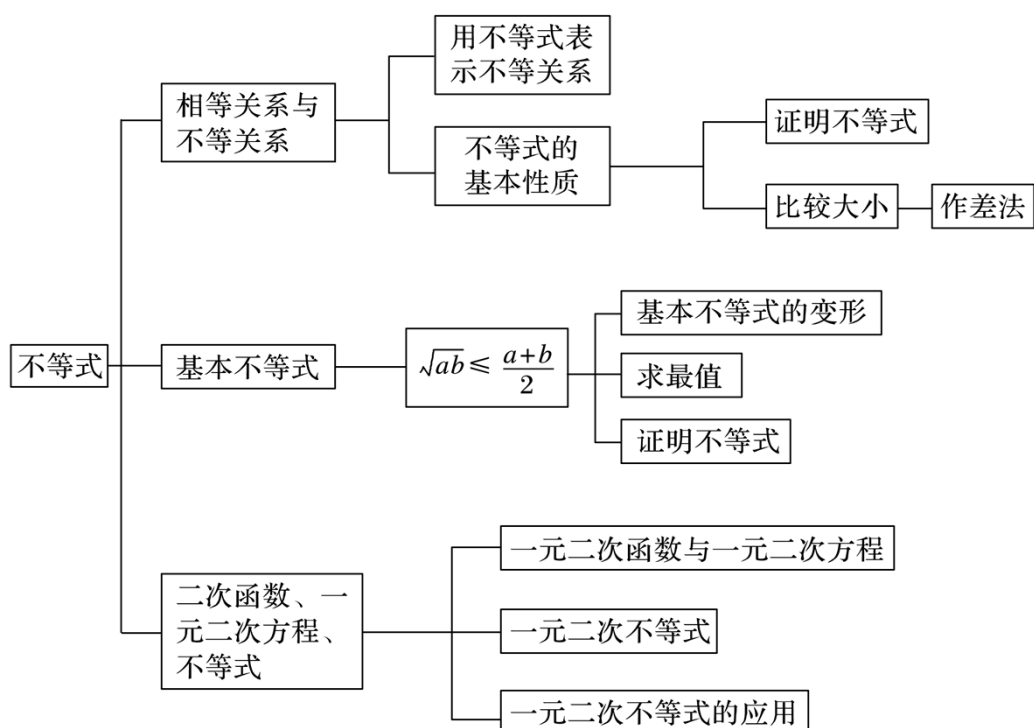


第二章 一元二次函数、方程和不等式 章末题型归纳总结

目录

模块一：本章知识思维导图.....	2
模块二：典型例题.....	3
题型一：不等式的性质及应用.....	3
题型二：利用不等式求值或范围.....	5
题型三：利用基本不等式求最值.....	8
题型四：证明不等式.....	14
题型五：含参数与不含参数一元二次不等式的解法.....	19
题型六：由一元二次不等式的解确定参数.....	22
题型七：不等式在实际问题中的应用.....	25
题型八：恒成立与有解问题.....	29
模块三：数学思想方法.....	32
①分类讨论思想.....	32
②转化与化归思想.....	34
③数形结合思想.....	36

模块一：本章知识思维导图



模块二：典型例题

题型一：不等式的性质及应用

【典例 1-1】（2024·高一·山东临沂·阶段练习）若 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ，则下列命题正确的是（ ）

- A. 若 $a < b$ ，则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. 若 $a > b > 0$ ，则 $\frac{b+1}{a+1} < \frac{b}{a}$
- C. 若 $a > b$ ，则 $ac^2 > bc^2$ D. 若 $ac^2 > bc^2$ ，则 $a > b$

【答案】D

【解析】选项 A，若 $a < 0, b > 0$ ，则结论错误，故选项 A 错误；

选项 B，根据糖水不等式可知， $a > b > 0, \frac{b+1}{a+1} > \frac{b}{a}$ ，故选项 B 错误；

选项 C，当 $c = 0$ 时， $ac^2 = bc^2 = 0$ ，故选项 C 错误；

选项 D， $ac^2 > bc^2$ ，可知 $c^2 > 0$ ， $\therefore a > b$ ，故选项 D 正确。

故选：D

【典例 1-2】（2024·高一·全国·课后作业）不等式 $\begin{cases} x-2 < 2x+1, \\ 2x-1 \leq 0, \end{cases}$ 的整数解的个数为（ ）

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【答案】B

【解析】解不等式 $\begin{cases} x-2 < 2x+1, \\ 2x-1 \leq 0, \end{cases}$ ，得 $-3 < x \leq \frac{1}{2}$ ，故整数解有 $-2, -1, 0$ ，共 3 个整数解。

