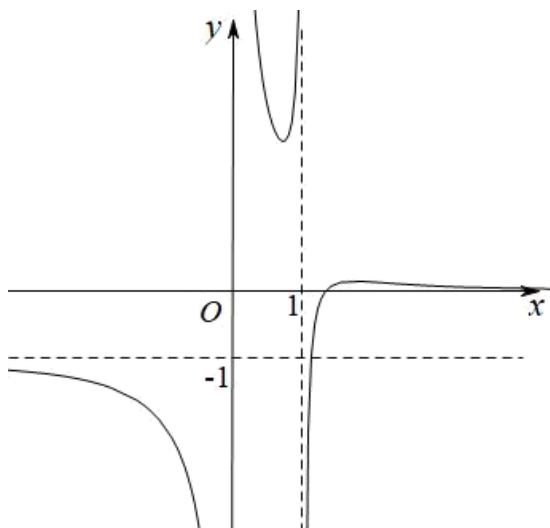
设 $y = f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2+2}$ ，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$ ，关于原点对称，

又 $f(-x) = \frac{\ln|-x|}{(-x)^2+2} = f(x)$ ，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，排除 AC；

当 $x \in (0,1)$ 时, $\ln|x| < 0, x^2 + 2 > 0$, 所以 $f(x) < 0$, 排除 D.

故选: B.

2. (2022·浙江台州·二模) 函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则其解析式可能是 ()



A. $f(x) = \frac{x - \frac{4}{3}}{(e^x - 1)(x - 1)}$

B. $f(x) = \frac{x - \frac{4}{3}}{e^x(x - 1)}$

C. $f(x) = \frac{x}{(e^x - 1)(x - 1)}$

D. $f(x) = \frac{x - \frac{4}{3}}{x(x - 1)}$

【答案】A

【解析】由图象得, 函数的定义域为 $\{x | x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 1\}$, 故排除 B,

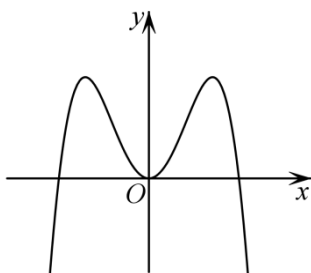
$f(x) = 0$ 有一解 $x = x_0 > 1$, 当 $x < 0$ 或 $1 < x < x_0$ 时, $f(x) < 0$, 当 $0 < x < 1$ 时或 $x > x_0$ 时, $f(x) > 0$, 故排除 C,

当 x 无限接近负无穷大时, $f(x)$ 无限接近 -1 , 故排除 D,

故选: A

3. (2022·浙江·慈溪中学模拟预测) 已知函数 $f(x) = 2^x, g(x) = \sin x$, 则图像为下列图示的函数可能是

()



$$A. y = [f(x) + f(-x)] \cdot g(x)$$

$$B. y = \frac{g(x)}{f(x) + f(-x)}$$

$$C. y = [f(x) - f(-x)] \cdot g(x)$$

$$D. y = \frac{g(x)}{f(x) - f(-x)}$$

【答案】C

【解析】解：依题意图示对应的函数为偶函数，考虑到 $f(x) + f(-x) = 2^x + 2^{-x}$ 为偶函数，

$f(x) - f(-x) = 2^x - 2^{-x}$ 为奇函数， $g(x) = \sin x$ 为奇函数.

因为 $y = [f(x) + f(-x)] \cdot g(x)$ 为奇函数，故排除 A，

又 $y = \frac{g(x)}{f(x) + f(-x)}$ 为奇函数，故排除 B，

对于 D: $y = \frac{g(x)}{f(x) - f(-x)}$ 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$ ，故排除 D；

因为 $f(x) - f(-x) = 2^x - 2^{-x}$ 在定义域上单调递增， $g(x) = \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

