

高中生排列组合解题能力调查研究

摘要：排列组合是高中计数原理这一章节中的重要组成部分，与实际生活也密切相关。排列组合的学习可以提升学生的数学核心素养，有利于渗透数学思想方法，发展学生的数学思维。由于排列组合与实际生活息息相关，排列组合的问题也五花八门，要从其中识别出对应的解题策略与模型也不容易。那么现阶段，学生在排列组合问题中的解题能力如何？笔者通过阅读相关文献，以 SOLO 分类理论为基础，设计了问卷，对 182 名高中生进行了排列组合解题能力的调查。结果显示大多数学生都处于多点结构水平。本文最后总结了一些常见的排列组合问题以及相应的解题策略。

关键词：排列组合；SOLO 分类理论；解题能力

1 绪论

1.1 研究背景与意义

1.1.1 排列组合在实际生活中的运用

排列组合出现在我们生活的方方面面，一日三餐的选择与安排，上衣、裤子与鞋子的搭配，出门交通方式的选择与安排。体育课中的排位，接力赛中的棒次，土地的绿化安排，生物基因的排列。小到衣食住行，大到生物基因工程都体现了排列组合的思想。排列组合的题目往往与生活实际紧密联系，背景千变万化。

1.1.2 排列组合的学习对提升数学核心素养的作用

高中数学的核心素养包括了数学抽象、逻辑推理、数学建模、数据分析、数学运算、直观想象六部分[1]。在排列组合的学习中可以提升学生的数学核心素养。

从数学抽象的角度来看，在解决排列组合的问题时，首先要理解实际情境，然后从实际情境中抽象出数学问题。在将实际问题数学化的过程中，学生的数学抽象能力也有所提高。从数学建模的角度来看，在抽象出数学问题后，需要转化为已知的数学模型或公式进行求解，再把所得结果代入实际问题中。在发现问题-提出问题-分析问题解决问题的过程中感受数学与生活的联系，培养数学建模的思想。从数学运算的角度来看，在解决排列组合问题时必然会涉及到排列数与组合数的运算，体现了数学运算的素养。

1.1.3 数学课标中的排列组合

排列组合从 1923 年起就存在于我国的中学数学教科书中，直至今日仍然是我国中学数学中重要的一部分。在新课程理念的贯彻过程中，排列组合的教学内容、教学目标、教学方法与教学评价发生了变化，对于排列组合的学习要求也在不断完善。在 1951 年的《中学数学课程标准草案》中对排列组合的教学要求：在讲授排列组合时，应注重理解，不应使学生死记公式[2]。在 1963 年的《全日制高中数学教学大纲》中，对排列组合学习的要求修改为：理解排列和组合的含义，可以由使用排列和

组合的基本公式来解决一些简单的问题[3]。其中开始要求学生在学习排列组合要与实际联系。经过1986年《全日制高中数学教学大纲》和《普通高中课程标准(2013)》的进一步完善,排列组合与现实的联系越来越紧密[4]。并且在1988年概率引入高中数学以后,排列组合被纳入到概率的知识体系中。在最新版本课程标准(《普通高中数学课程标准(2017)》)中关于排列组合的叙述:通过实例,理解排列、组合的概念;能够利用计数原理推导排列数的公式、组合数的公式[1]。虽然排列组合的内容在新课标中不要求应用,但其基本的数学原理与数学思想仍是高中数学不可缺少的一部分。排列组合是学习概率的知识准备,是解决二项分布与古典概率的计算问题的工具。

1.2 研究问题的确定

经查阅发现,国外有关高中排列组合研究主要集中于学生思维结构以及常见错误类型归纳等方面[5],而国内的研究主要是关于高中排列组合教学策略探究和解题策略的归纳,关于中学生排列组合解题能力的调查研究比较少。笔者认为排列组合的解题能力对于高中生思维的培养较为重要,只有了解学生的能力,分析错误原因,才能更好地提高学生的解题能力。从排列组合的解题策略上来说,大多数研究都是从解题方法入手进行分析。由于排列组合问题形式的多变,对于学生来说判断使用何种解题方法也成为了一种难题。

