宁波市第七中学 2024 届高考压轴卷数学试卷

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，点 C 在 AB 上，且$\angle AOC=30^{\circ}$，设$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\ (m,n\in R)$，则$\frac{m}{n}$的值为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．3　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

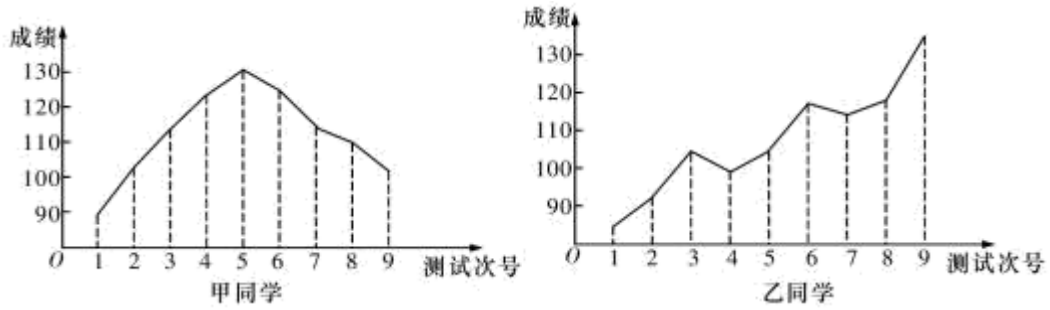
2．在ΔABC中，角 A、B、C 的对边分别为a、b、c，若$a=1$，$c=2\sqrt{3}$，$b\sin A=a\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right)$，则$\sin C=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{7}$　　B．$\frac{\sqrt{21}}{7}$　　C．$\frac{\sqrt{21}}{12}$　　D．$\frac{\sqrt{57}}{19}$

3．我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果，哥德巴赫猜想的内容是：每个大于 2 的偶数都可以表示为两个素数的和，例如：$4=2+2$，$6=3+3$，$8=3+5$，那么在不超过 18 的素数中随机选取两个不同的数，其和等于 16 的概率为（　　）

A．$\frac{1}{21}$　　B．$\frac{2}{21}$　　C．$\frac{1}{15}$　　D．$\frac{2}{15}$

4．对某两名高三学生在连续 9 次数学测试中的成绩（单位：分）进行统计得到折线图，下面是关于这两位同学的数学成绩分析．



①甲同学的成绩折线图具有较好的对称性，故平均成绩为 130 分；

②根据甲同学成绩折线图提供的数据进行统计，估计该同学平均成绩在区间$[110,120]$内；

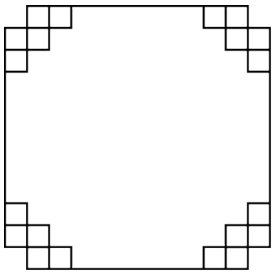
③乙同学的数学成绩与测试次号具有比较明显的线性相关性，且为正相关；

④乙同学连续九次测验成绩每一次均有明显进步.

其中正确的个数为（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

5．窗花是贴在窗纸或窗户玻璃上的剪纸，是中国古老的传统民间艺术之一，它历史悠久，风格独特，神兽人们喜爱．下图即是一副窗花，是把一个边长为12的大正方形在四个角处都剪去边长为1的小正方形后剩余的部分，然后在剩余部分中的四个角处再剪出边长全为1的一些小正方形．若在这个窗花内部随机取一个点，则该点不落在任何一个小正方形内的概率是（　　）



A．$\frac{3}{7}$　　B．$\frac{4}{7}$　　C．$\frac{5}{7}$　　D．$\frac{6}{7}$

6．若直线□不平行于平面□，且□ ⊄ □，则（　）

A．□内所有直线与□异面

B．□内只存在有限条直线与□共面

C．□内存在唯一的直线与□平行

D．□内存在无数条直线与□相交

7．设命题p：函数$f(x)=e^{x}+e^{-x}$在R上递增，命题q：在ΔABC中，$A>B \Leftrightarrow \cos A<\cos B$，下列为真命题的是（　　）

A．$p \wedge q$　　B．$p \vee (\neg q)$　　C．$(\neg p) \wedge q$　　D．$(\neg p) \wedge (\neg q)$