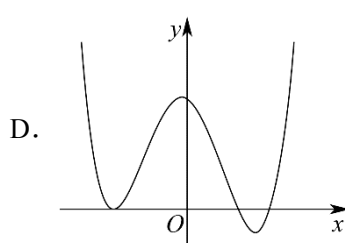
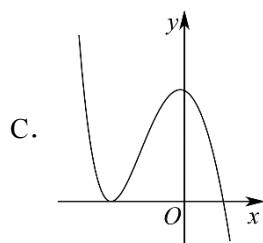
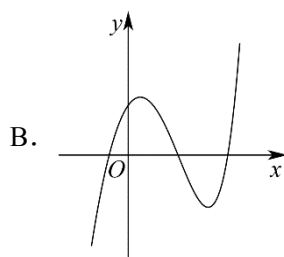
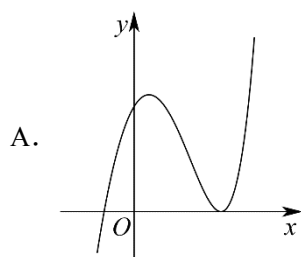
又函数图象在 $x = 0$ 的右侧部分函数为单调递增的，

符合条件的只有 $y = [f(x) - f(-x)] \cdot g(x) = (2^x - 2^{-x}) \cdot \sin x$ ，

故选：C.

【举一反三】

1. (2022·江苏盐城·三模) 函数 $f(x) = 4^x - 4x^2$ 的大致图象是()



【答案】B

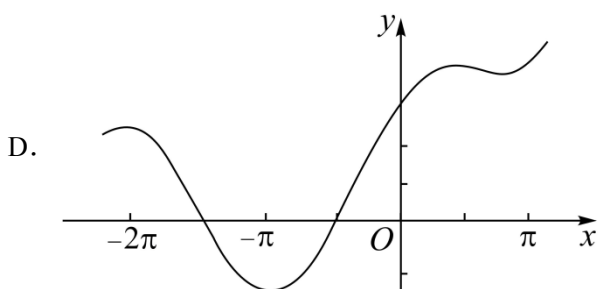
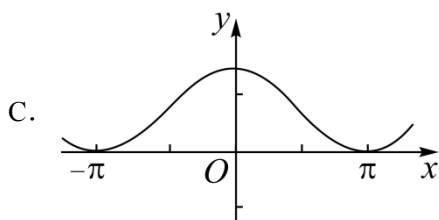
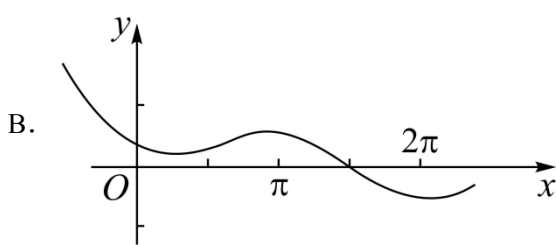
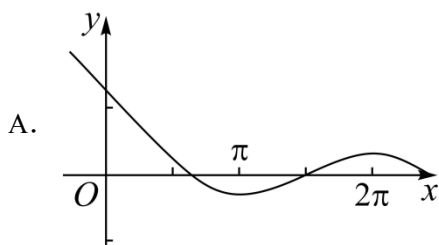
【解析】 $x \rightarrow +\infty$ 时，指数函数增速快于二次函数，故 $f(x) \rightarrow +\infty$ ，图象单调递增，故排除 C；

$x \rightarrow -\infty$ 时， $4^x \rightarrow 0$ ， $-4x^2 \rightarrow -\infty$ ，故 $f(x) < 0$ ，故排除 D；

又 $f(1)=f(2)=0$ ，即 $f(x)>0$ 时有两个零点，故图象 B 符合，图象 A 不符合。

故选：B.

2. (2022·浙江金华·三模) 若函数 $f(x)=a^x+a\cos x(a>0)$ ，则下列图象不可能是 ()



【答案】B

【解析】当 $a=1$ 时， $f(x)=\cos x+1$ ，与选项 C 相符；

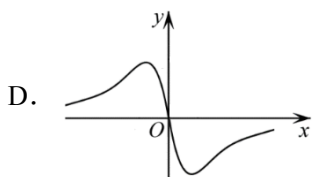
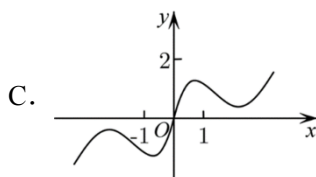
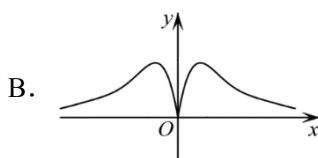
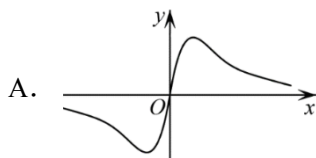
当 $a>1$ 时， $f(\pi)=a^\pi+a\cos\pi=a^\pi-a>0$ ； $f(-\pi)=a^{-\pi}+a\cos(-\pi)=a^{-\pi}-a<0$ ，与选项 D 相符；

当 $0<a<1$ 时， $f(\pi)=a^\pi-a<0$ ； $f(2\pi)=a^{2\pi}+a\cos 2\pi=a^{2\pi}+a>0$ ，与 A 相符；

$\therefore f(x)$ 图象不可能是 B 中图象。

故选：B.

