专题 7.7　平行线中的四大经典模型

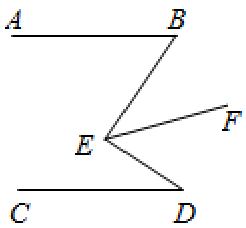
【北师大版】

【模型 1　“猪蹄”型（含锯齿型）】

结论 1：若 AB// CD，则∠P=∠AEP+∠CFP;

结论 2：若∠P=∠AEP+∠CFP，则 AB// CD.

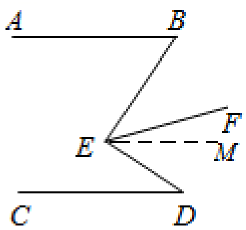
1．（2020 下·湖北武汉·八年级统考期末）如图，$AB\parallel CD$，EF平分$\angle BED$，$\angle DEF+\angle D=66^{\circ}$，$\angle B-\angle D=28^{\circ}$，则$\angle BED=$________.



【答案】80°

【分析】过 E 点作 $EM\parallel AB$，根据平行线的性质可得$\angle BED=\angle B+\angle D$，利用角平分线的定义可求得$\angle B+3\angle D=132^{\circ}$，结合$\angle B-\angle D=28^{\circ}$即可求解．

【详解】解：过 E 点作 $EM\parallel AB$，



$\therefore\angle B=\angle BEM$，

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore EM\parallel CD$，

$\therefore\angle MED=\angle D$，

$\therefore\angle BED=\angle B+\angle D$，

∵EF 平分$\angle BED$，

∴$\angle DEF=\frac{1}{2}\angle BED$，

∵$\angle DEF+\angle D=66°$，

∴$\frac{1}{2}\angle BED+\angle D=66°$，

∴$\angle BED+2\angle D=132°$，

即$\angle B+3\angle D=132°$，

∵$\angle B-\angle D=28°$，

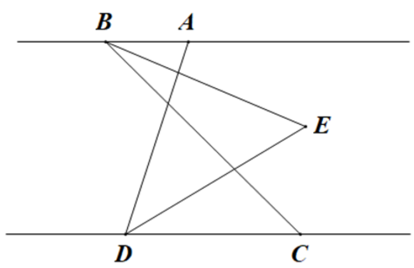
∴$\angle B=54°$，$\angle D=26°$，

∴$\angle BED=80°$.

故答案为：80°.

【点睛】本题主要考查平行线的性质，角平分线的定义，作出辅助线证出$\angle BED=\angle B+\angle D$是解题的关键.

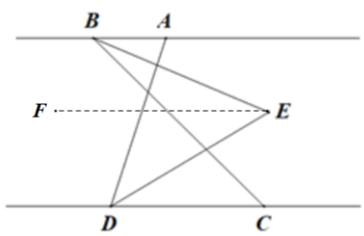
2．（2023上·辽宁鞍山·八年级统考期中）如图，已知$AB\parallel CD$，BE平分$\angle ABC$，DE平分$\angle ADC$，$\angle BAD=80°$，$\angle BCD=n°$，则$\angle BED$的度数为__________．（用含 n 的式子表示）



【答案】$40°+\frac{1}{2}n°$

【分析】首先过点 E 作$EF\parallel AB$，由平行线的传递性得$AB\parallel CD\parallel EF$，再根据两直线平行，内错角相等，得出$\angle BCD=\angle ABC=n°$，$\angle BAD=\angle ADC=80°$，由角平分线的定义得出$\angle ABE=\frac{1}{2}n°$，$\angle EDC=40°$，再由两直线平行，内错角相等得出$\angle BEF=\angle ABE=\frac{1}{2}n°$ $\angle FED=\angle EDC=40°$，由$\angle BED=\angle BEF+\angle FED$即可得出答案.

【详解】解：如图，过点 E 作$EF\parallel AB$，则$AB\parallel CD\parallel EF$，



$\because AB \parallel CD$，

$\therefore \angle BCD = \angle ABC = n°$，$\angle BAD = \angle ADC = 80°$，

又$\because BE$平分$\angle ABC$，DE平分$\angle ADC$，

$\therefore \angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}n°$，

$\angle EDC = \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{1}{2} \times 80° = 40°$，

$\because AB \parallel EF \parallel CD$，

$\therefore \angle BEF = \angle ABE = \frac{1}{2}n°$ ，

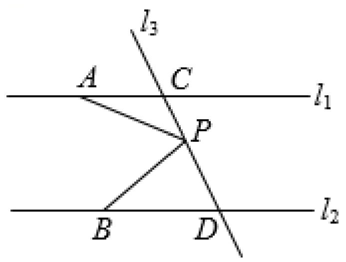
$\angle FED = \angle EDC = 40°$，

$\therefore \angle BED = \angle FED + \angle BEF = 40° + \frac{1}{2}n°$，

故答案为：$40° + \frac{1}{2}n°$.

【点睛】本题考查平行线的性质，角平分线的定义，解题关键是作出正确的辅助线，掌握平行线的性质和角平分线的定义.

3．（2023下·广东河源·八年级河源市第二中学校考期中）已知直线$l_1 \parallel l_2$， A是$l1$上的一点，B是$l2$上的一点，直线$l3$和直线$l1$，$l2$交于C和D，直线CD上有一点P.



(1)如果P点在C，D之间运动时，问$\angle PAC$，$\angle APB$，$\angle PBD$有怎样的数量关系？请说明理由.

(2)若点P在C，D两点的外侧运动时（P点与C，D不重合），试探索$\angle PAC$，$\angle APB$，$\angle PBD$之间的关系又是如何？（请直接写出答案，不需要证明）

【答案】(1)$\angle PAC + \angle PBD = \angle APB$

(2)当点P在直线l_1上方时，$\angle PBD - \angle PAC = \angle APB$；当点$P$在直线$l_2$下方时，$\angle PAC - \angle PBD = \angle APB$.

