

目录

第1讲 隐零点问题.....	1
第2讲 放缩.....	7
第3讲 端点效应与洛必达法则.....	10
第4讲 凹凸反转.....	13
第5讲 数列不等式.....	16
第6讲 独立型双变量(变量可分离).....	20
第7讲 糅合型双变量(变量不可分).....	22

第1讲 隐零点问题

导函数为超越函数，零点存在却无法求出，我们称之为隐零点。通过对零点“设而不求”，整体代换，从而解决问题。我们称这类问题为“隐零点”问题。操作步骤如下：

第一步：用零点存在性定理判定导函数零点的存在性，列出零点方程 $f'(x_0)=0$ ，并结合 $f'(x)$ 的单调性得到零点范围；

第二步：以零点为分界点，说明导函数 $f'(x)$ 的正负，进而得到 $f(x)$ 的最值表达式；

第三步：将零点方程适当变形，整体代入最值式子进行化简。

【例1】已知函数 $f(x)=ae^x-b\ln x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=(e-1)x+1$ 。

(1) 求 a, b 的值；

(2) 求证： $f(x) > 2$ 。

【解析】(1) 函数 $f(x)=ae^x-b\ln x$ 的导数为 $f'(x)=ae^x-\frac{b}{x}$ ，

函数 $f(x)=ae^x-b\ln x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 $k=ae-b$ ，

由切线方程 $y=(e-1)x+1$ ，可得

$$ae-b=e-1, e=ae,$$

解得 $a=1, b=1$ ；

(2)证明: $f(x) = e^x - \ln x$,

导数为 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $x > 0$, 易知 $f'(x)$ 为增函数, 且 $f'(1) > 0, f'(\frac{1}{2}) < 0$.

所以存在 $m \in (\frac{1}{2}, 1)$, 有 $f'(m) = 0$, 即 $e^m = \frac{1}{m}$,

且 $x > m$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增;

$0 < x < m$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减,

可得 $x = m$ 处 $f(x)$ 取得最小值 $f(m) = e^m - \ln m$

$$= \frac{1}{m} + m > 2,$$

可得 $f(x) > 2$ 成立.

【例 2】设函数 $f(x) = 2e^x - (x-a)^2$ ($a \in \mathbb{R}$), e 为自然对数的底数.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: 若 $x \geq 0, \ln 2 - 2 \leq a < -1$, 则 $f(x) \geq 0$.

【解析】(1) 因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f'(x) = 2e^x - 2(x-a) = 2(e^x - x + a) \geq 0$ 恒成立.

令 $g(x) = e^x - x + a$, 当 $x \in [0, +\infty)$, $g'(x) = e^x - 1 \geq 0$

$g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

依题意有 $g(x)_{\min} = g(0) = 1 + a \geq 0$, 得 $a \geq -1$

(2) 由 (1) 可知, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $\ln 2 - 2 \leq a < -1$ 时,

$$g(0) = 1 + a < 0, g(\ln 2) = 2 - \ln 2 + a \geq 0,$$

存在 $x_0 \in (0, \ln 2]$, 使得 $g(x_0) = e^{x_0} - x_0 + a = 0$,

且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/417131166113006116>