故选：B。

【变式 1-1】（2024·高二·江西赣州·期中）已知实数 $a > b > c$ ，下列结论正确的是（ ）

- A. $a+b < 2c$ B. $a+b > 2c$
- C. $a+c > 2b$ D. $a+c < 2b$

【答案】B

【解析】对于 A, B，由 $a > b > c$ 可得 $a-c > 0, b-c > 0$ ，

则由 $(a+b)-2c = (a-c) + (b-c) > 0$ 可得 $a+b > 2c$ ，即 A 错误，B 正确；

对于 C, D，不妨取 $a=4, b=2, c=0$ ，满足 $a > b > c$ ，但 $a+c = 2b$ ，故 C, D 均错误。

故选：B。

【变式 1-2】（2024·高一·广东湛江·期中）已知 $a < 0, -1 < b < 0$ ，则 a, ab, ab^2 的大小关系式（ ）

- A. $a > ab > ab^2$ B. $ab^2 > ab > a$ C. $ab > a > ab^2$ D. $ab > ab^2 > a$

【答案】D

【解析】 $\because a < 0, -1 < b < 0,$

$\therefore ab > 0, ab^2 < 0, 0 < b^2 < 1,$

$\therefore ab^2 > a,$

$\therefore ab > ab^2 > a,$

故选：D.

【变式 1-3】（2024·高一·上海·期中）对于任意实数 a, b, c ，下列命题中正确的是（ ）

- A. 若 $a > b, c \neq 0$ ，则 $ac > bc$ B. 若 $a > b$ ，则 $ac^2 > bc^2$
C. 若 $ac^2 > bc^2$ ，则 $a > b$ D. 若 $a > b$ ，则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

【答案】C

【解析】对于 A，若 $c < 0$ ，则 $ac < bc$ ，故 A 错误；

对于 B，若 $c = 0$ ，则 $ac^2 = bc^2$ ，故 B 错误；

对于 C，因为 $ac^2 > bc^2$ ，所以 $c \neq 0$ ，所以 $a > b$ ，故 C 正确；

对于 D，若 $a > b > 0$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ，故 D 错误.

故选：C.

【变式 1-4】（2024·高一·上海·随堂练习）对于实数 a, b, c ，下列错误的命题是（ ）.

- A. 若 $a > b$ ，则 $a > \frac{a+b}{2} > b$ B. 若 $a > b > 0$ ，则 $a > \sqrt{ab} > b$
C. 若 $a > b > 0, c > 0$ ，则 $\frac{b}{a} > \frac{b+c}{a+c}$ D. $a^2 + b^2 \geq 2ab$

【答案】C

【解析】对于 A，因为 $a > b$ ，则 $a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0, \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2} > 0,$

所以 $a > \frac{a+b}{2} > b$ ，故 A 正确；

对于 B，因为 $a > b > 0$ ，则 $a^2 - ab = a(a-b) > 0, ab - b^2 = (a-b)b > 0,$

所以 $a > \sqrt{ab} > b$ ，故 B 正确；

对于 C，取 $a = 2, b = 1, c = 1$ ，则 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \frac{b+c}{a+c} = \frac{2}{3}, \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ ，即 $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$ ，故 C 错误；

对于 D，因为 $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ ，所以 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ，故 D 正确.

故选：C.

题型二：利用不等式求值或范围

【典例 2-1】（2024·高一·黑龙江哈尔滨·阶段练习）已知 $2 < x < 3$ ， $2 < y < 3$ ，则下列代数式的范围错误的是（ ）

- A. $6 < 2x + y < 9$ B. $-1 < x - y < 1$ C. $2 < 2x - y < 3$ D. $4 < xy < 9$

【答案】C

【解析】对于 A， $2 < x < 3$ ，则 $4 < 2x < 6$ ，则有 $6 < 2x + y < 9$ ，A 正确；

对于 B， $2 < y < 3$ ，则 $-3 < -y < -2$ ，则有 $-1 < x - y < 1$ ，B 正确；

对于 C， $4 < 2x < 6$ ， $-3 < -y < -2$ ，则有 $1 < 2x - y < 4$ ，C 错误；

对于 D， $2 < x < 3$ ， $2 < y < 3$ ，则有 $4 < xy < 9$ ，D 正确；

故选：C

【典例 2-2】（多选题）（2024·高一·四川成都·阶段练习）若实数 a 、 b 满足： $\begin{cases} 1 \leq a + b \leq 5 \\ -1 \leq a - b \leq 3 \end{cases}$ ，则下列叙述正确的是（ ）

- A. a 的取值范围是 $0 \leq a \leq 4$ B. b 的取值范围是 $-1 \leq b \leq 3$
C. $3a - 2b$ 的范围是 $-2 \leq 3a - 2b \leq 10$ D. $3a - 2b$ 的范围是 $-6 \leq 3a - 2b \leq 14$

【答案】ABC

【解析】因为实数 a 、 b 满足： $\begin{cases} 1 \leq a + b \leq 5 \\ -1 \leq a - b \leq 3 \end{cases}$ ，由不等式的可加性可得 $0 \leq 2a \leq 8$ ，解得 $0 \leq a \leq 4$ ，A 对；

由题意可得 $\begin{cases} 1 \leq a + b \leq 5 \\ -3 \leq b - a \leq 1 \end{cases}$ ，由不等式的可加性可得 $-2 \leq 2b \leq 6$ ，解得 $-1 \leq b \leq 3$ ，B 对；

设 $3a - 2b = x(a + b) + y(a - b) = (x + y)a + (x - y)b$ ，则 $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$ ，

所以， $3a - 2b = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{5}{2}(a - b)$ ，

因为 $\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}(a + b) \leq \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \leq \frac{5}{2}(a - b) \leq \frac{15}{2} \end{cases}$ ，由不等式的可加性可得 $-2 \leq 3a - 2b \leq 10$ ，C 对 D 错。

故选：ABC.