故本文研究的问题可以确定如下:

1. 通过有关的排列组合问卷调查,分析学生对排列组合学习与解题的认知。
2. 通过排列组合的测试卷,从客观上分析出学生存在的问题,调查学生排列组合的解题能力。
3. 高中排列组合的常见题型与解题策略总结。

1.3 基于 SOLO 分类理论的学习评价

SOLO (structure of the observed learning outcome)分类理论原意是“观察到的学生学习结果的结构”,是由比格斯(Biggs, J .B)和科林斯(Collis, K. F)提出的一种描述智力发展的一般性框架。该理论将学生的学习分为五个水平,分别是:1 前结构水平(P):学习者被情景中无关的方面所迷惑或误导,无法理解与解决问题;2 单一结构水平(U):学生关注问题,但只使用一个相关的要点,找到一个线索就立即跳到结论上去;3 多点结构水平(M):学生使用两个或多个要点,却不能觉察到这些要点之间的联系,不能对要点进行整合;4 关联结构水平

(R):学生能够使用所有可获得的线索,并将它们编入总体的联系框架中,总体成为在已知系统中内在一致的结构;5 拓展抽象水平(E):学生能够对问题进行抽象概括,从理论的角度分析问题,深化问题,使问题本身的意义得到拓展[6, 7]。

2 研究设计与结果分析

2.1 研究思路

本文是针对高中生排列组合解题能力的调查研究，将分成以下四步进行。

首先是查找并收集有关排列组合的题型，再依据 SOLO 分类理论对其进行分类。比格斯与科林斯将学生的学习水平分为五个层次。本研究将基于上述五个水平，从两个基本的排列原理、排列与组合的概念、排列问题、组合问题、排列组合相结合问题五方面对学生的解题情况进行考察。将不同排列组合问题进行分类。其解题能力主要体现水平如下表 2-1:

表 2-1 SOLO 水平层次表

SOLO 水平	情况
前结构水平 (P)	答案空白或是无意义的答案，无法理解问题要求解的目标。
单一结构水平 (U)	抓住一个点就去解决问题，思路混乱，用错模型或混淆不同模型。
多点结构水平 (M)	能够看出题目考察的模型，但容易出现忽略内部顺序、重复排列、分类混乱容易出现遗漏或重复的情况、不能准确地运用公式和模型解决问题的错误。
关联结构水平 (R)	能够根据题意解决问题，但不能将问题进一步深化。
拓展抽象水平 (E)	能够对复杂问题抽象概括，找到解决问题的关键，为此类总结出一般解法。

其次是制定调查卷，对研究对象进行测试调查。然后是针对调查结果进行分析。最后将排列组合有关的题型与解题策略相结合进行总结归纳。

2.2 研究方法

本文采取了以下的研究方法

(1) 文献研究法

通过我国知网、图书馆等渠道搜集国内外关于排列组合的文献资料，对文献资料进行整理和分类的方式，弄清近几年来排列组合方面的研究的趋势以及研究的缺陷不足，从中发现问题。并且通过参考各类文献，搜集合适的题型题目，为调查卷的设计做准备。

(2) 问卷调查法

本研究旨在了解高中生排列组合解题能力水平，问卷调查法是调查研究中使用最多的方法。笔者为了研究高中生在排列组合的解题能力，采用了问卷调查法，调查学生对于排列组合内容学习的态度，并编制测试卷，调查学生的真实水平和实际情况。

在问卷编制上主要考虑了，学生的基本学习情况，对待排列组合的学习态度，在解题过程中的常见错误以及对于出现学习问题的归因。具体构成情况如表 2-2 所示：表 2-2 问卷各调查题目的列表