8．若$a>0,b>0$，则“$a+b \leq 4$”是“$ab \leq 4$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

9．在区间$[-1,1]$上随机取一个实数k，使直线$y=k(x+3)$与圆$x^{2}+y^{2}=1$相交的概率为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{4}$

10．已知定义在R上的函数$f(x)=x\cdot 2^{|x|}$，$a=f(\log_3\sqrt{5})$，$b=-f(\log_3\frac{1}{2})$，$c=f(\ln 3)$，则a，b，c的大小关系为（　　）

A．$c>b>a$　　B．$b>c>a$　　C．$a>b>c$　　D．$c>a>b$

11．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=-5$，$a_5+a_6+a_7=9$，若$b_n=\frac{3}{a_n}$（$n\in\mathbf{N}^*$），则数列$\{b_n\}$的最大值是（　　）

A．-3　　B．$-\frac{1}{3}$

C．1　　D．3

12．已知抛物线$C:y^2=4px(p>0)$的焦点为F，过焦点的直线与抛物线分别交于A、B两点，与y轴的正半轴交于点S，与准线l交于点T，且$|FA|=2|AS|$，则$\frac{|FB|}{|TS|}=$（　　）

A．$\frac{2}{5}$　　B．2　　C．$\frac{7}{2}$　　D．3

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．实数x，y满足$\begin{cases}y\geq 1\\ y\leq 2x-1\\ x+y\leq m\end{cases}$，如果目标函数$z=x-y$的最小值为$-2$，则$\frac{y}{x}$的最小值为_____.

14．在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，$\angle C=\frac{2\pi}{3}$，则$AC=$_____.

15．某部门全部员工参加一项社会公益活动，按年龄分为A，B，C三组，其人数之比为$5:3:2$，现用分层抽样的方法从总体中抽取一个容量为20的样本，若C组中甲、乙二人均被抽到的概率是$\frac{1}{11}$，则该部门员工总人数为_____.

16．已知点□是直线□ = □ + l上的动点，点□是抛物线□ = □^{2}上的动点.设点□为线段□□的中点，□为原点，则|□□|的最小值为_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12分）在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a,b,c，其中$a<c$，$\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}=\frac{-\cos(B+C)}{\sin C\cos C}$.

（1）求角C的值；

（2）若$c=45$，$a=27\sqrt{2}$，D为AC边上的任意一点，求$AD+2BD$的最小值.

18．（12分）已知$F_1(-1,0),F_2(1,0)$分别是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$的左焦点和右焦点，椭圆$C$的离心率为

$\frac{\sqrt{5}}{5}$，A、B 是椭圆 C 上两点，点 M 满足 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

(1)求 C 的方程；

(2)若点 M 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，点 O 为坐标原点，求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的取值范围.

19.（12 分）在 ΔABC 中，内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，已知 $A=\frac{\pi}{3}, b^2+c^2-\frac{\sqrt{3}}{3}abc=a^2$.

（1）求 a 的值；

（2）若 $b=1$，求 ΔABC 的面积.

20.（12 分）　已知函数 $f\left(x\right)=x+a\ln x$，$a\in R$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上的最小值；

（Ⅲ）若函数 $F\left(x\right)=\frac{1}{x^2}f\left(x\right)$，当 $a=2$ 时，$F\left(x\right)$ 的最大值为 M，求证：$M<\frac{3}{2}$.

21.（12 分）设函数 $f(x)=5-\left|x+a\right|-\left|x-2\right|$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集；

（2）若 $f(x)\leq 1$ 恒成立，求 a 的取值范围.

22.（10 分）本小题满分 14 分）

已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$，以极点为原点，极轴为 x 轴的非负半轴建立平面直角坐标系，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t+1\end{cases}$（$t$ 为参数），求直线 l 被曲线 C 截得的线段的长度

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

利用向量的数量积运算即可算出.

