

湖南省益阳箴言中学 2023-2024 学年高三适应性调研考试数学试题

考生请注意：

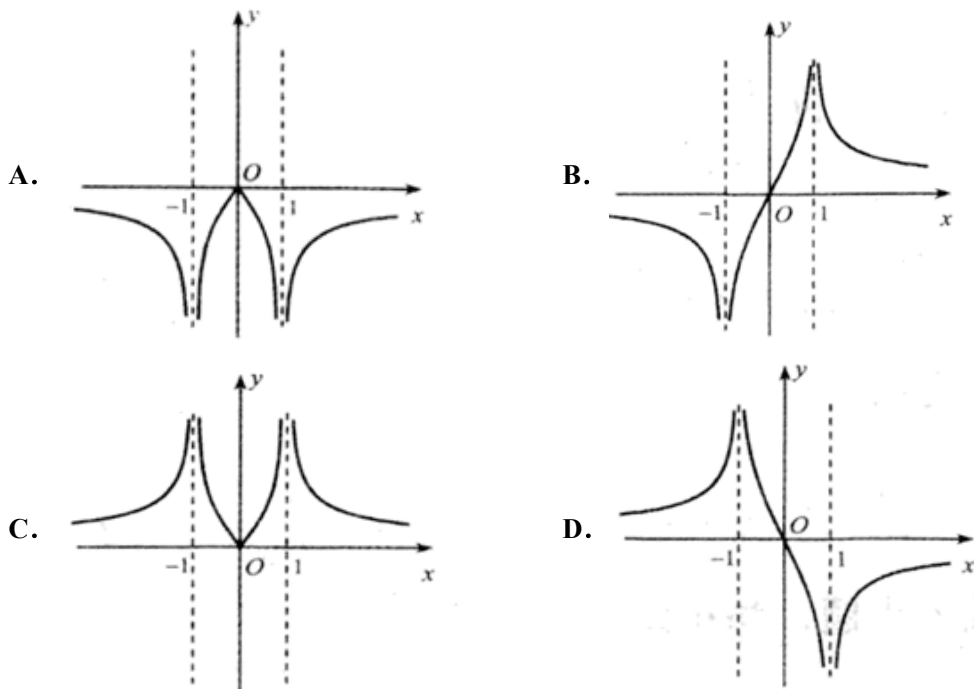
1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 F 是双曲线 $C: kx^2 + y^2 = 4|k|$ (k 为常数) 的一个焦点，则点 F 到双曲线 C 的一条渐近线的距离为 ()

- A. $2k$ B. $4k$ C. 4 D. 2

2. 函数 $f(x) = \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$ 的大致图像为 ()



3. 已知正三棱锥 $A-BCD$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，其底面边长为 4， E 、 F 、 G 分别为侧棱 AB ， AC ， AD 的中点.若 O 在三棱锥 $A-BCD$ 内，且三棱锥 $A-BCD$ 的体积是三棱锥 $O-BCD$ 体积的 4 倍，则此外接球的体积与三棱锥 $O-EFG$ 体积的比值为 ()

- A. $6\sqrt{3}\pi$ B. $8\sqrt{3}\pi$ C. $12\sqrt{3}\pi$ D. $24\sqrt{3}\pi$

4. 若 $x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$) 与 $\frac{3+i}{1-i}$ 互为共轭复数，则 $x + y =$ ()

- A. 0 B. 3 C. -1 D. 4

5. 已知 $(1 + \lambda x)^n$ 展开式中第三项的二项式系数与第四项的二项式系数相等， $(1 + \lambda x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ，

若 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 242$ ，则 $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n$ 的值为()

- A. 1 B. -1 C. 81 D. -81

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu =$ ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

7. 若直线 $y = -2x$ 的倾斜角为 α , 则 $\sin 2\alpha$ 的值为 ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\pm \frac{4}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