题号	调查目的
1、2	学生的基本情况
3、4	学习兴趣
5、6、7	排列组合学习与解题过程中的自我效能感
8、9	错误与归因

为了考察学生对排列组合有关知识与解题策略及方法的掌握程度，测试卷的题目来源于高中生排列组合例常见的经典问题，具体构成情况如表 2-3 所示：表 2-3 测试卷各题考察内容列表

题号	考察目的
知识点	
两种计数原理	
理	对两种计数原理的辨析
排列与组合	
	是否能够分清排列与组合的概念
排数问题	能够正确计算排列数
4 (1)、4	
相邻与不相邻问题	
(2)	
6	
4 (3) 定序问题	考察学生能否识别与处理一些简单的排列与组合问题，对捆绑法、插空法、隔板法、定序
5	
题	
名额分配问题	
7	
题	
染色问题	
路线问题	考察学生从实际复杂的问题中识别出排列组合模型能力，能否合理分类，用数学思想解

2.3 研究对象

本文针对的是高中生排列组合解题能力的调查研究。排列组合的学习一般安排在高二下学期，为了保证调查对象已经学习了这方面的内容，故笔者选择高三理科学生进行调查。本次调查研究的学校为江西省上饶市玉山县第一中学。玉山县第一中学属于省首级重点中学，本次调查选取了普通班与重点班两类班级。发放调查卷 200 份，实际收回 189 份，回收率为 94.5%，其中有效测试卷为 182 份，有效率为 96.3%。

2.4 研究结果的分析

本次调查卷分为了两部分，第一部分为调查问卷，第二部分为测试题。

2.4.1 问卷调查结果分析

(1) 学生的基本情况第 2 题：你平时的成绩

优秀（130-150）良好（110-130）中等（90-110）较差（60-90）差（60 以下）由调查结果绘制以下图的柱形图 2-1：

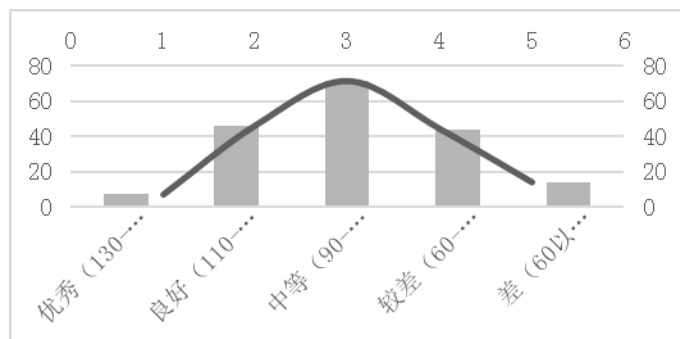


图 2-1 问卷第 1 题回答情况柱形图

由图表可得，成绩中等（90-110）的人数较多，其次是良好（110-130）和较差（60-90），优秀（130-150）与差（60 以下）的人数较少。学生的成绩整体呈正态分布，说明本研究样本的选取较有信服力。

(2) 学生的学习兴趣第 3 题：你对数学学习感兴趣吗？是否第 4 题：你对排列组合感兴趣吗？是否

根据调查结果，绘制如下柱形图 2-2，对比可以发现喜欢数学学科的学生占了 36.81%，有 49.45% 对排列组合的学习感兴趣。说明相较于数学其他的知识模块而言，学生对排列组合的学习更加感兴趣，但整体上的学习兴趣还是较低。

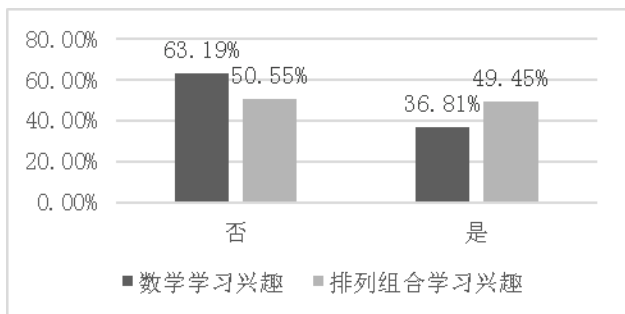


图 2-2 学习兴趣柱形图

(3) 排列组合学习与解题过程中的自我效能感第 5 题：你熟悉排列组合的一些解题方法吗？十分熟悉熟悉不熟悉第 6 题：在排列组合的学习过程中，你觉得困难吗？容易一般困难第 7 题：在排列组合解题过程中，你觉得有难度吗？容易一般困难