【详解】

解：Q $\angle AOC=30^{\circ}$

$\therefore \cos<\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}>=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|\left|\overrightarrow{OA}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \frac{\left(m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OA}}{\left|m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OA}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \frac{m\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+n\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}}{\sqrt{m^2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+2mn\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+n^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2}\left|\overrightarrow{OA}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Q $\left|\overrightarrow{OA}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\therefore \frac{m}{\sqrt{m^2+3n^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore m^2=9n^2$

又Q C 在 AB 上

$\therefore m>0$，$n>0$

$\therefore \frac{m}{n}=3$

故选：B

【点睛】

本题主要考查了向量的基本运算的应用，向量的基本定理的应用及向量共线定理等知识的综合应用.

2、B

【解析】

利用两角差的正弦公式和边角互化思想可求得 $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，可得出 $B=\frac{\pi}{6}$，然后利用余弦定理求出 b 的值，最后利用正弦定理可求出 $\sin C$ 的值.

【详解】

$\because b\sin A = a\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}a\cos B - \frac{1}{2}a\sin B$，

即 $\sin A\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos B - \frac{1}{2}\sin A\sin B$，即 $3\sin A\sin B = \sqrt{3}\sin A\cos A$，

$\because \sin A > 0$，$\therefore 3\sin B = \sqrt{3}\cos B$，得 $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}$，$\because 0 < B < \pi$，$\therefore B = \frac{\pi}{6}$.

由余弦定理得 $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B} = \sqrt{1 + 12 - 2\times 1\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{7}$，

由正弦定理 $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$，因此，$\sin C = \frac{c\sin B}{b} = \frac{2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查三角形中角的正弦值的计算，考查两角差的正弦公式、边角互化思想、余弦定理与正弦定理的应用，考查运算求解能力，属于中等题.

3、B

【解析】

先求出从不超过 18 的素数中随机选取两个不同的数的所有可能结果，然后再求出其和等于 16 的结果，根据等可能事件的概率公式可求.

【详解】

解：不超过 18 的素数有 2，3，5，7，11，13，17 共 7 个，从中随机选取两个不同的数共有 $C_7^2 = 21$，

其和等于 16 的结果 $(3,13)$，$(5,11)$ 共 2 种等可能的结果，

故概率 $P = \frac{2}{21}$.

故选：*B*.

【点睛】

古典概型要求能够列举出所有事件和发生事件的个数，本题不可以列举出所有事件但可以用分步计数得到，属于基础题.

4、C

【解析】

利用图形，判断折线图平均分以及线性相关性，成绩的比较，说明正误即可.

【详解】

①甲同学的成绩折线图具有较好的对称性，最高130分，平均成绩为低于130分，①错误；

②根据甲同学成绩折线图提供的数据进行统计，估计该同学平均成绩在区间$[110,120]$内，②正确；

③乙同学的数学成绩与测试次号具有比较明显的线性相关性，且为正相关，③正确；

④乙同学在这连续九次测验中第四次、第七次成绩较上一次成绩有退步，故④不正确.

故选：C.

【点睛】

本题考查折线图的应用，线性相关以及平均分的求解，考查转化思想以及计算能力，属于基础题.

5、D

【解析】

由几何概型可知,概率应为非小正方形面积与窗花面积的比,即可求解.

【详解】

由题,窗花的面积为$12^2-4\times1=140$,其中小正方形的面积为$5\times4=20$,

所以所求概率$P=\dfrac{140-20}{140}=\dfrac{6}{7}$,

故选:D

【点睛】

本题考查几何概型的面积公式的应用,属于基础题.

6、D

【解析】

通过条件判断直线□与平面□相交，于是可以判断 ABCD 的正误.

【详解】

根据直线□不平行于平面□，且□ ⊄ □可知直线□与平面□相交，于是 ABC 错误，故选 D.

【点睛】

本题主要考查直线与平面的位置关系，直线与直线的位置关系，难度不大.

7、C

【解析】

命题p：函数$f(x)=e^x+e^{-x}$在$(-\infty,0)$上单调递减，即可判断出真假．命题q：在ΔABC中，利用余弦函数单调性判断出真假.

【详解】

解：命题p：函数$f(x)=e^{x}+e^{-x}$，所以$f'(x)=e^{x}-e^{-x}$，当$x<0$时，$f'(x)<0$，即函数在$(-\infty,0)$上单调递减，因此是假命题.

命题q：在ΔABC中，$A,B\in(0,\pi),y=\cos x$在$(0,\pi)$上单调递减，所以$A>B\Leftrightarrow\cos A<\cos B$，是真命题.