8. 2019 年末, 武汉出现新型冠状病毒肺炎 (COVID-19) 疫情, 并快速席卷我国其他地区, 传播速度很快. 因这种病毒是以前从未在人体中发现的冠状病毒新毒株, 所以目前没有特异治疗方法, 防控难度很大. 武汉市出现疫情最早, 感染人员最多, 防控压力最大, 武汉市从 2 月 7 日起举全市之力入户上门排查确诊的新冠肺炎患者、疑似的新冠肺炎患者、无法明确排除新冠肺炎的发热患者和与确诊患者的密切接触者等“四类”人员, 强化网格化管理, 不落一户、不漏一人. 在排查期间, 一户 6 口之家被确认为“与确诊患者的密切接触者”, 这种情况下医护人员要对其家庭成员随机地逐一进行“核糖核酸”检测, 若出现阳性, 则该家庭为“感染高危户”. 设该家庭每个成员检测呈阳性的概率均为 p

($0 < p < 1$) 且相互独立, 该家庭至少检测了 5 个人才能确定为“感染高危户”的概率为 $f(p)$, 当 $p = p_0$ 时, $f(p)$ 最大, 则 $p_0 =$ ()

- A. $1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

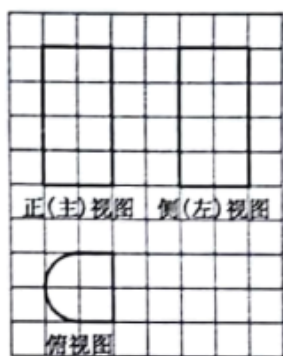
9. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π , $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后关于 y 轴对称, 则 $f(x - \frac{\pi}{6})$ 的单调递增区间为 ()

- A. $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right] k \in \mathbb{Z}$ B. $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] k \in \mathbb{Z}$
C. $\left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right] k \in \mathbb{Z}$ D. $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right] k \in \mathbb{Z}$

10. 已知函数 $\square(\square) = \sin\left(\square\square + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\square\square$ ($\square > 0$) 在 $[0, \pi]$ 上的值域为 $\left[\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right]$, 则实数 $\square$ 的取值范围为 ()

- A. $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right]$ B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ C. $\left[\frac{1}{5}, +\infty\right]$ D. $\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right]$

11. 如图, 网格纸是由边长为 1 的小正方形构成, 若粗实线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的表面积为 ()



- A. $9\pi + 20$ B. $9\pi + 26$ C. $5\pi + 20$ D. $5\pi + 26$

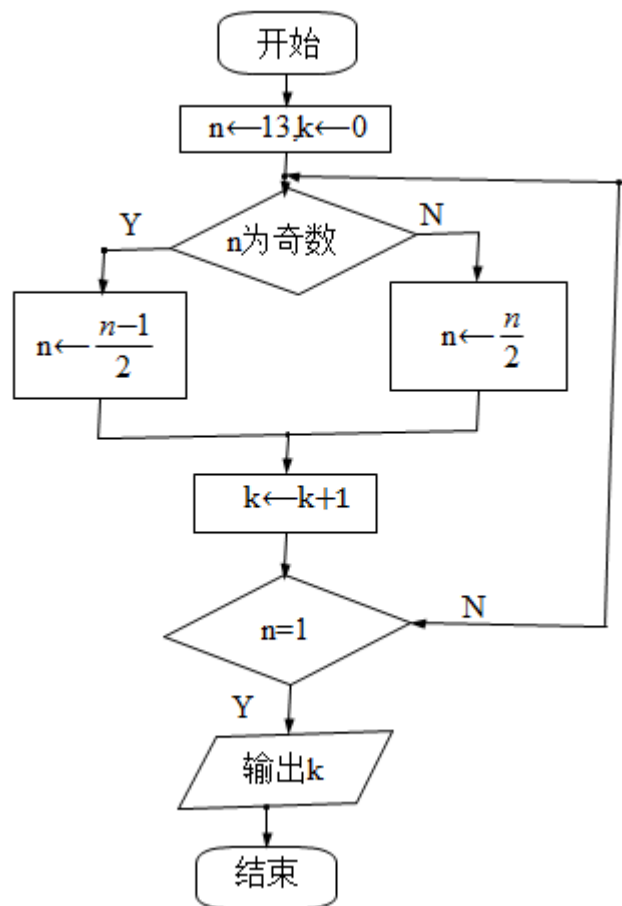
12. 若复数 z 满足 $(1+i)z = |3+4i|$, 则 z 的虚部为 ()

- A. 5 B. $\frac{5}{2}$ C. $-\frac{5}{2}$ D. -5

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2c$ ，若过右焦点且与 x 轴垂直的直线与两条渐近线围成的三角形面积为 c^2 ，则双曲线的离心率为_____.