根据调查结果绘制如下的环形图与柱状图。由图 2-3 可知，有 37% 的学生对于排列组合的解题方法不熟悉。由图

2-4 可见，有 35.82% 的学生在排列组合的学习过程中觉得困难，有 32.97% 的学生在解决排列组合问题时感觉到困难。

约有三分之一的学生对于排列组合的学习与解题感觉到很难，并且对于解题方法的掌握是不够的。

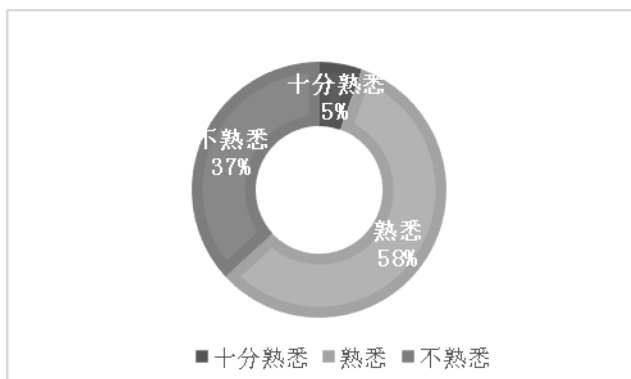


图 2-3 问卷第 5 题回答情况环形图

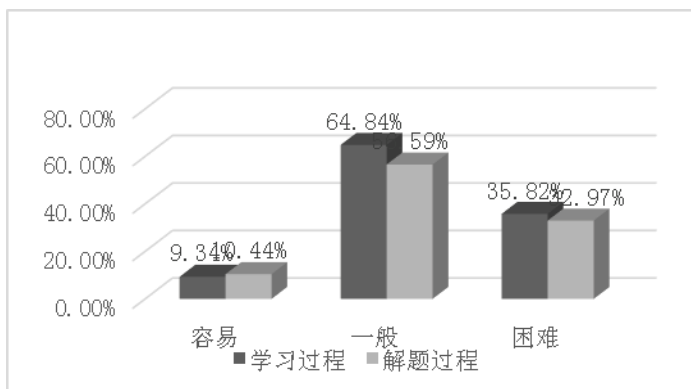


图 2-4 问卷第 6、7 题回答情况柱状图

(4) 学生在排列组合的解题错误与归因第 8 题：你在排列组合解题过程中，容易出现的问题有？

看不懂题目

很难从题目中识别出相应的排列组合方法分类混乱，容易出现重复或遗漏的情况计算失误

想不到解题思路

其他_____ [8]