【变式 2-1】（多选题）（2024·高一·山东·阶段练习）已知 $-5 \leq a-b \leq 4$ ， $2 \leq 2a+b \leq 8$ ，则（ ）

A. $-1 \leq a \leq 4$

B. $0 \leq b \leq 4$

C. ab 的最大值为 24

D. $-28 \leq 2a-5b \leq 14$

【答案】AD

【解析】对于 A，因为 $-5 \leq a-b \leq 4$ ， $2 \leq 2a+b \leq 8$ ，

所以 $-5+2 \leq (a-b)+(2a+b) \leq 4+8$ ，

即 $-3 \leq 3a \leq 12$ ，即 $-1 \leq a \leq 4$ ，故 A 正确；

对于 B，由 $-5 \leq a-b \leq 4$ ，可得 $-8 \leq 2b-2a \leq 10$ ，

又 $2 \leq 2a+b \leq 8$ ，则 $-8+2 \leq (2b-2a)+(2a+b) \leq 10+8$ ，

即 $-6 \leq 3b \leq 18$ ，即 $-2 \leq b \leq 6$ ，故 B 错误；

设 $2a-5b = x(a-b) + y(2a+b) = (x+2y)a + (-x+y)b$ ，

则 $\begin{cases} 2 = x+2y \\ -5 = -x+y \end{cases}$ ，解得 $x=4$ ， $y=-1$ ，

因为 $-20 \leq 4(a-b) \leq 16$ ， $-8 \leq -(2a+b) \leq -2$ ，所以 $-28 \leq 2a-5b \leq 14$ ，D 正确；

若 ab 的最大值为 24，又 $-1 \leq a \leq 4$ ， $-2 \leq b \leq 6$ ，

则 $a=4$ ， $b=6$ ，此时 $2a+b=14 > 8$ ，C 错误。

故选：AD.

【变式 2-2】（多选题）（2024·高一·江苏徐州·阶段练习）不等式组： $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x-2y \leq 4 \end{cases}$ 的解集记为 D ，有下面

四个命题：

$p_1: \forall (x,y) \in D, x+2y \geq -1$ $p_2: \exists (x,y) \in D, x+2y \geq 2$

$p_3: \forall (x,y) \in D, x+2y \leq 3$ $p_4: \exists (x,y) \in D, x+2y \leq 0$

其中真命题是（ ）

A. p_1

B. p_2

C. p_3

D. p_4

【答案】ABD

【解析】对于 A，设 $x+2y = m(x+y) + n(x-2y)$ ，则 $\begin{cases} m+n=1 \\ m-2n=2 \end{cases}$ ，

$$\text{故} \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ n = -\frac{1}{3} \end{cases}, \text{故 } x+2y = \frac{4}{3}(x+y) - \frac{1}{3}(x-2y) \geq \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0,$$

故 p_1 成立, p_2 成立, p_3 不成立, p_4 成立

故选: ABD.

【变式 2-3】(多选题) (2024·高一·贵州贵阳·阶段练习) 已知 $6 < a < 60, 15 < b < 18$, 则下列正确的是 ()

A. $21 < a+b < 78$

B. $-9 < a-b < 42$

C. $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 4$

D. $\frac{7}{5} < \frac{a+b}{b} < \frac{39}{9}$

【答案】AC

【解析】A 选项, $6 < a < 60, 15 < b < 18$, 故 $6+15 < a+b < 60+18$,

即 $21 < a+b < 78$, A 正确;

B 选项, $-18 < -b < -15$, 故 $6-18 < a-b < 60-15$, $-12 < a-b < 45$, B 错误;

C 选项, $\frac{1}{18} < \frac{1}{b} < \frac{1}{15}$, 故 $\frac{1}{18} \times 6 < \frac{a}{b} < \frac{1}{15} \times 60$, 即 $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 4$, C 正确;

D 选项, 因为 $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 4$, 且 $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1$, 故 $\frac{4}{3} < \frac{a+b}{b} < 5$, D 错误.

故选: AC

【变式 2-4】(多选题) (2024·高二·浙江嘉兴·期中) 已知实数 x, y 满足 $1 < x < 6, 2 < y < 3$, 则 ()

A. $3 < x+y < 9$

B. $-1 < x-y < 3$

C. $2 < xy < 18$

D. $\frac{1}{3} < \frac{x}{y} < 3$

【答案】ACD

【解析】实数 x, y 满足 $1 < x < 6, 2 < y < 3$,

由不等式的同向可加性和同向同正可乘性, 有 $3 < x+y < 9, 2 < xy < 18$, AC 选项正确;

由 $-3 < -y < -2$, 得 $-2 < x-y < 4$, B 选项错误;

由 $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2}$, 得 $\frac{1}{3} < \frac{x}{y} < 3$, D 选项正确.