14. 下图是一个算法流程图,则输出的 k 的值为_____.



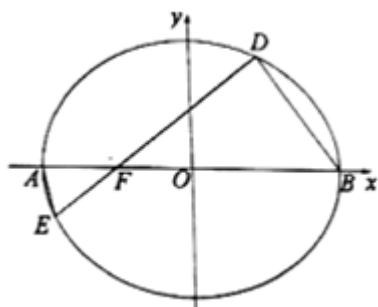
15. $\left(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为_____.

16. 函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为_____; 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \alpha)$ 上单调递增, 则 α 的最大值为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$. 且经过点 $(1, \frac{3}{2})$,

A, B 分别为椭圆 C 的左、右顶点, 过左焦点 F 的直线 l 交椭圆 C 于 D, E 两点 (其中 D 在 x 轴上方).



(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若 $\triangle AEF$ 与 $\triangle BDF$ 的面积之比为 1:7, 求直线 l 的方程.

18. (12 分) 在极坐标系中, 曲线 C 的方程为 $\rho \cos^2 \theta = a \sin \theta (a > 0)$, 以极点为原点, 极轴所在直线为 x 轴建立直

角坐标, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), l \text{ 与 } C \text{ 交于 } M, N \text{ 两点}.$$

(1) 写出曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程;

(2) 设点 $P(2, -1)$; 若 $|PM|, |MN|, |PN|$ 成等比数列, 求 a 的值

19. (12 分) 在世界读书日期间, 某地区调查组对居民阅读情况进行了调查, 获得了一个容量为 200 的样本, 其中城镇居民 140 人, 农村居民 60 人. 在这些居民中, 经常阅读的城镇居民有 100 人, 农村居民有 30 人.

(1) 填写下面列联表, 并判断能否有 99% 的把握认为经常阅读与居民居住地有关?

	城镇居民	农村居民	合计
经常阅读	100	30	
不经常阅读			

合计			200
----	--	--	-----

(2) 从该地区城镇居民中，随机抽取 5 位居民参加一次阅读交流活动，记这 5 位居民中经常阅读的人数为 X ，若用样本的频率作为概率，求随机变量 X 的期望。

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$ 。

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

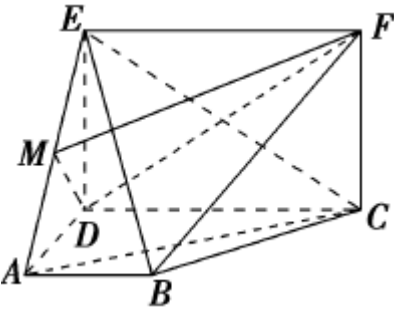
20. (12 分) 设函数 $f(x) = |x+1| + |x-2a| + 1$ 。

- (1) 当 $a=1$ 时，解不等式 $f(x) \leq 6$ ；
- (2) 设 $a < -\frac{1}{2}$ ，且当 $2a \leq x < -1$ 时，不等式 $f(x) \leq 2x+6$ 有解，求实数 a 的取值范围。

21. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 ，上、下顶点分别为 B_1, B_2 ， F 为其右焦点， $\overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{B_1F} = 1$ ，且该椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$ ；

- (I) 求椭圆 C 的标准方程；
- (II) 过点 A_1 作斜率为 k 的直线 l 交椭圆 C 于 x 轴上方的点 P ，交直线 $x=4$ 于点 D ，直线 A_2D 与椭圆 C 的另一个交点为 G ，直线 OG 与直线 A_1D 交于点 H 。若 $\overrightarrow{A_1P} = \lambda \overrightarrow{A_1H}$ ，求 λ 取值范围。