【分析】（1）过点P作$PE \parallel l_1$，由“平行于同一条直线的两直线平行”可得出$PE \parallel l_1 \parallel l_2$，再由“两直线平行，内错角相等”得出$\angle PAC = \angle APE$、$\angle PBD = \angle BPE$，再根据角与角的关系即可得出结论；

（2）按点P的两种情况分类讨论：①当点P在直线l_1上方时；②当点P在直线l_2下方时，同理（1）可得

$\angle PAC=\angle APE$、$\angle PBD=\angle BPE$，再根据角与角的关系即可得出结论．

【详解】（1）解：$\angle PAC+\angle PBD=\angle APB$．

过点P作$PE\parallel l_1$，如图 1 所示．

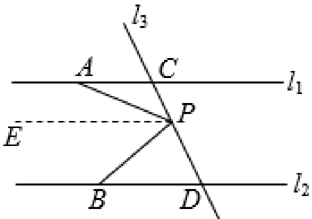


图1

$\because$ $PE\parallel l_1$，$l_1\parallel l_2$，

$\therefore$ $PE\parallel l_1\parallel l_2$，

$\therefore\angle PAC=\angle APE$，$\angle PBD=\angle BPE$，

$\because\angle APB=\angle APE+\angle BPE$，

$\therefore\angle PAC+\angle PBD=\angle APB$．

（2）解：结论：当点P在直线l_1上方时，$\angle PBD-\angle PAC=\angle APB$；当点P在直线$l_2$下方时，$\angle PAC-\angle PBD=\angle APB$．

①当点P在直线l_1上方时，如图 2 所示．过点P作$PE\parallel l_1$．

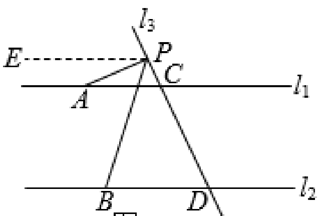


图2

$\because$ $PE\parallel l_1$，$l_1\parallel l_2$，

$\therefore$ $PE\parallel l_1\parallel l_2$，

$\therefore\angle PAC=\angle APE$，$\angle PBD=\angle BPE$，

$\because\angle APB=\angle BPE-\angle APE$，

$\therefore\angle PBD-\angle PAC=\angle APB$．

②当点P在直线l_2下方时，如图 3 所示．过点P作$PE\parallel l_1$．

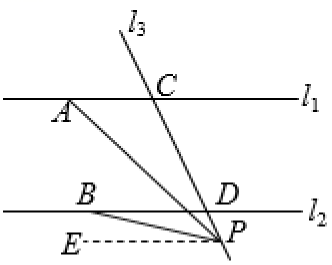


图3

∵ $PE \parallel l_1$，$l_1 \parallel l_2$，

∴ $PE \parallel l_1 \parallel l_2$，

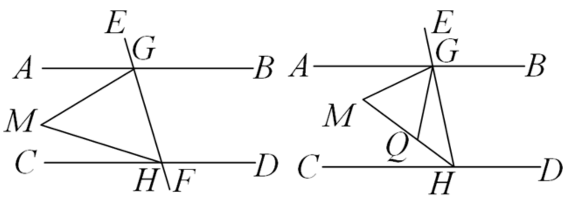
∴ $\angle PAC = \angle APE$，$\angle PBD = \angle BPE$，

∵ $\angle APB = \angle APE - \angle BPE$，

∴ $\angle PAC - \angle PBD = \angle APB$.

【点睛】本题考查了平行线的性质以及角的计算，解题的关键是根据“两直线平行，内错角相等”找到相等的角．本题属于基础题，难度不大，解决该题型题目时，根据平行线的性质得出相等（或互补）的角是关键．

4．（2023下·山东聊城·八年级统考阶段练习）已知直线$AB//CD$，EF是截线，点M在直线AB、CD之间．



(1)如图1，连接GM，HM．求证：$\angle M=\angle AGM+\angle CHM$；

(2)如图2，在$\angle GHC$的角平分线上取两点M、Q，使得$\angle AGM=\angle HGQ$．试判断$\angle M$与$\angle GQH$之间的数量关系，并说明理由．

【答案】(1)证明见详解

(2)$\angle GQH = 180° - \angle M$；理由见详解

【分析】（1）过点M作$MN \parallel AB$，由$AB \parallel CD$，可知$MN \parallel AB \parallel CD$．由此可知：$\angle AGM = \angle GMN$，$\angle CHM = \angle HMN$，故$\angle AGM + \angle CHM = \angle GMN + \angle HMN = \angle M$；

（2）由（1）可知$\angle AGM + \angle CHM = \angle M$．再由$\angle CHM = \angle GHM$，$\angle AGM = \angle HGQ$，可知 ：

$\angle M=\angle HGQ+\angle GHM$，利用三角形内角和是 180°，可得$\angle GQH=180°-\angle M$.

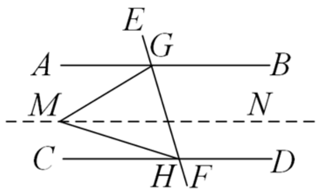


图 1

【详解】（1）

解：如图：过点M作$MN\parallel AB$，

$\therefore MN\parallel AB\parallel CD$，

$\therefore \angle AGM=\angle GMN$，$\angle CHM=\angle HMN$，

$\because \angle M=\angle GMN+\angle HMN$，

$\therefore \angle M=\angle AGM+\angle CHM$.

（2）解：$\angle GQH=180°-\angle M$，理由如下：

如图：过点M作$MN\parallel AB$，

由（1）知$\angle M=\angle AGM+\angle CHM$，

$\because HM$平分$\angle GHC$，

$\therefore \angle CHM=\angle GHM$，

$\because \angle AGM=\angle HGQ$，

$\therefore \angle M=\angle HGQ+\angle GHM$，

$\because \angle HGQ+\angle GHM+\angle GQH=180°$，

$\therefore \angle GQH=180°-\angle M$.

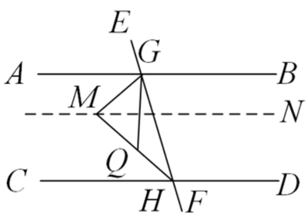


图 2

【点睛】本题考查了利用平行线的性质求角之间的数量关系，正确的作出辅助线是解决本题的关键，同时这也是比较常见的几何模型“猪蹄模型”的应用.