3. (2022·江苏连云港·模拟预测) 已知函数 $f(x)=\frac{\sin 3x-6x}{e^{|x|}}$ 的图象大致为 ()



【答案】D

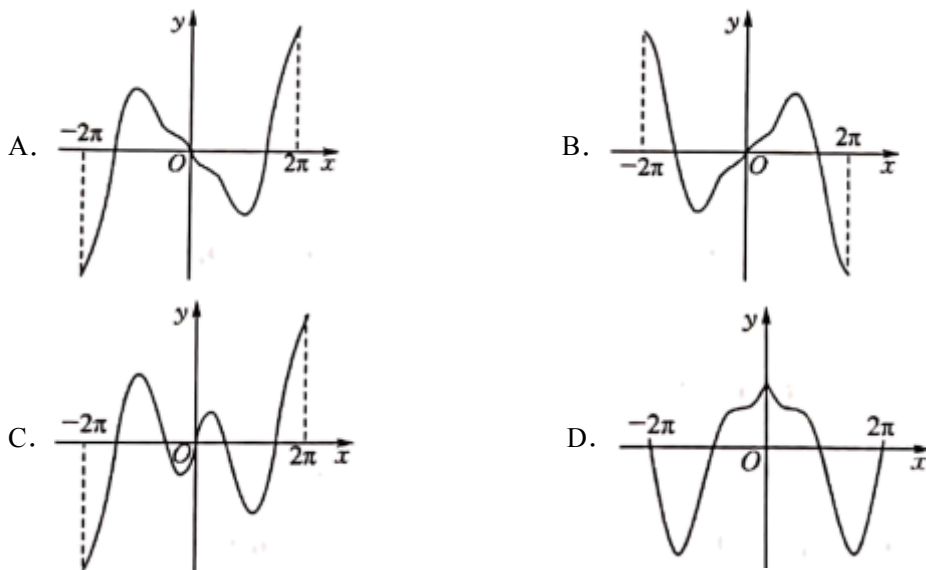
【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $f(-x) = \frac{\sin 3(-x) - 6(-x)}{e^{-|x|}} = -\frac{\sin 3x - 6x}{e^{|x|}} = -f(x)$ ，即函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

B 不满足；

而当 $x > \frac{1}{6}$ 时， $\sin 3x \leq 1, 6x > 1, e^{|x|} > 0$ ， $f(x) < 0$ ，选项 A，C 不满足，选项 D 符合题意。

故选：D

4. (2022·山东菏泽·二模) 函数 $f(x) = \frac{5\sin x}{e^{|x|}} + x \cos x$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的图象大致为 ()



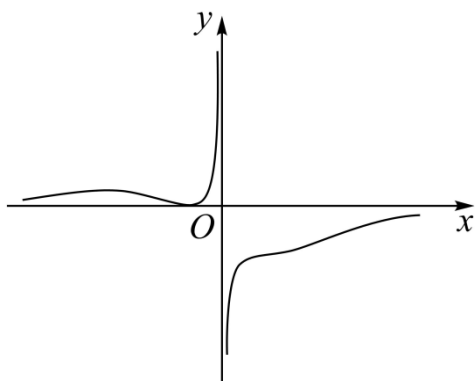
【答案】C

【解析】首先 $f(-x) = -f(x)$ ，所以函数是奇函数，故排除 D， $f(2\pi) = 2\pi$ ，故排除 B，

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $f(x) > 0$ ，故排除 A，只有 C 满足条件。

故选：C

5. (2022·浙江绍兴·模拟预测) 函数 $f(x) = \frac{(x+m)^2}{a^x - a^{-x}}$ ，的图象如图所示，则 ()



A. $m < 0, 0 < a < 1$ B. $m < 0, a > 1$ C. $m > 0, 0 < a < 1$ D. $m > 0, a > 1$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/417130064126010051>