第 9 题：你觉得排列组合学不好的原因有哪些？对排列组合这个内容不感兴趣老师的教学水平不好对于学习不够努力数学基础太差

粗心

其他_____

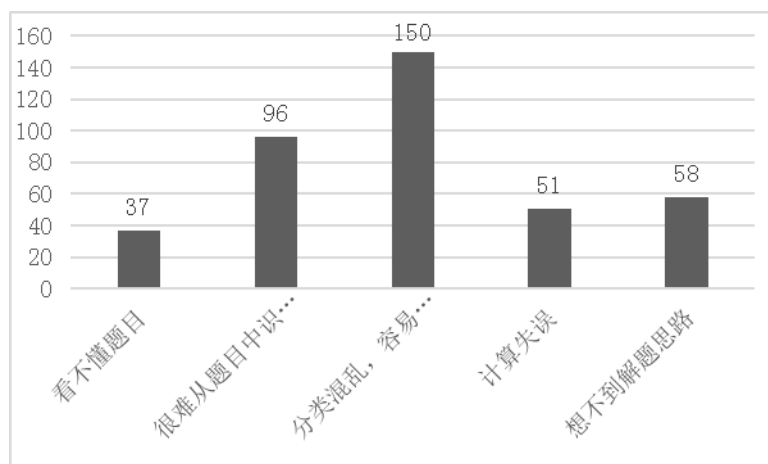


图 2-5 问卷第 8 题回答情况柱形图

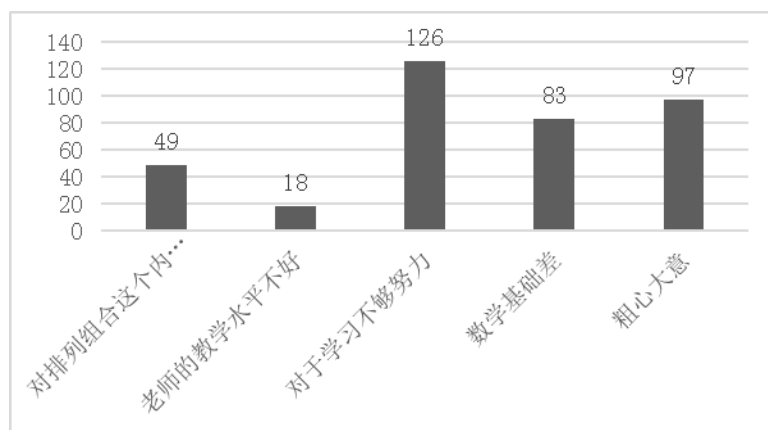


图 2-6 问卷第 9 题回答情况柱形图

由图 2-5 可以看出大部分学生在解决排列组合问题时都容易出现分类混乱，重复或遗漏的错误。约二分之一的学生对于从题目中识别出排列组合的模型感到困难。计算错误、思路不清、看不懂题目也是学生在解题时出现的问题。还有一些学生觉得在排列组合解题过程中，容易出现用错排列组合模型的情况。

根据图 2-6, 约百分之七十的学生认为自己对于学习不够努力导致了排列组合的学习出现问题, 将近一半的学生认为数学基础差和粗心大意影响了题目对排列组合的学习, 有约百分之三十的学生认为兴趣是影响学习的因素。还有一部分学生觉得自己在学习过程中缺乏缜密的数学思维。

2.4.2 测试题解题情况分析

第 1 题: “从 A 市到 B 市有两种乘车方式, 从 B 市到 C 市有四种乘车方式, 则从 A 市到 C 市有几种乘车方案?” 在这个问题中运用到了什么计数原理?

表 2-4 第 1 题学生答题情况表

错误	正确
5	177
2.75%	97.25%

此题是一道简单的概念辨析题, 主要考察了学生对排列组合中两种计数原理的理解。由数据可见绝大部分

(97.25%) 的学生在对于计数原理的理解上是比较准确的, 存在少部分 (2.75%) 的学生无法分辨加法计数原理与乘法计数原理。

第 2 题: “7 人站成一排, 其中甲乙相邻共有多少种不同的排法“这个问题属于_____问题? 表 2-5

第 2 题学生答题情况表

错误	正确
18	164
9.89%	90.11%

此题主要考察了学生对排列组合两个概念的理解与辨析, 本题涉及了一个常见的排列问题。有 90.11% 的学生都能认识到这是一道排列问题, 还存在 9.89% 的学生无法分清排列与组合这两个概念。相较于对加法计数原理与乘法计数原理的辨析, 本题错误的人数更多, 对排列组合基本概念的辨析不清。

第 3 题: 1、2、3、4、5 这 5 个数字可以组成多少个数字不重复不同的五位数?