5．（2023 下·福建莆田·八年级莆田第二十五中学校考阶段练习）如图，$AB//CD$，点 E 在直线 AB，CD 内部，且$AE\perp CE$.

（1）如图 1，连接 AC，若 AE 平分$\angle BAC$，求证：CE平分$\angle ACD$；

（2）如图 2，点 M 在线段 AE 上，

①若$\angle MCE=\angle ECD$，当直角顶点 E 移动时，$\angle BAE$与$\angle MCD$是否存在确定的数量关系?并说明理由；

②若$\angle MCE=\frac{1}{n}\angle ECD$（$n$为正整数），当直角顶点 E 移动时，$\angle BAE$与$\angle MCD$是否存在确定的数量关系?并说明理由.

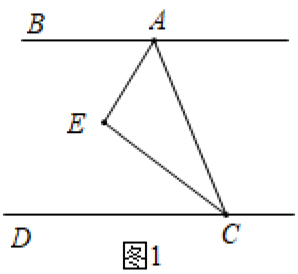


图1

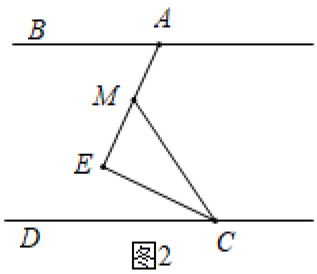


图2

【答案】（1）见解析；（2）①$\angle BAE+\frac{1}{2}\angle MCD=90°$，理由见解析；②$\angle BAE+\frac{n}{n+1}\angle MCD=90°$，理由见解析.

【分析】（1）根据平行的性质可得$\angle BAC+\angle DCA=180°$，再根据$AE\perp CE$可得$\angle EAC+\angle ECA=90°$，根据 AE 平分$\angle BAC$ 可得$\angle BAE=\angle EAC$,等量代换可得$\angle ECD+\angle EAC=90°$，继而求得$\angle DCE=\angle ECA$；

（2）①过 E 作 $EF\parallel AB$，先利用平行线的传递性得出 $EF\parallel AB\parallel CD$，再利用平行线的性质及已知条件可推得答案；

②过 E 作 $EF\parallel AB$，先利用平行线的传递性得出 $EF\parallel AB\parallel CD$，再利用平行线的性质及已知条件可推得答案.

【详解】（1）解：因为$AB//CD$，

所以$\angle BAC+\angle DCA=180°$，

因为$AE\perp CE$，

所以$\angle EAC+\angle ECA=90°$，

因为 AE 平分$\angle BAC$，

所以$\angle BAE=\angle EAC$，

所以$\angle BAE+\angle DCE=90°$，

所以$\angle EAC+\angle DCE=90°$，

所以$\angle DCE=\angle ECA$，

所以 CE 平分$\angle ACD$；

（2）①$\angle BAE$ 与$\angle MCD$ 存在确定的数量关系：$\angle BAE+\frac{1}{2}\angle MCD=90°$，

理由如下： 过 E 作 $EF\parallel AB$，

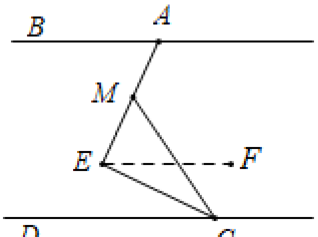


图2

∵$AB\parallel CD$，

∴$EF\parallel AB\parallel CD$，

∴$\angle BAE=\angle AEF$，$\angle FEC=\angle DCE$，

∵$\angle E=90°$，

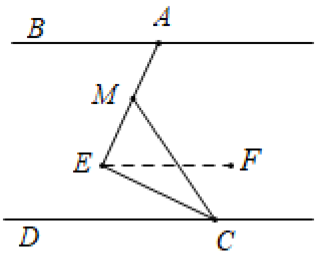
∴$\angle BAE+\angle ECD=90°$，

∵$\angle MCE=\angle ECD$，

∴$\angle BAE+\frac{1}{2}\angle MCD=90°$；

②$\angle BAE$ 与$\angle MCD$ 存在确定的数量关系：$\angle BAE+\frac{n}{n+1}\angle MCD=90°$，

理由如下： 过 E 作 $EF\parallel AB$，



∵$AB\parallel CD$，

∴$EF\parallel AB\parallel CD$，

∴$\angle BAE=\angle AEF$，$\angle FEC=\angle DCE$，

∵$\angle E=90°$，

∴$\angle BAE+\angle ECD=90°$，

∵$\angle MCE=\frac{1}{n}\angle ECD$，

∴$\angle BAE+\frac{n}{n+1}\angle MCD=90°$.

【点睛】本题主要考查平行线的性质和角平分线的定义，解决本题的关键是要添加辅助线利用平行性质.

6．（2023·全国·八年级专题练习）（1）如图 1，已知$AB//CD$，$\angle ABF=\angle DCE$，求证：$\angle BFE=\angle FEC$

（2）如图 2，已知$AB//CD$，$\angle EAF=\frac{1}{4}\angle EAB$，$\angle ECF=\frac{1}{4}\angle ECD$，求证：$\angle AFC=\frac{3}{4}\angle AEC$

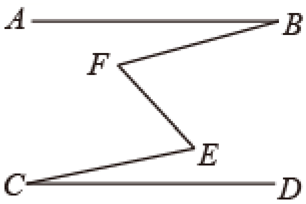


图1

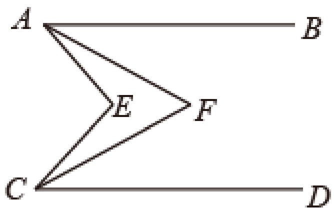


图2

【答案】（1）见解析；（2）见解析

【分析】（1）如图：延长 BF、DC 相较于 E，由 $AB//CD$ 可得$\angle ABF=\angle E$，再结合$\angle ABF=\angle DCE$可得$\angle DCE=\angle E$，即可得当 $BE//DE$，最后运用两直线平行、内错角相等即可证明结论；