故选: ACD

【变式 2-5】(多选题) (2024·高一·青海海东·阶段练习) 已知 $1 \leq a-b \leq 2, 2 \leq a+b \leq 4$, 则 a 的取值可以为 ()

A. 1

B. $\frac{5}{2}$

C. 3

D. 4

【答案】BC

【解析】因为 $1 \leq a-b \leq 2, 2 \leq a+b \leq 4$ ，两式相加可得 $3 \leq 2a \leq 6$ ，所以 $\frac{3}{2} \leq a \leq 3$ ，

故选：BC.

【变式 2-6】（多选题）（2024·高一·安徽滁州·阶段练习）已知 $6 < a < 60$ ， $15 < b < 18$ ，则下列正确的有（ ）

A. $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 4$

B. $21 < a+2b < 78$

C. $-12 < a-b < 45$

D. $\frac{7}{6} < \frac{a+b}{b} < 5$

【答案】AC

【解析】由 $15 < b < 18$ ，可得 $\frac{1}{18} < \frac{1}{b} < \frac{1}{15}$ ，又 $6 < a < 60$ ，所以 $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 4$ ，故 A 正确；

由 $15 < b < 18$ ，可得 $30 < 2b < 36$ ，又 $6 < a < 60$ ，所以 $36 < a+2b < 96$ ，故 B 错误；

由 $15 < b < 18$ ，可得 $-18 < -b < -15$ ，又 $6 < a < 60$ ，所以 $-12 < a-b < 45$ ，故 C 正确；

因为 $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1$ ，又 $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 4$ ，所以 $\frac{4}{3} < \frac{a+b}{b} < 5$ ，故 D 错误.

故选：AC.

题型三：利用基本不等式求最值

【典例 3-1】（多选题）（2024·高三·江苏南通·阶段练习）已知 x, y 为正实数， $x+y=2$ ，则（ ）

A. xy 的最大值为 1

B. $\frac{y}{x} + \frac{2}{y}$ 的最小值 3

C. $\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+2}$ 的最小值为 $\frac{5}{6}$

D. $(x^2 + \frac{1}{5})(y^2 + \frac{1}{5})$ 的最小值为 $\frac{21}{25}$

【答案】AB

【解析】对选项 A， $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$ ，当且仅当 $x=y=1$ 时取“=”，故 A 正确；

对选项 B， $\frac{y}{x} + \frac{2}{y} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1 > 2 + 1 = 3$ ，当且仅当 $x=y=1$ 时取“=”，故 B 正确；

对选项 C， $\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+2} = x+1-2 + \frac{1}{x+1} + y+2-4 + \frac{4}{y+2} = \frac{1}{x+1} + \frac{4}{y+2} - 1$ ，

令 $s = x + 1$, $t = y + 2$ 则 $s + t = 5$,

所以 $\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{t} \right) (s + t) = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{45}{t} + 4 \right) \geq \frac{9}{5}$,

当且仅当 $t = 2s$, 即 $s = \frac{5}{3}$, $t = \frac{10}{3}$ 时取“=”,

所以 $\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+2}$ 的最小值为 $\frac{4}{5}$, 故选项 C 错误.

对选项 D, $\left(x^2 + \frac{1}{5} \right) \left(y^2 + \frac{1}{5} \right) = (xy)^2 + \frac{1}{5}(x+y)^2 - \frac{2}{5}xy + \frac{1}{25} = \left(xy - \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5}$,

当且仅当 $xy = \frac{1}{5}$ 时取“=”, 故 D 错误;

故选: AB.

【典例 3-2】(多选题) (2024·高三·重庆·阶段练习) 已知 $x > y > 0$, 且 $x + y = 1$, 则 ()

A. $|x-1| + |y-1| = 1$

B. $\frac{y}{x} > \frac{y+1}{x+1}$

C. $4^x + 4^y > 4$

D. $x^2 + 4y^2 \geq \frac{4}{5}$

【答案】ACD

【解析】显然 $0 < y < \frac{1}{2} < x < 1$, 故 $|x-1| + |y-1| = 1 - x + 1 - y = 1$, A 正确;

因为 $0 < \frac{y}{x} < 1$, 则 $\frac{y+1}{x+1} - \frac{y}{x} = \frac{x(y+1) - y(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x-y}{x(x+1)} > 0$,

即 $\frac{y+1}{x+1} > \frac{y}{x}$, 故 B 错误;

Q $4^x > 0$, $4^y > 0$ 且 $4^x \neq 4^y$, 故由均值不等式知 $4^x + 4^y > 2\sqrt{4^{x+y}} = 4$, C 正确;

$x^2 + 4y^2 = (1-y)^2 + 4y^2 = 5\left(y - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5}$, D 正确.