本题是一道简单的排列题, 生对排列概念的理解以及排列数的计算。本题学生答题情况如下表所示:

表 2-6 第 3 题学生答题情况表

错误	正确
12	170
6.59%	93.41%

第3题单一结构水平(U)为最高的SOLO水平,各个层次水平学生回答情况如下:前结构水平(P)占6.59%:空白,无法理解题目的要求,或未分清是排列问题,利用组合数解决。

单一结构水平(U)占93.41%:能够判断出本题为一道排列题,将五个数字进行排列,即可计算出排列数的结

果。将5个数字进行排列,得到结果为 $A_5^5 = 120$ 。

第4题:王老师将7名学生排成一排拍照,其中女生4人,男生3人,按以下要求有多少种排法:

- (1) 4名女生站在一起;
- (2) 没有男生相邻;
- (3) 男生按从左往右,由低到高排。

本题相较于第3题是一道复杂一些的排列问题,考察了学生对捆绑法和插空法运用以及定序问题的处理。第4题的答题情况如下表:

表2-7 第4题学生答题情况表

题号	错误	正确	未答
(1)	23 12.64%	152 83.51%	7 3.85%
(2)	54 29.67%	109 59.89%	19 10.44%
(3)	78 42.86%	61 33.52%	43 23.62%

第4题第一问,关联结构水平(R)为最高的SOLO水平,各个层次水平学生回答情况如下:前结构水平(P)占3.85%:空白。

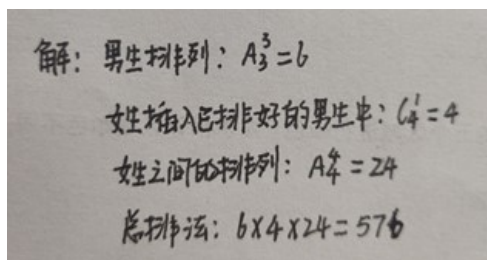
单一构水平 (U) 占 4.40%: 用错方法, 未利用捆绑法解决问题。

多点结构水平 (M) 占 8.24%: 利用了捆绑法, 但忽略了解绑这一步骤。

利用了捆绑法与插空法, 将所有男生进行排列, 将所有女生进行捆绑看作一个整体插入已排好的男生序列中, 但忽略了女生内部的排列顺序, 未对女生解绑。

关联结构水平 (R) 占 83.51%: 能够很好地运用捆绑法解决问题。

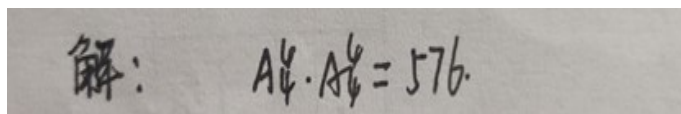
如图 2-7 学生 1 利用了捆绑法与插空法, 将所有男生进行排列, 将所有女生进行捆绑看作一个整体插入已排好的男生序列中, 然后再对女生内部的排列。



解: 男生排列: $A_3^3 = 6$
女生插入已排好的男生中: $C_4^1 = 4$
女生之间的排列: $A_4^4 = 24$
总排法: $6 \times 4 \times 24 = 576$

图 2-7 测试卷第 4 (1) 题学生示例 1

如图 2-8 学生 3 利用了捆绑法, 将有女生进行捆绑, 看作一个元素与剩下的男生进行排列, 后对女生内部解绑。



解: $A_4^4 \cdot A_4^4 = 576$

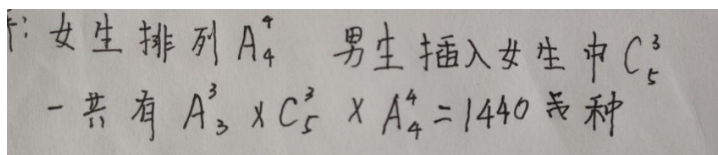
图 2-8 测试卷第 4 (1) 题学生示例 2

第 4 题第二问, 关联结构水平 (R) 为最高的 SOLO 水平, 各个层次水平学生回答情况如下: 前结构水平 (P) 占 10.44%: 空白。

单一结构水平 (U) 占 22.53%: 利用错误方法或对插空法的掌握不够熟练, 无法分清是将男生先排列女生插入, 还是将女生先排列男生后插入。本题中男生为不相邻对象, 应该考虑将女生先排列后再插入男生, 如果将男生先排列, 则会将问题复杂化, 要考虑的情况变多, 容易发生错误。