（2）如图 2：连接 AC，设$\angle EAF=x$，$\angle ECF=y$，$\angle EAB=4x$，$\angle ECD=4y$，根据平行线性质得出$\angle BAC+\angle ACD=180°$，求出$\angle CAE+\angle ACE=180°$-（$4x+4y$），再求出$\angle AEC$ 和$\angle AFC$，最后比较即可得到结论．

【详解】（1）证明：如图：延长 BF、DC 相较于 G

$\because AB//CD$

$\therefore \angle ABF=\angle G$

$\because \angle ABF=\angle DCE$

$\therefore \angle DCE=\angle G$

$\therefore BG//CE$

$\therefore \angle BFE=\angle FEC$；

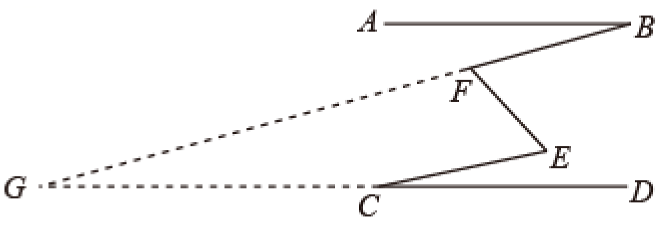


图1

（2）如图 2：连接 AC，设$\angle EAF=x$，$\angle ECF=y$，$\angle EAB=4x$，$\angle ECD=4y$，

$\because AB//CD$，

$\therefore \angle BAC+\angle ACD=180°$

$\therefore \angle CAE+4x+\angle ACE+4y=180°$

$\therefore \angle CAE+\angle ACE=180°$-（$4x+4y$），$\angle FAC+\angle FCA=180°$-（$3x+3y$），

∴∠AEC=180°-（∠CAE+∠ACE）

=180°-[80°-（4x+4y）]

=4x+4y

=4（x+y）

∠AFC=180°-（∠FAC+∠FCA）

=180°-[180°-（3x+3y））]

=3x+3y

=3（x+y），

∴$\angle AFC=\frac{3}{4}\angle AEC$.

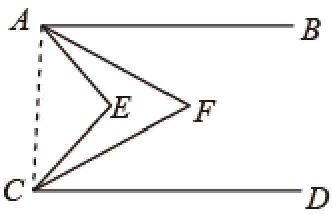


图2

【点睛】本题主要考查了平行线的判定与性质、三角形内角和定理的应用等知识点，灵活应用平行线的判定与性质以及三角形内角和定理正确的表示角成为解答本题的关键.

7．（2017下·湖北武汉·八年级统考期中）如图1，已知AB∥CD，∠B＝30°，∠D＝120°；

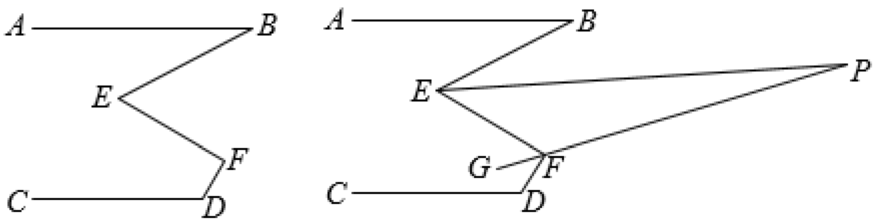


图1　　　　图2

(1)若∠E＝60°，则∠F＝_；

(2)请探索∠E与∠F之间满足的数量关系？说明理由；

(3)如图2，已知EP平分∠BEF，FG平分∠EFD，反向延长FG交EP于点P，求∠P的度数.

【答案】(1)90°

(2)$\angle F=\angle E+30°$，理由见解析

(3)15°

【分析】（1）如图1，分别过点E，F作$EM//AB$，$FN//AB$，根据平行线的性质得到$\angle B=\angle BEM=30°$，

$\angle MEF=\angle EFN$，$\angle D+\angle DFN=180°$，代入数据即可得到结论；

（2）如图 1，根据平行线的性质得到$\angle B=\angle BEM=30°$，$\angle MEF=\angle EFN$，由$AB//CD$，$AB//FN$，得到$CD//FN$，根据平行线的性质得到$\angle D+\angle DFN=180°$，于是得到结论；

（3）如图 2，过点F作$FH//EP$，设$\angle BEF=2x°$，则$\angle EFD=(2x+30)°$，根据角平分线的定义得到$\angle PEF=\frac{1}{2}\angle BEF=x°$，$\angle EFG=\frac{1}{2}\angle EFD=(x+15)°$，根据平行线的性质得到$\angle PEF=\angle EFH=x°$，$\angle P=\angle HFG$，于是得到结论.

【详解】（1）解：如图 1，分别过点E，F作$EM//AB$，$FN//AB$，

$\therefore EM//AB//FN$，

$\therefore \angle B=\angle BEM=30°$，$\angle MEF=\angle EFN$，

又$\because AB//CD$，$AB//FN$，

$\therefore CD//FN$，

$\therefore \angle D+\angle DFN=180°$，

又$\because \angle D=120°$，

$\therefore \angle DFN=60°$，

$\therefore \angle BEF=\angle MEF+30°$，$\angle EFD=\angle EFN+60°$，

$\therefore \angle EFD=\angle MEF+60°$

$\therefore \angle EFD=\angle BEF+30°=90°$；

故答案为：$90°$；

（2）解：如图 1，分别过点E，F作$EM//AB$，$FN//AB$，

$\therefore EM//AB//FN$，

$\therefore \angle B=\angle BEM=30°$，$\angle MEF=\angle EFN$，

又$\because AB//CD$，$AB//FN$，

$\therefore CD//FN$，

$\therefore \angle D+\angle DFN=180°$，

又$\because \angle D=120°$，

$\therefore \angle DFN=60°$，

$\therefore \angle BEF=\angle MEF+30°$，$\angle EFD=\angle EFN+60°$，

$\therefore \angle EFD=\angle MEF+60°$，

$\therefore \angle EFD=\angle BEF+30°$；

（3）解：如图 2，过点F作$FH//EP$，

由（2）知，$\angle EFD=\angle BEF+30°$，

设$\angle BEF=2x°$，则$\angle EFD=(2x+30)°$，

$\because EP$平分$\angle BEF$，GF平分$\angle EFD$，

$\therefore \angle PEF=\frac{1}{2}\angle BEF=x°$，$\angle EFG=\frac{1}{2}\angle EFD=(x+15)°$，