22. (10 分) 如图，矩形 $CDEF$ 和梯形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直， $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ ， $AB = AD = \frac{1}{2}CD$ ， $BE \perp DF$ 。



- (1) 若 M 为 EA 的中点，求证： $AC \parallel$ 平面 MDF ；
- (2) 若 $AB = 2$ ，求四棱锥 $E-ABCD$ 的体积。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

分析可得 $k < 0$ ，再去绝对值化简成标准形式，进而根据双曲线的性质求解即可。

【详解】

当 $k \geq 0$ 时，等式 $kx^2 + y^2 = 4|k|$ 不是双曲线的方程；当 $k < 0$ 时， $kx^2 + y^2 = 4|k| = -4k$ ，可化为 $\frac{y^2}{-4k} - \frac{x^2}{4} = 1$ ，可得虚

半轴长 $b = 2$ ，所以点 F 到双曲线 C 的一条渐近线的距离为 2。

故选：D

【点睛】

本题考查双曲线的方程与点到直线的距离，属于基础题。

2、D

【解析】

通过取特殊值逐项排除即可得到正确结果。

【详解】

函数 $f(x) = \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$ 的定义域为 $\{x | x \neq \pm 1\}$ ，当 $x = \frac{1}{2}$ 时， $f(\frac{1}{2}) = -\ln 3 < 0$ ，排除 B 和 C；

当 $x = -2$ 时， $f(-2) = \ln 3 > 0$ ，排除 A。

故选：D。

【点睛】

本题考查图象的判断，取特殊值排除选项是基本手段，属中档题。

3、D

【解析】

如图，平面 EFG 截球 O 所得截面的图形为圆面，计算 $AH = 4OH$ ，由勾股定理得 $R = \sqrt{6}$ ，此外接球的体积为

$\frac{24\sqrt{6}}{3}\pi$ ，三棱锥 $O-EFG$ 体积为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ，得到答案.

【详解】

如图，平面 EFG 截球 O 所得截面的图形为圆面.

正三棱锥 $A-BCD$ 中，过 A 作底面的垂线 AH ，垂足为 H ，与平面 EFG 交点记为 K ，连接 OD 、 HD 。

依题意 $V_{A-BCD} = 4V_{O-BCD}$ ，所以 $AH = 4OH$ ，设球的半径为 R ，

在 $Rt\triangle OHD$ 中， $OD = R$ ， $HD = \frac{\sqrt{3}}{3}BC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ， $OH = \frac{1}{3}OA = \frac{R}{3}$ ，

由勾股定理： $R^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{R}{3}\right)^2$ ，解得 $R = \sqrt{6}$ ，此外接球的体积为 $\frac{24\sqrt{6}}{3}\pi$ ，

由于平面 $EFG \parallel$ 平面 BCD ，所以 $AH \perp$ 平面 EFG ，

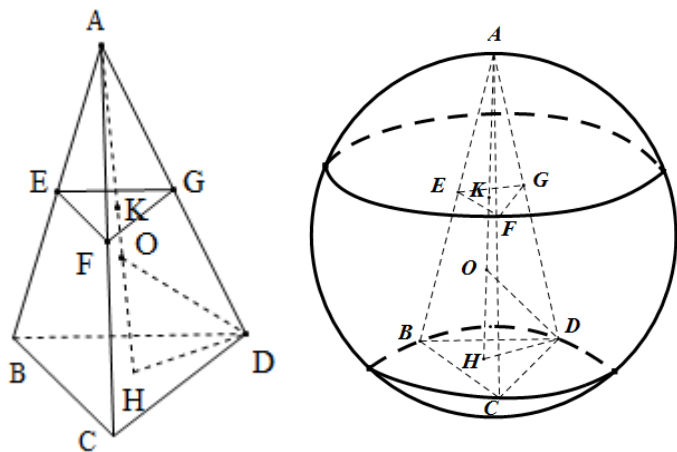
球心 O 到平面 EFG 的距离为 KO ，

则 $KO = OA - KA = OA - \frac{1}{2}AH = R - \frac{2}{3}R = \frac{R}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

所以三棱锥 $O-EFG$ 体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ，

所以此外接球的体积与三棱锥 $O-EFG$ 体积比值为 $24\sqrt{3}\pi$ 。

故选：D.