多点结构水平 (M) 占 7.14%: 能够分清将男生插入女生中, 但结果计算错误。

关联结构水平 (R) 占 59.89%: 能够合理利用插空法解决问题得到答案, 如下图 2-9 为学生的答题情况。首先将女生进行排列, 产生 5 个空隙, 然后将不相邻的 3 名男生插入 5 个空隙中, 最后对男生顺序进行排列, 计算出正确结果。



解: 女生排列 A_4^4 男生插入女生中 C_5^3
一共有 $A_3^3 \times C_5^3 \times A_4^4 = 1440$ 种

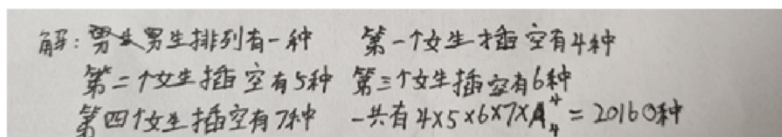
图 2-9 测试卷第 4 (2) 题学生示例

第4题第三问，关联结构水平（R）为最高的SOLO水平，各个层次水平学生回答情况如下：前结构水平（P）占23.62%：空白。

单一结构水平（U）占8.79%：运用了插空法，但未考虑到前一位女生插入之后会产生新的空隙，或用错方法。

多点结构水平（M）占34.07%：能够利用插空法或是定序问题除法策略，但在计算过程中出现错误或对女生重复排列。

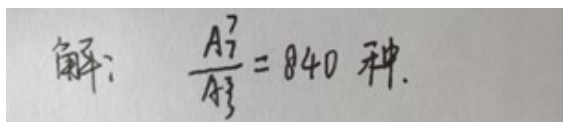
学生错误情况如下图2-10，采用插空法，先将男生按从左往右，由低到高排列，产生了5个空，然后选择一位女生插入其中有4种方法，这时会产生5个空，再选择一位女生插入其中有5种情况，并产生了6个空隙，选择一位女生插入这6个空隙中有6种选择，插入后产生了7个空隙，最后一名女生从7个空隙中选择插入有7种。但在最后又对插入的4名女生进行了排列，而每一步的插入过程中已经包含了女生之间的排序。



解：男女男生排列有一种 第一个女生插空有4种
第二个女生插空有5种 第三个女生插空有6种
第四个女生插空有7种 一共有 $4 \times 5 \times 6 \times 7 \times A_4^4 = 20160$ 种

图2-10 测试卷第4（3）题学生示例1 关联结构水平（R）占33.52%：能够利用定序问题除法策略或插空法正确解答。

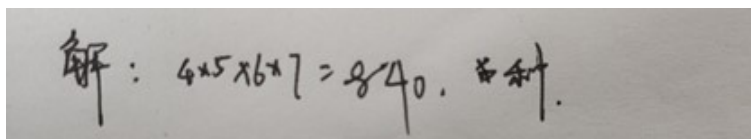
如图2-11为学生1解答过程，该学生利用了定序问题除法策略，先将7名学生进行排列，由于男生之间的顺序是规定的，然后再除以男生排列的排列数，得到了男生从左到右由低到高的排列总数。



解： $\frac{A_7^7}{A_3^3} = 840$ 种。

图2-11 测试卷第4（3）题学生示例2

如图2-12为学生2利用插空法的解答过程，先将男生按顺序排好，女生依次插入其中。



解： $4 \times 5 \times 6 \times 7 = 840$ 种。

图2-12 测试卷第4（3）题学生示例3

如图2-13为学生3的解答过程，3名男生与4名女生排成一列，会产生7个位置，由于男生的顺序是确定的，所以可以从7个位置中选出3个给男生，剩下的4个空位则由女生排列插入。

解: ---
 $C_7^3 \times A_4^4 = 840$ 种

图 2-13 测试卷第 4 (3) 题学生示例 4 第 5 题: 6 本不同的书, 分成 3 堆, 每堆 2 本有多少种不同的分法?