$\because FH//EP$，

$\therefore \angle PEF=\angle EFH=x°$，$\angle P=\angle HFG$，

$\because \angle HFG=\angle EFG-\angle EFH=15°$，

$\therefore \angle P=15°$．

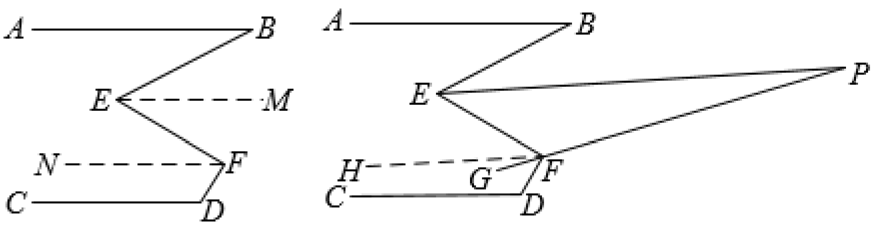


图1　　　　　图2

【点睛】本题考查了平行线的性质，角平分线的定义，熟练掌握平行线的性质定理是解题的关键．

8．（2020 下·浙江绍兴·八年级统考期末）问题情境 如图 1，已知$AB\parallel CD$，$\angle APC=108°$．求$\angle PAB+\angle PCD$的度数．

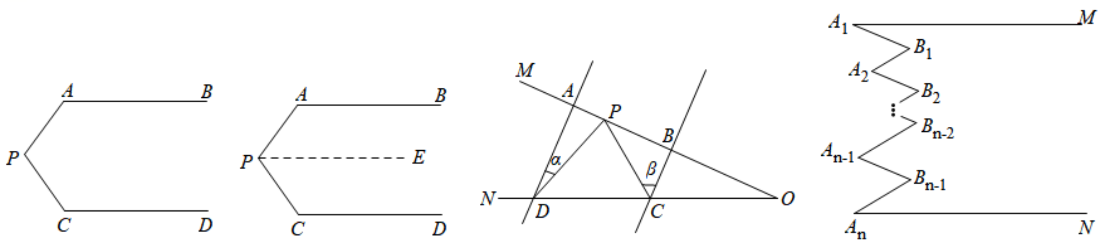


图1　　图2　　图3　　图4

经过思考，小敏的思路是：如图 2，过 P 作 $PE\parallel AB$，根据平行线有关性质，可得$\angle PAB+\angle PCD=360°-\angle APC=252°$．

问题迁移：如图 3，$AD\parallel BC$，点 P 在射线 OM 上运动， $\angle ADP=\angle\alpha$，$\angle BCP=\angle\beta$．

(1)当点 P 在 A、B 两点之间运动时， $\angle CPD$、$\angle\alpha$、$\angle\beta$之间有何数量关系？请说明理由．

(2)如果点 P 在 A、B 两点外侧运动时（点 P 与点 A、B、O 三点不重合），请你直接写出$\angle CPD$、$\angle\alpha$、$\angle\beta$之间的数量关系．

(3)问题拓展：如图 4，$MA_1\parallel NA_n$，$A_1-B_1-A_2-\cdots-B_{n-1}-A_n$是一条折线段，依据此图所含信息，把你所发

现的结论，用简洁的数学式子表达为_______.

【答案】(1)$\angle CPD=\angle\alpha+\angle\beta$，理由见解析

(2)$\angle CPD=\angle\beta-\angle\alpha$ 或$\angle CPD=\angle\alpha-\angle\beta$

(3)$\angle A_1+\angle A_2+\ldots+\angle An=\angle B_1+\angle B_2+\ldots+\angle B_{n-1}$

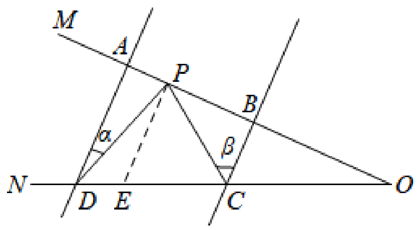
【分析】（1）过 P 作 $PE\parallel AD$，根据平行线的判定可得 $PE\parallel AD\parallel BC$，再根据平行线的性质即可求解；

（2）过 P 作 $PE\parallel AD$，根据平行线的判定可得 $PE\parallel AD\parallel BC$，再根据平行线的性质即可求解；

（3）问题拓展：分别过 A_2，$A_3\ldots$，An_{-1} 作直线$\parallel A_1M$，过 B_1，B_2，…，Bn_{-1} 作直线$\parallel A_1M$，根据平行线的判定和性质即可求解.

【详解】（1）$\angle CPD=\angle\alpha+\angle\beta$，理由如下：

如图，过 P 作 $PE\parallel AD$ 交 CD 于 E，



$\because AD\parallel BC$，

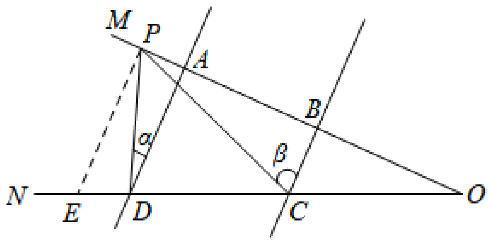
$\therefore AD\parallel PE\parallel BC$，