则下列命题为真命题的是$(\neg p)\wedge q$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了函数的单调性、正弦定理、三角形边角大小关系、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

8、A

【解析】

本题根据基本不等式，结合选项，判断得出充分性成立，利用“特殊值法”，通过特取a,b的值，推出矛盾，确定必要性不成立.题目有一定难度，注重重要知识、基础知识、逻辑推理能力的考查.

【详解】

当$a>0,b>0$时，$a+b\geq2\sqrt{ab}$，则当$a+b\leq4$时，有$2\sqrt{ab}\leq a+b\leq4$，解得$ab\leq4$，充分性成立；当a=1, b=4时，满足$ab\leq4$，但此时$a+b$=5>4，必要性不成立，综上所述，“$a+b\leq4$”是“$ab\leq4$”的充分不必要条件.

【点睛】

易出现的错误有，一是基本不等式掌握不熟，导致判断失误；二是不能灵活的应用“赋值法”，通过特取a,b的值，从假设情况下推出合理结果或矛盾结果.

9、D

【解析】

利用直线$y=k\left(x+3\right)$与圆$x^{2}+y^{2}=1$相交求出实数k的取值范围，然后利用几何概型的概率公式可求得所求事件的概率.

【详解】

由于直线$y=k\left(x+3\right)$与圆$x^{2}+y^{2}=1$相交，则$\dfrac{\left|3k\right|}{\sqrt{k^{2}+1}}<1$，解得$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}<k<\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

因此，所求概率为$P=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查几何概型概率的计算，同时也考查了利用直线与圆相交求参数，考查计算能力，属于基础题.

10、D

【解析】

先判断函数在$x>0$时的单调性，可以判断出函数是奇函数，利用奇函数的性质可以得到$b=f(\log_3 2)$，比较$\log_3\sqrt{5},\log_3 2,\ln 3$三个数的大小，然后根据函数在$x>0$时的单调性，比较出三个数$a,b,c$的大小.

【详解】

当$x>0$时，$f(x)=x\cdot 2^{|x|}=x\cdot 2^x \Rightarrow f'(x)=2^x+x\cdot\ln 2\cdot 2^x>0$，函数$f(x)$在$x>0$时，是增函数.因为$f(-x)=-x\cdot 2^{|-x|}=-x\cdot 2^x=-f(x)$，所以函数$f(x)$是奇函数，所以有$b=-f(\log_3\frac{1}{2})=f(-\log_3\frac{1}{2})=f(\log_3 2)$，因为$\ln 3>1>\log_3\sqrt{5}>\log_3 2>0$，函数$f(x)$在$x>0$时，是增函数，所以$c>a>b$，故本题选D.

【点睛】

本题考查了利用函数的单调性判断函数值大小问题，判断出函数的奇偶性、单调性是解题的关键.

11、D

【解析】

在等差数列$\{a_n\}$中,利用已知可求得通项公式$a_n=2n-9$,进而$b_n=\frac{3}{a_n}=\frac{3}{2n-9}$,借助$f(x)=\frac{3}{2x-9}$函数的的单调性可知,当$n=5$时，$b_n$取最大即可求得结果.

【详解】

因为$a_5+a_6+a_7=9$，所以$3a_6=9$，即$a_6=3$，又$a_2=-5$，所以公差$d=2$，所以$a_n=2n-9$，即$b_n=\frac{3}{2n-9}$，因为函数$f(x)=\frac{3}{2x-9}$，在$x<4.5$时，单调递减，且$f(x)<0$；在$x>4.5$时，单调递减，且$f(x)>0$.所以数列$\{b_n\}$的最大值是b_5，且$b_5=\frac{3}{1}=3$，所以数列$\{b_n\}$的最大值是3.

故选:D.

【点睛】

本题考查等差数列的通项公式,考查数列与函数的关系,借助函数单调性研究数列最值问题,难度较易.

12、B

【解析】

过点A作准线的垂线，垂足为M，与y轴交于点N，由$|FA|=2|AS|$和抛物线的定义可求得$|TS|$，利用抛物线的性质$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{2p}$可构造方程求得$|BF|$，进而求得结果.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/418033031045006076