故选: ACD

【变式 3-1】(多选题) (2024·高三·四川成都·阶段练习) 已知正数 x, y 满足 $x + y = 2$, 则下列选项正确的是 ()

A. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是 2

B. xy 的最大值是 1

C. $x^2 + y^2$ 的最小值是 1

D. $x(y+1)$ 的最大值是 $\frac{9}{2}$

【答案】AB

【解析】对于 A：因为正数 x, y 满足 $x+y=2$ ，

$$\text{所以 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \geq \frac{1}{2} \left(2 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} \right) = 2,$$

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$ ，即 $x=y=1$ 时取等号，故 A 正确；

$$\text{对于 B: } x+y=2 \geq 2\sqrt{xy},$$

所以 $xy \leq 1$ ，当且仅当 $x=y=1$ 时等号成立，故 B 正确；

对于 C：因为 $x+y=2$ ，即 $y=2-x$ ，且 $0 < x < 2$ ，

$$x^2 + y^2 = x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x-1)^2 + 2,$$

由抛物线的性质可得，当 $x=1$ 时，最小值为 2，故 C 错误；

$$\text{对于 D: 由 C 可得 } x(y+1) = -x^2 + 3x = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4},$$

当 $x = \frac{3}{2}$ 时，最大值为 $\frac{9}{4}$ ，故 D 错误；

故选：AB.

【变式 3-2】（多选题）（2024·高二·安徽·开学考试）已知正数 a, b 满足 $4a+b+ab=12$ ，则下列结论正确的是（ ）

A. ab 的最大值为 4

B. $4a+b$ 的最小值为 8

C. $a+b$ 的最小值为 3

D. $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b}$ 的最小值 $\frac{3}{4}$

【答案】ABD

【解析】因为正数 a, b 满足 $4a+b+ab=12$ ，

所以 $12-ab=4a+b \geq 2\sqrt{4ab}=4\sqrt{ab}$ ，当且仅当 $4a=b$ ，即 $a=1, b=4$ 时等号成立，

解得 $0 < \sqrt{ab} \leq 2$ ，所以 $0 < ab \leq 4$ ，故 ab 的最大值为 4，故 A 正确；

$$12-(4a+b)=ab=\frac{1}{4} \times (4a) \times b \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{4a+b}{2}\right)^2,$$

即 $(4a+b)^2 + 16(4a+b) - 192 \geq 0$ ，又 $12-ab=4a+b < 12$ ，所以 $8 \leq 4a+b < 12$ ，

所以 $4a+b$ 的最小值为 8，当且仅当 $4a=b$ ，即 $a=1, b=4$ 时等号成立，故 B 正确；

由 $4a+b+ab=12$ 可得 $(a+1)(b+4)=16$ ，

所以 $a+b=(a+1)+(b+4)-5 \geq 2\sqrt{(a+1)(b+4)}-5=3$,

当且仅当 $a+1=b+4$ 时等号成立, 此时 $a=3$, $b=0$, 又 b 为正数, 矛盾, 故 C 错误;

$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b}=\frac{b+4}{16}+\frac{1}{b}=\frac{b}{16}+\frac{1}{b}+\frac{1}{4} \geq 2\sqrt{\frac{b}{16} \cdot \frac{1}{b}}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, 当且仅当 $\frac{b}{16}=\frac{1}{b}$, 即 $a=1$, $b=4$ 时等号成立, 故 D 正确.

故选: ABD

【变式 3-3】(多选题) (2024·高三·四川成都·开学考试) 已知 a, b 为正实数, $(a-1)(b-1)=1$, 则 ()

A. $2ab$ 的最小值为 4

B. $2a+b$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$

C. a^2+b^2 的最小值为 8

D. $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}$ 的最小值为 2

【答案】BCD

【解析】对 A: 因为 a, b 为正实数, 且 $(a-1)(b-1)=1$, 所以 $a+b=ab$, 因为 $ab=a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \geq 4$, 所以 $2ab \geq 8$, 故 A 错误.

对 B: 因为 a, b 为正实数, 且 $(a-1)(b-1)=1$, 所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ ($a>1, b>1$).

所以 $2a+b=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(2a+b)=3+\frac{b}{a}+\frac{2a}{b} \geq 3+2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} \geq 3+2\sqrt{2}$ (当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$, 即 $a=\frac{2+\sqrt{2}}{2}, b=\sqrt{2}+1$ 时取“=”), 故 B 正确;

对 C: 因为 $a^2+b^2 \geq 2ab \geq 8$ (都是当且仅当 $a=b=2$ 时取“=”), 故 C 正确;

对 D: 因为 $a>1, b>1$, 故 $a-1>0, b-1>0$, 所以 $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{b-1}}=2$ (当且仅当 $a=b=2$ 时取“=”), 故 D 正确.