$\therefore\angle\alpha=\angle DPE$，$\angle\beta=\angle CPE$，

$\therefore\angle CPD=\angle DPE+\angle CPE=\angle\alpha+\angle\beta$；

（2）当 P 在 BA 延长线时，$\angle CPD=\angle\beta-\angle\alpha$；理由：

如图，过 P 作 $PE\parallel AD$ 交 CD 于 E，



$\because AD\parallel BC$，

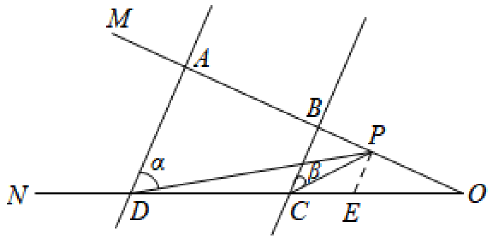
$\therefore AD\parallel PE\parallel BC$，

$\therefore\angle\alpha=\angle DPE$，$\angle\beta=\angle CPE$，

$\therefore\angle CPD=\angle CPE-\angle DPE=\angle\beta-\angle\alpha$；

当 P 在 BO 之间时，$\angle CPD=\angle\alpha-\angle\beta$．理由：

如图，过 P 作 $PE\parallel AD$ 交 CD 于 E，



$\because AD\parallel BC$，

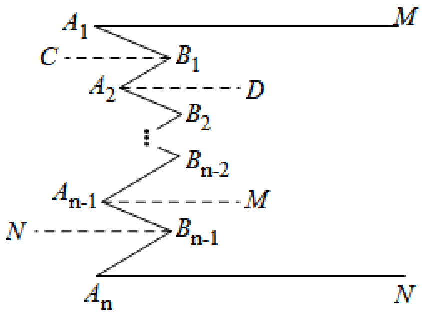
$\therefore AD\parallel PE\parallel BC$，

$\therefore \angle\alpha=\angle DPE$，$\angle\beta=\angle CPE$，

$\therefore \angle CPD=\angle DPE-\angle CPE=\angle\alpha-\angle\beta$．

（3）问题拓展：分别过 A_2，$A_3\ldots$，A_{n-1} 作直线$\parallel A_1M$，过 B_1，B_2，…，B_{n-1} 作直线$\parallel A_1M$，

由平行线的性质和角的和差关系得$\angle A_1+\angle A_2+\ldots+\angle A_n=\angle B_1+\angle B_2+\ldots+\angle B_{n-1}$．



故答案为：$\angle A_1+\angle A_2+\ldots+\angle A_n=\angle B_1+\angle B_2+\ldots+\angle B_{n-1}$．

【点睛】本题主要考查了平行线的判定和性质的应用，主要考查学生的推理能力，第（2）问在解题时注意分类思想的运用．

9．（2020 下·重庆九龙坡·八年级统考期末）已知，$AB\parallel CD$．点 M 在 AB 上，点 N 在 CD 上．

（1）如图 1 中，$\angle BME$、$\angle E$、$\angle END$ 的数量关系为：___；（不需要证明）

如图 2 中，$\angle BMF$、$\angle F$、$\angle FND$ 的数量关系为：___；（不需要证明）

（2）如图 3 中，NE 平分$\angle FND$，MB 平分$\angle FME$，且 $2\angle E+\angle F=180°$，求$\angle FME$ 的度数；

（3）如图 4 中，$\angle BME=60°$，EF 平分$\angle MEN$，NP 平分$\angle END$，且 $EQ\parallel NP$，则$\angle FEQ$ 的大小是否发生变化，若变化，请说明理由，若不变化，求出$\angle FEQ$ 的度数．

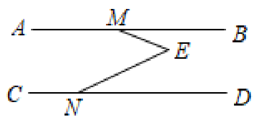


图1

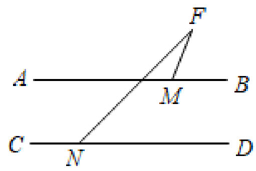


图2

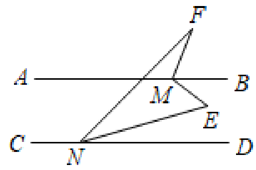


图3

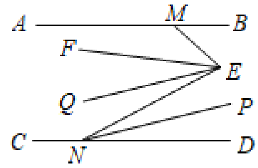


图4

【答案】（1）$\angle BME=\angle MEN-\angle END$；$\angle BMF=\angle MFN+\angle FND$；（2）120°；（3）不变，30°

【分析】（1）过 E 作 $EH\parallel AB$，易得 $EH\parallel AB\parallel CD$，根据平行线的性质可求解；过 F 作 $FH\parallel AB$，易得 $FH\parallel AB\parallel CD$，根据平行线的性质可求解；

（2）根据（1）的结论及角平分线的定义可得 2（$\angle BME+\angle END$）$+\angle BMF-\angle FND=180°$，可求解$\angle BMF=60°$，进而可求解；

（3）根据平行线的性质及角平分线的定义可推知$\angle FEQ=\frac{1}{2}\angle BME$，进而可求解．

【详解】解：（1）过 E 作 $EH\parallel AB$，如图 1，

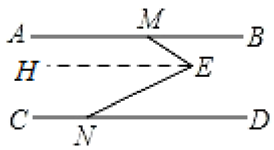


图1

$\therefore\angle BME=\angle MEH$，

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore HE\parallel CD$，

$\therefore\angle END=\angle HEN$，

$\therefore\angle MEN=\angle MEH+\angle HEN=\angle BME+\angle END$，

即$\angle BME=\angle MEN-\angle END$．

如图 2，过 F 作 $FH\parallel AB$，

$\therefore\angle BMF=\angle MFK$，

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore FH\parallel CD$，

$\therefore\angle FND=\angle KFN$，

$\therefore\angle MFN=\angle MFK-\angle KFN=\angle BMF-\angle FND$，

即：$\angle BMF=\angle MFN+\angle FND$．

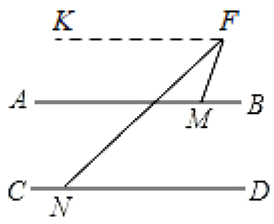


图2

故答案为$\angle BME=\angle MEN-\angle END$；$\angle BMF=\angle MFN+\angle FND$.

（2）由（1）得$\angle BME=\angle MEN-\angle END$；$\angle BMF=\angle MFN+\angle FND$.