本题主要考察了学生对平均分组分配问题解法的掌握, 答题情况如下表所示: 表 2-8 第 5 题学生答题情况表

错误	正确	未答
113	62	7
62.09%	34.06%	3.85%

本题中, 关联结构水平 (R) 为最高的 SOLO 水平, 各个层次水平学生答题情况如下: 前结构水平 (P) 占 3.85%; 空白。

单一结构水平 (U) 占 46.70%: 方法错误或将三组看成不同的小组进行分配。

错误情况为: 对于题目的要求为看清, 误看成先组后排问题进行处理, 并且对于先组后排的解题方法把握不全。

学生 2 错误情况如下图 2-14, 先从 6 本书中选择 2 本书分入第一组, 再从剩下 4 本书中选择 2 本放入第二组中, 然后剩下 2 本书放入第三组里, 总数为 90。忽略了三组是没有顺序的, 未将最终结果除以三个小组的排列数。

$C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 90$

图 2-14 测试卷第 5 题学生示例 2

多点结构水平 (M) 占 15.39%: 能够意识到本题为平均分组问题, 每个小组均相同, 但对于三个小组相同增加的排列数情况不明, 未除以三个小组的全排列。

如图 2-15 为学生 3 的答题过程, 先从 6 本书中选择 2 本书分入第一组, 再从剩下 4 本书中选择 2 本放入第二组中, 然后剩下 2 本书放入第三组里, 最后除以 3。错误在于选择书本放入小组内时考虑的说这三个小组是有顺序的, 所以在最后要除以三个小组排列产生的排列数, 而不是组数。

$\frac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{3} = 30$

图 2-15 测试卷第 5 题学生示例 3

关联结构水平 (R) 占 34.06%: 学生能够正确解答平均分组问题, 求得结果为 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_8^8} = 15$ 种。

第 6 题: 有 9 本不同的书, 其中数学书 3 本, 语文书 2 本, 英语书 2 本, 科学书 2 本, 现在要将这些书排成一排放到书架上, 并且同类型书排在一起, 则有多少种排法?

此题为一道排列问题, 主要考察了学生是否能够从题目找到问题的关键, 运用捆绑法解决问题, 学生的答题情况如下表:

表 2-9 第 6 题学生答题情况表

错误	正确	未答
29	147	6
15.93%	80.77%	3.30%

本题关联结构水平 (R) 为最高的 SOLO 水平, 各个层次水平学生答题情况如下: 前结构水平 (P) 占 3.30%: 空白。

单一结构水平 (U) 占 4.94%: 未利用捆绑法解决问题。

多点结构水平 (M) 占 10.99%: 能够利用捆绑法解决问题, 但忽略了同类型的课本也是不同的。将数学书、语文书、英语书和科学书分别捆绑, 看作 4 个元素进行排列, 但在排列后忽略了不同类型书内部的顺序, 未对四部分解绑。

关联结构水平 (R) 占 80.77%: 利用捆绑法解决问题。先将四类书捆绑排列, 然后再对不同类型的书解绑, 有

$$A_4^4 \times A_3^3 \times A_2^2 \times A_2^2 \times A_2^2 = 1152 \text{种。}$$

第 7 题: 有 10 名运动员名额, 分给 7 个班, 要求每个班至少有一个名额, 则有多少种分法?

本题主要考察了学生对隔板法的掌握, 能够从题目中看出对应的排列组合模型, 学生的答题情况如下表: 表 2-10 第 7 题学生答题情况表

错误	正确	未答
108	51	23
59.34%	28.02%	12.64%

本题关联结构水平 (R) 为最高的 SOLO 水平, 各个层次水平学生答题情况如下: 前结构水平 (P) 占 12.64%: 空白。

单一结构水平 (U) 占 22.53%: 未能从题目中明确解题方法。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/417160025035006201>