故选: BCD

【变式 3-4】(多选题) (2024·高三·重庆·开学考试) 若正实数 x, y 满足 $2x+y=1$, 则下列说法正确的是 ()

A. xy 有最大值为 $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ 有最小值为 $6+4\sqrt{2}$

C. $4x^2+y^2$ 有最小值为 $\frac{1}{2}$

D. $x(y+1)$ 有最大值为 $\frac{1}{2}$

【答案】ABC

【解析】对于 A: 因为 $2x+y=1 \geq 2\sqrt{2x \cdot y}$, 则 $xy \leq \frac{1}{8}$, 当且仅当 $2x=y$, 即 $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{2}$ 时取等号, 故 A 正确,

对于 B, $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = \frac{2x+y}{x} + \frac{4(2x+y)}{y} = \frac{8x}{y} + \frac{y}{x} + 6 \geq 2\sqrt{\frac{8x}{y} \cdot \frac{y}{x}} + 6 = 6 + 4\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{8x}{y} = \frac{y}{x}$, 即

$x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}, y = 2-\sqrt{2}$ 时取等号, 故 B 正确,

对于 C: 因为 $\frac{2x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{4x^2+y^2}{2}}$, 则 $4x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $2x=y$, 即 $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{2}$ 时取等号, 故 C 正确,

对于 D: 因为 $x(y+1) = \frac{1}{2} \times 2x(y+1) \leq \frac{1}{2} \times \left[\frac{2x+(y+1)}{2} \right]^2 = \frac{1}{2}$,

当且仅当 $2x=y+1$, 即 $x=\frac{1}{2}, y=0$ 时取等号, 这与 x, y 均为正实数矛盾, 故 D 错误,

故选: ABC.

【变式 3-5】(广东省部分学校大联考 2023-2024 学年高三模拟(二)数学试题) 已知正数 a, b 满足

$a+2b=1$, 则 $\frac{5}{a+1} + \frac{1}{b}$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{7+2\sqrt{10}}{2}$

【解析】由题意得 $a+1+2b=2$, 则 $\frac{5}{a+1} + \frac{1}{b} = \frac{5}{a+1} + \frac{2}{2b} = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{a+1} + \frac{2}{2b} \right) (a+1+2b)$
 $= \frac{1}{2} \times \left[7 + \frac{5 \times 2b}{a+1} + \frac{2(a+1)}{2b} \right] \geq \frac{1}{2} \times (7+2\sqrt{10}),$

当且仅当 $\begin{cases} a = \frac{7-2\sqrt{10}}{3} \\ b = \frac{\sqrt{10}-2}{3} \end{cases}$ 时取等号, 故 $\frac{5}{a+1} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{7+2\sqrt{10}}{2}$.

故答案为: $\frac{7+2\sqrt{10}}{2}$.

【变式 3-6】(2024·高三·重庆·开学考试) 已知 a, b, c 均为正实数, 且 $a+b=1$, 则当 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 取得最小值时

$a = \frac{1}{3}$, $\frac{ac}{b} + \frac{c}{3ab} + \frac{8}{c+1}$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$ 6

【解析】依题意, $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b) = 5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} = 9$,

当且仅当 $a=\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}$ 时取等号, 所以当 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 取得最小值时 $a=\frac{1}{3}$;

$\frac{ac}{b} + \frac{c}{3ab} + \frac{8}{c+1} = c \left[\frac{a}{b} + \frac{(a+b)^2}{3ab} \right] + \frac{8}{c+1} = c \cdot \frac{4a^2+b^2+2ab}{3ab} + \frac{8}{c+1}$

$$\geq c \cdot \frac{4ab+2ab}{3ab} + \frac{8}{c+1} = 2c + \frac{8}{c+1} = 2(c+1) + \frac{8}{c+1} - 2 \geq 2\sqrt{2 \times 8} - 2 = 6,$$

当且仅当 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}, c = 1$ 时取等号，所以 $\frac{ac}{b} + \frac{c}{3ab} + \frac{8}{c+1}$ 的最小值为 6.

故答案为: $\frac{1}{3}; 6$

【变式 3-7】(2024·高一·浙江·开学考试) 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ ，若 $ab = 1$ ，则 $a^2 + b^2$ 的最小值是_____，

【答案】2

【解析】 $a^2 + b^2 \geq 2ab = 2$ ，当且仅当 $a = b$ 时，等号成立，

故 $a^2 + b^2$ 的最小值为 2.

故答案为: 2

【变式 3-8】(2024·高三·天津南开·阶段练习) 已知 x, y 均为正实数，且 $x + y = 16$ ，则 $\frac{xy}{9x+y}$ 的最大值为_____.

【答案】1

【解析】 $\frac{xy}{9x+y} = \frac{1}{\frac{9}{y} + \frac{1}{x}},$

由 $x + y = 16$ ，可得 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = \frac{1}{16}(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y}\right) = \frac{1}{16}\left(1 + 9 + \frac{y}{x} + \frac{9x}{y}\right)$

$$\geq \frac{1}{16}\left(10 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{9x}{y}}\right) = 1,$$

当且仅当 $y = 3x = 12$ ，等号成立，则 $\frac{xy}{9x+y}$ 的最大值为 1.

故答案为: 1.

【变式 3-9】(2024·高三·福建·阶段练习) 已知 $a > 0, b > 0$ ，且 $a\sqrt{b} + 2b\sqrt{a} = ab$ ，则 $\frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} =$ _____,
 $\sqrt{a} + 2\sqrt{b}$ 的最小值为_____.