∵NE 平分$\angle FND$，MB 平分$\angle FME$，

∴$\angle FME=\angle BME+\angle BMF$，$\angle FND=\angle FNE+\angle END$，

∵$2\angle MEN+\angle MFN=180^\circ$，

∴$2(\angle BME+\angle END)+\angle BMF-\angle FND=180^\circ$，

∴$2\angle BME+2\angle END+\angle BMF-\angle FND=180^\circ$，

即 $2\angle BMF+\angle FND+\angle BMF-\angle FND=180^\circ$，

解得$\angle BMF=60^\circ$，

∴$\angle FME=2\angle BMF=120^\circ$；

（3）$\angle FEQ$ 的大小没发生变化，$\angle FEQ=30^\circ$.

由（1）知：$\angle MEN=\angle BME+\angle END$，

∵EF 平分$\angle MEN$，NP 平分$\angle END$，

∴$\angle FEN=\frac{1}{2}\angle MEN=\frac{1}{2}(\angle BME+\angle END)$，$\angle ENP=\frac{1}{2}\angle END$，

∵$EQ\parallel NP$，

∴$\angle NEQ=\angle ENP$，

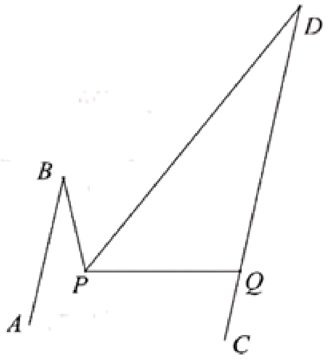
∴$\angle FEQ=\angle FEN-\angle NEQ=\frac{1}{2}(\angle BME+\angle END)-\frac{1}{2}\angle END=\frac{1}{2}\angle BME$，

∵$\angle BME=60^\circ$，

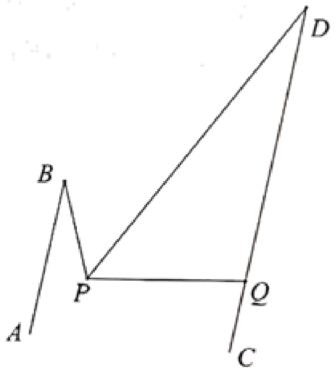
∴$\angle FEQ=\frac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$.

【点睛】本题主要考查平行线的性质及角平分线的定义，作平行线的辅助线是解题的关键.

10．（2023 下·辽宁大连·八年级统考期中）如图，$AB//CD$，点O在直线CD上，点P在直线AB和CD之间，$\angle ABP=\angle PDQ=\alpha$，$PD$平分$\angle BPQ$.



图



备用图

（1）求$\angle BPD$的度数（用含α的式子表示）；

（2）过点D作$DE//PQ$交PB的延长线于点E，作$\angle DEP$的平分线EF交PD于点F，请在备用图中补全图形，猜想EF与PD的位置关系，并证明；

（3）将（2）中的“作$\angle DEP$的平分线EF交PD于点F”改为“作射线EF将$\angle DEP$分为1:3两个部分，交PD于点F”，其余条件不变，连接EQ，若EQ恰好平分$\angle PQD$，请直接写出$\angle FEQ=$__________（用含α的式子表示）．

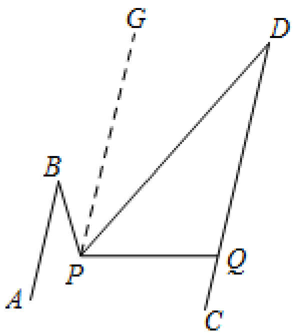
【答案】（1）$\angle BPD=2\alpha$；（2）画图见解析，$EF\perp PD$，证明见解析；（3）$45°-\frac{\alpha}{2}$或$45°-\frac{3}{2}\alpha$

【分析】（1）根据平行线的传递性推出$PG//AB//CD$，再利用平行线的性质进行求解；

（2）猜测$EF\perp PD$，根据PD平分$\angle BPQ$,$\angle BPD=2\alpha$，推导出$\angle BPD=\angle DPQ=2\alpha$，再根据$DE//PQ$、$EF$平分$\angle DEP$，通过等量代换求解；

（3）分两种情况进行讨论，即当$\angle PEF:\angle DEF=1:3$与$\angle DEF:\angle PEF=1:3$，充分利用平行线的性质、角平分线的性质、等量代换的思想进行求解．

【详解】（1）过点P作$PG//AB$，



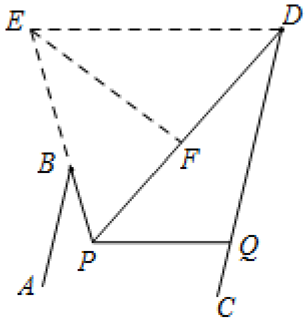
$\because AB//CD,PG//AB$，

$\therefore PG//AB//CD$，

$\therefore \angle BPG=\angle ABP=\alpha,\angle DPG=\angle PDQ=\alpha$，

$\therefore \angle BPD=\angle BPG+\angle DPG=2\alpha$.

（2）根据题意，补全图形如下：



猜测$EF\perp PD$，

由（1）可知：$\angle BPD=2\alpha$，

$\because PD$平分$\angle BPQ,\angle BPD=2\alpha$，

$\therefore \angle BPD=\angle DPQ=2\alpha$，

$\because DE//PQ$，

$\therefore \angle EDP=\angle DPQ=2\alpha$，

$\therefore \angle DEP=180°-\angle BPD-\angle EDP=180°-4\alpha$，

又EF平分$\angle DEP$，

$\angle PEF=\frac{1}{2}\angle DEP=90°-2\alpha$，

$\therefore \angle EFD=180°-\angle PEF-\angle BPD=90°$，

$\therefore EF\perp PD$.