【点睛】

本题考查了三棱锥的外接球问题，三棱锥体积，球体积，意在考查学生的计算能力和空间想象能力.

4、C

【解析】

计算 $\frac{3+i}{1-i} = 1+2i$ ，由共轭复数的概念解得 x, y 即可.

【详解】

Q $\frac{3+i}{1-i} = 1+2i$ ，又由共轭复数概念得： $x=1, y=-2$ ，

$\therefore x+y=-1$.

故选：C

【点睛】

本题主要考查了复数的运算，共轭复数的概念.

5、B

【解析】

根据二项式系数的性质，可求得 n ，再通过赋值求得 a_0 以及结果即可.

【详解】

因为 $(1+\lambda x)^n$ 展开式中第三项的二项式系数与第四项的二项式系数相等，

故可得 $n=5$ ，

令 $x=0$ ，故可得 $1=a_0$ ，

又因为 $a_1+a_2+\dots+a_5=242$ ，

令 $x=1$ ，则 $(1+\lambda)^5 = a_0+a_1+a_2+\dots+a_5=243$ ，

解得 $\lambda=2$

令 $x=-1$ ，则 $(1-2)^5 = a_0-a_1+a_2-\dots+(-1)^5 a_5=-1$.

故选：B.

【点睛】

本题考查二项式系数的性质，以及通过赋值法求系数之和，属综合基础题.

6、A

【解析】

先根据 $\overline{BD} = \overline{DC}$, $\overline{AP} = 2\overline{PD}$ 得到 P 为 $\triangle ABC$ 的重心，从而 $\overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$ ，故可得 $\overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$ ，利用 $\overline{BP} = \overline{AP} - \overline{AB}$ 可得 $\overline{BP} = -\frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$ ，故可计算 $\lambda + \mu$ 的值.

【详解】

因为 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PD}$, 所以 P 为 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \therefore \frac{3}{2}\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \text{ 因为 } \overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC},$$

$$\text{所以 } \lambda = -\frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}, \therefore \lambda + \mu = -\frac{1}{3}, \text{ 故选 A.}$$

【点睛】

对于 $\triangle ABC$ ，一般地，如果 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，那么 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ，反之，如果 G 为平面上一点，且满足

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \text{ 那么 } G \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的重心.}$$

7、B

【解析】

根据题意可得 $\tan \alpha = -2$ ，所求式子利用二倍角的正弦函数公式化简，再利用同角三角函数间的基本关系弦化切后，将 $\tan \alpha = -2$ 代入计算即可求出值。

【详解】

由于直线 $y = -2x$ 的倾斜角为 α ，所以 $\tan \alpha = -2$ ，

$$\text{则 } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{-2 \times 2}{(-2)^2 + 1} = -\frac{4}{5}$$

故答案选 B

【点睛】

本题考查二倍角的正弦函数公式，同角三角函数间的基本关系，以及直线倾斜角与斜率之间的关系，熟练掌握公式是解本题的关键。

8、A

【解析】

根据题意分别求出事件 A：检测 5 个人确定为“感染高危户”发生的概率和事件 B：检测 6 个人确定为“感染高危户”发生的概率，即可得出 $f(p)$ 的表达式，再根据基本不等式即可求出。

【详解】

设事件 A：检测 5 个人确定为“感染高危户”，

事件 B：检测 6 个人确定为“感染高危户”，

$$\therefore P(A) = p(1-p)^4, P(B) = p(1-p)^5.$$

$$\text{即 } f(p) = p(1-p)^4 + p(1-p)^5 = p(2-p)(1-p)^4$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/418011052027006062>