【答案】 1 8

【解析】由题意得 $\frac{a\sqrt{b}}{ab} + \frac{2b\sqrt{a}}{ab} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{2}{\sqrt{a}} = 1,$

$$\text{则 } (\sqrt{a} + 2\sqrt{b})\left(\frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) = 4 + \frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 4 + 2\sqrt{\frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}} = 8,$$

当且仅当 $\frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ，即 $a = 4b = 16$ 时，等号成立.

故答案为: 1, 8

【变式 3-10】 (2024·高一·江苏·阶段练习) (1) 若 $x < 0$, 求 $y = \frac{12}{x} + 3x$ 的最大值.

(2) 已知 $0 < x < \frac{1}{3}$, 求 $y = x(1-3x)$ 的最大值.

【解析】 (1) 因为 $x < 0$, 所以 $-x > 0$,

$$\text{所以 } -y = -\frac{12}{x} + (-3x) \geq 2\sqrt{-\frac{12}{x} \times (-3x)} = 2 \times 6 = 12,$$

当且仅当 $-\frac{12}{x} = -3x$ 即 $x = -2$ 时取等号,

所以 $y = \frac{12}{x} + 3x \leq -12$ 即 $y = \frac{12}{x} + 3x$ 最大值为 -12 .

(2) 因为 $0 < x < \frac{1}{3}$,

所以 $0 < 3x < 1$, 则 $1-3x > 0$,

$$\text{所以 } y = x(1-3x) = \frac{1}{3} \times 3x(1-3x) \leq \frac{1}{3} \left[\frac{3x + (1-3x)}{2} \right]^2 = \frac{1}{12},$$

当且仅当 $3x = 1-3x$ 时, 即 $x = \frac{1}{6}$ 时取等号,

所以 $y = x(1-3x)$ 的最大值是 $\frac{1}{12}$.

题型四：证明不等式

【典例 4-1】 (2024·陕西榆林·模拟预测) 已知 $m > 0$, $n > 0$, 且满足 $m+n=2mn$.

(1) 证明: $\left(m^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{4}}\right)\left(m^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{3}{4}}\right) \geq 4$;

(2) 求 $\frac{1}{m^4} + \frac{1}{n^4}$ 的最小值.

【解析】 (1) 因为 $m+n=2mn$, 所以 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$,

又因为 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}}$, 所以 $mn \geq 1$, 当且仅当 $m=n=1$ 时, 等号成立.

$$\left(m^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{4}}\right)\left(m^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{3}{4}}\right) = m + n + m^{\frac{1}{4}} \cdot n^{\frac{3}{4}} + m^{\frac{3}{4}} \cdot n^{\frac{1}{4}}$$

$$= 2mn + m^{\frac{1}{4}} \cdot n^{\frac{3}{4}} + m^{\frac{3}{4}} \cdot n^{\frac{1}{4}} \geq 2mn + 2\sqrt{m^{\frac{1}{4}} \cdot n^{\frac{3}{4}} \cdot m^{\frac{3}{4}} \cdot n^{\frac{1}{4}}} = 2mn + 2\sqrt{mn}$$

$\geq 2 \times 1 + 2 \times \sqrt{1} = 4$, 当且仅当 $m=n=1$ 时, 等号成立.

(2) 因为 $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{2}{mn} = 4 - \frac{2}{mn}$,

所以 $\frac{1}{m^4} + \frac{1}{n^4} = \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right)^2 - \frac{2}{m^2n^2} = \left(4 - \frac{2}{mn}\right)^2 - \frac{2}{m^2n^2} = \frac{2}{m^2n^2} - \frac{16}{mn} + 16$,

令 $\frac{1}{mn} = t (0 < t \leq 1)$, 则 $\frac{2}{m^2n^2} - \frac{16}{mn} + 16 = 2t^2 - 16t + 16$,

因为 $y = 2t^2 - 16t + 16$ 的开口向上, 对称轴为 $t = 4$,

所以 $y = 2t^2 - 16t + 16$ 在 $0 < t \leq 1$ 上单调递减,

所以 $\frac{1}{m^4} + \frac{1}{n^4}$ 的最小值为 2.

【典例 4-2】 (2024·高三·陕西西安·阶段练习) 设 a, b 为正数, 且 $a + \frac{1}{b} = 1$. 证明:

(1) $a + \frac{1}{b^2} \geq \frac{3}{4}$;

(2) $\left(\frac{1}{a} - 2\right)^2 + (2b - 1)^2 \geq 5$.

【解析】 (1) 由已知有 $a + \frac{1}{b} = 1$, 从而 $a = 1 - \frac{1}{b}$,

故 $a + \frac{1}{b^2} = 1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$,

当且仅当 $a = \frac{1}{2}, b = 2$ 时等号成立.

