等差数列与等比数列
(重点)

考点一

[解题必备]

1．通项公式

等差数列：$a_n=a_1+(n-1)d$；

等比数列：$a_n=a_1q^{n-1}(q\neq 0)$.

2．求和公式

等差数列：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$；

等比数列：当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$；当 $q\neq 1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$.

[题组通关]

1．(2023·四川省第三次联考)已知等比数列$\{a_n\}$的前 3 项和为 42，$a_1-a_4=21$，则$a_5=$(　　)

A．12　　B．6　　C．3　　D．$\frac{3}{2}$

D [设$\{a_n\}$的公比为 q，则 $a_1+a_2+a_3=a_1(1+q+q^2)=42$， ①

$a_1-a_4=a_1(1-q^3)=21$， ②

$\frac{②}{①}$ 得$\frac{1-q^3}{1+q+q^2}=\frac{(1-q)(1+q+q^2)}{1+q+q^2}=1-q=\frac{1}{2}$，

所以 $q=\frac{1}{2}$，将 $q=\frac{1}{2}$ 代入②，得 $a_1=\frac{21}{1-\frac{1}{8}}=24$，于是 $a_5=a_1q^4=24\times\frac{1}{16}$

$=\frac{3}{2}$.]

2．已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，且 a_2，a_3，a_5 成等比数列，则$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=($　　$)$

A．$n(n-2)$　　B．$n(n-1)$

C．$n(n+1)$　　D．$n(n+2)$

B　[因为数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，且 a_2，a_3，a_5 成等比数列，所以 $a_3^2=a_2a_5$，即$(a_1+4)^2=(a_1+2)\cdot(a_1+8)$，解得 $a_1=0$，所以 $a_n=2n-2$.则数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=\dfrac{(2n-2)n}{2}=n(n-1)$.故选 B.]

3．(多选)已知正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_5-2a_3=a_4$，设其公比为q，前n项和为S_n，则(　　)

A．$q=2$　　　　B．$a_n=2^n$

C．$S_{10}=2\ 047$　　　　D．$a_n+a_{n+1}<a_{n+2}$

ABD　[因为$a_5-2a_3=a_4$，所以$a_1q^4-2a_1q^2=a_1q^3$，即$q^2-q-2=0$，解得$q=2$或$q=-1$，又$q>0$，所以$q=2$，所以A正确；

数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}=2^n$，所以B正确；

$S_{10}=\dfrac{2(1-2^{10})}{1-2}=2^{11}-2=2\ 046$，所以C不正确；

由$a_n=2^n$，得$a_n+a_{n+1}=2^n+2^{n+1}=3\cdot2^n$，$a_{n+2}=2^{n+2}=4\cdot2^n$，

所以$a_n+a_{n+1}<a_{n+2}$，所以D正确．故选ABD.]

4．(2023·甘肃省第一次高考诊断)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_6=2$，$S_5=5$，等比数列$\{b_n\}$中，$b_2=4$，$b_5=32$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)设 $c_n=a_n+b_n$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

[解]　(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

则$\begin{cases}a_6=a_1+5d=2\\S_5=5a_1+10d=5\end{cases}$，解得 $a_1=d=\dfrac{1}{3}$，

所以 $a_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{n}{3}$.

设等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，则 $q^3=\dfrac{b_5}{b_2}=8$，$q=2$，则 $b_1=\dfrac{b_2}{q}=2$，所以 $b_n=2^n$.

(2)由(1)得，$c_n=a_n+b_n=\frac{n}{3}+2^n$，

所以 $T_n=\left(\frac{1}{3}+2\right)+\left(\frac{2}{3}+2^2\right)+\left(\frac{3}{3}+2^3\right)+\cdots+\left(\frac{n}{3}+2^n\right)=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}+\cdots+\frac{n}{3}\right)+(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)=\frac{1}{6}n(n+1)+2^{n+1}-2.$

练后悟道

等差(比)数列项与和的运算策略

(1)在等差(比)数列中，首项 a_1 和公差 d(公比 q)是两个最基本的元素.

(2)在进行等差(比)数列项与和的运算时，若条件和结论间的联系不明显，则均可化成关于 a_1 和 $d(q)$的方程组求解，但要注意消元法及整体计算，以减少计算量.

[注意]　等比数列前 n 项和公式中，若不确定 q 是否等于 1，应分 $q=1$ 和 $q\neq 1$ 两种情况讨论.

考点二

[解题必备]

1．等差数列与等比数列的性质

	等差数列	等比数列
性质	(1)若 m，n，p，$q\in\mathbf{N}^*$，且 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$； (2)$a_n=a_m+(n-m)d$； (3)S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，…仍成等差数列	(1)若 m，n，p，$q\in\mathbf{N}^*$，且 $m+n=p+q$，则 $a_ma_n=a_pa_q$； (2)$a_n=a_mq^{n-m}$； (3)S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，…仍成等比数列($q\neq-1$)

2.关于非零等差数列奇数项与偶数项的性质

(1)若项数为 $2n$，则 $S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$；

(2)若项数为 $2n-1$，则 $S_{偶}=(n-1)a_n$，$S_{奇}=na_n$，$S_{奇}-S_{偶}=a_n$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n}{n-1}$；

(3)两个等差数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n、T_n之间的关系为$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$．

[典题研磨]

[例 1] (1)(2023·**新课标Ⅱ卷**)记 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则 $S_8=$(　　)

A．120　　B．85　　C．-85　　D．-120

(2)(2023·**河南部分重点高中考试**)记等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_{11}=22$，则 $a_1+a_3+a_9+a_{11}=$(　　)

A．2　　B．4　　C．8　　D．16