(2) 方法一: 由已知条件 $a + \frac{1}{b} = 1$, 结合基本不等式即可得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} - 2\right)^2 + (2b - 1)^2 &= \left(\left(\frac{1}{a} - 2\right)^2 + 1\right) + ((2b - 1)^2 + 4) - 5 \\ &\geq 2\left(\frac{1}{a} - 2\right) + 4(2b - 1) - 5 = \frac{2}{a} + 8b - 13 \\ &= \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{2}{a} + 8b\right) - 13 = 8ab + \frac{2}{ab} - 3 \\ &\geq 2\sqrt{8ab \cdot \frac{2}{ab}} - 3 = 8 - 3 = 5. \end{aligned}$$

方法二: $\left(\frac{1}{a} - 2\right)^2 + (2b - 1)^2 \geq 5$ 等价于 $\frac{1}{a^2} + 4b^2 \geq \frac{4}{a} + 4b$,

根据题设有 $\frac{1}{a^2} + 4b^2 = \left(\frac{1}{a^2} + 4b^2\right)\left(a + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2b} + 4ab^2 + 4b$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot 4ab^2} + 2\sqrt{\frac{1}{a^2b} \cdot 4b} = 4b + \frac{4}{a},$$

当且仅当 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{3}{2}$ 时等号成立.

【变式 4-1】 (2024·高二·全国·竞赛) 已知: 三角形的边长分别等于 a, b, c . 求证:

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

【解析】 证明: 由三角形三边关系得 $a < b+c, b < a+c, c < a+b$,

$$\text{故 } \frac{a}{b+c} < 1, \frac{b}{c+a} < 1, \frac{c}{a+b} < 1,$$

$$\text{则 } \frac{a^2}{b+c} < a, \frac{b^2}{c+a} < b, \frac{c^2}{a+b} < c,$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)(a+b+c) = \frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c < 2(a+b+c),$$

$$\text{Q } a+b+c > 0,$$

$$\therefore \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

$$\text{设 } b+c=x, c+a=y, a+b=z,$$

$$\text{则 } a = \frac{1}{2}(y+z-x), b = \frac{1}{2}(z+x-y), c = \frac{1}{2}(x+y-z),$$

$$\therefore \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

$$= \frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 3 \right)$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{x}{z}} + 2\sqrt{\frac{y}{z} \cdot \frac{z}{y}} - 3 \right) = \frac{1}{2}(2+2+2-3) = \frac{3}{2},$$

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

【变式 4-2】 (2024·高一·安徽宿州·期中) 已知 a, b, c 均为正实数.

(1) 若 $a > b$, 试比较 $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ 与 $\frac{a-b}{a+b}$ 的大小;

(2) 求证: $\frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c} \geq 3$.

【解析】 (1) $\because a > 0, b > 0, \therefore a^2 + b^2 < a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$,

$$\therefore \frac{1}{a^2+b^2} > \frac{1}{(a+b)^2}, \therefore \frac{a+b}{a^2+b^2} > \frac{1}{a+b},$$

又 $\because a > b, \therefore a - b > 0,$

$$\therefore \frac{(a+b)(a-b)}{a^2+b^2} > \frac{a-b}{a+b}, \text{ 即 } \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} > \frac{a-b}{a+b};$$

$$(2) \text{ 证明: } \frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c} = \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) - 3,$$

$$\therefore a > 0, b > 0, c > 0, \therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2, \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2,$$

$$\therefore \frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c} - 3 \geq 3, \text{ 当且仅当“} a=b=c \text{”时等号成立.}$$

【变式 4-3】(2024·高一·北京·期中) 已知 a, b 都是正实数,

(1) 试比较 $a^3 + b^3$ 与 $ab^2 + a^2b$ 的大小, 并证明;

$$(2) \text{ 当 } a+b=1 \text{ 时, 求证: } \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9.$$

【解析】(1) 结论: $a^3 + b^3 \geq ab^2 + a^2b$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立.

$$\text{证明: } (a^3 + b^3) - (ab^2 + a^2b) = (a^3 - ab^2) + (b^3 - a^2b)$$

$$= a(a^2 - b^2) + b(b^2 - a^2) = (a+b)(a-b)^2,$$

因为 a, b 都是正数, 所以 $(a+b)(a-b)^2 \geq 0$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立,

即 $a^3 + b^3 \geq ab^2 + a^2b$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立;

(2) 因为 a, b, c 都是正数, 且 $a+b=1$,

$$\text{所以 } \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = \left(1+\frac{a+b}{a}\right)\left(1+\frac{a+b}{b}\right) = \left(2+\frac{b}{a}\right)\left(2+\frac{a}{b}\right)$$

$$= 5 + 2\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geq 5 + 4\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 9,$$

当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立.

【变式 4-4】(2024·高一·新疆阿克苏·阶段练习) (1) 对任意三个正实数 a, b, c , 求证:

$$a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}, \text{ 当且仅当 } a=b=c \text{ 时等号成立;}$$

$$(2) \text{ 若 } a > b > 0, c < d < 0, \text{ 证明: } \frac{a}{(b-d)^2} > \frac{b}{(a-c)^2}.$$

【解析】(1) 因为 $a > 0, b > 0, c > 0$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/418023020124007026>