（3）①如图 1，

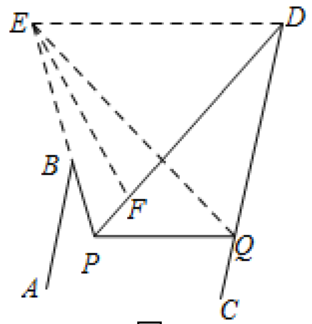


图1

$\angle PEF:\angle DEF=1:3$，

由（2）可知：$\angle EPD=\angle DPQ=\angle EDP=2\alpha,\angle DEP=180°-4\alpha$，

$\because \angle PEF:\angle DEF=1:3$，

$\therefore \angle PEF=\frac{1}{4}\angle DEP=45°-\alpha$，

$\angle DEF=\frac{3}{4}\angle DEP=135°-3\alpha$，

$\because DE//PQ$，

$\therefore \angle DEQ=\angle PQE$，

$\angle EDQ+\angle PQD=180°$，

$\because \angle EDP=2\alpha,\angle PDQ=\alpha$，

$\therefore \angle EDQ=\angle EDP+\angle PDQ=3\alpha$，

$\angle PQD=180°-\angle EDQ=180°-3\alpha$，

又EQ平分$\angle PQD$，

$\therefore \angle PQE=\angle DQE=\angle DEQ=\frac{1}{2}\angle PQD=90°-\frac{3}{2}\alpha$，

$\therefore \angle FEQ=\angle DEF-\angle DEQ=135°-3\alpha-(90°-\frac{3}{2}\alpha)=45°-\frac{3}{2}\alpha$；

②如图 2，

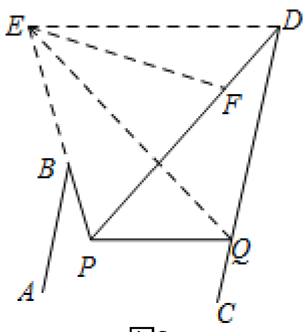


图2

$\angle DEP=180°-4\alpha$，$\angle PQD=180°-3\alpha$（同①）；

若$\angle DEF:\angle PEF=1:3$，

则有$\angle DEF=\frac{1}{4}\angle DEP=\frac{1}{4}\times(180°-4\alpha)=45°-\alpha$，

又$\angle PQE=\angle DQE=\frac{1}{2}\angle PQD=\frac{1}{2}\times(180°-3\alpha)=90°-\frac{3}{2}\alpha$，

$\because DE//PQ$，

$\therefore \angle DEQ=\angle PQE=90°-\frac{3}{2}\alpha$，

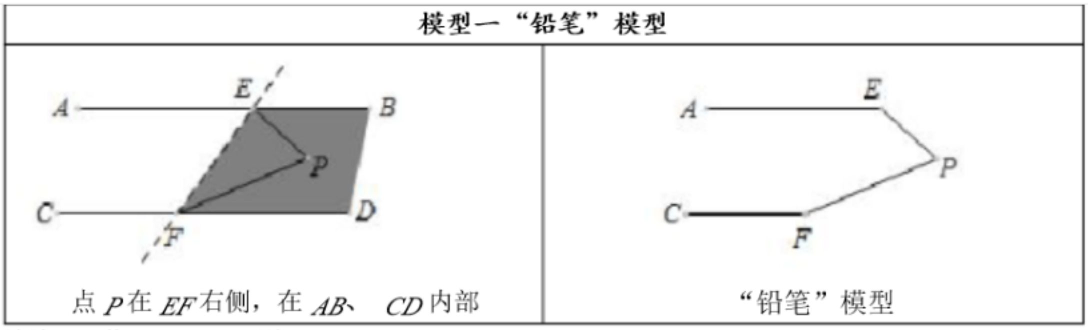
$\therefore \angle FEQ=\angle DEQ-\angle DEF=45°-\frac{1}{2}\alpha$，

综上所述：$\angle FEQ=45°-\frac{3}{2}\alpha$或$45°-\frac{\alpha}{2}$，

故答案是：$45°-\frac{\alpha}{2}$或$45°-\frac{3}{2}\alpha$.

【点睛】本题考查了平行线的性质、角平分线、三角形内角和定理、垂直等相关知识点，解题的关键是掌握相关知识点，作出适当的辅助线，通过分类讨论及等量代换进行求解.

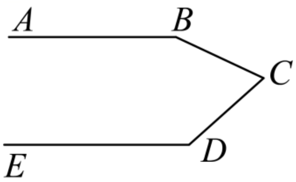
【模型 2 “铅笔”型】



结论 1：若 $AB // CD$，则$\angle P+\angle AEP+\angle PFC=360°$；

结论 2：若$\angle P+\angle AEP+\angle PFC=360°$，则 $AB // CD$.

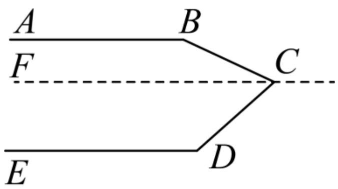
1．（2012 下·广东茂名·八年级统考期中）如图，$AB \parallel ED$，$\angle B+\angle C+\angle D=$（　）



A．180°　　B．360°　　C．540°　　D．270°

【答案】B

【分析】过 C 点作直线$CF \parallel AB$，根据平行线的性质可得$\angle B+\angle BCF=180°$，$\angle FCD+\angle D=180°$，然后再计算$\angle B+\angle C+\angle D$即可.



【详解】

如图，过 C 点作直线$CF \parallel AB$，

$\because AB \parallel ED$，

$\therefore CF \parallel ED$，

$\therefore \angle B+\angle BCF=180°$，$\angle FCD+\angle D=180°$，

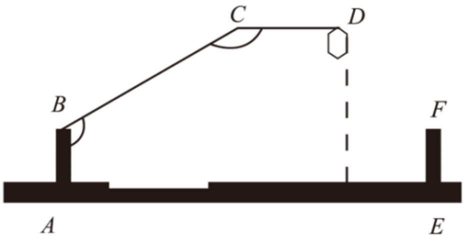
$\therefore \angle B+\angle BCF+\angle FCD+\angle D=360°$，

即$\angle B+\angle BCD+\angle D=360°$.

故选：B

【点睛】本题主要考查了平行线的性质，熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

2．（2012·江苏常州·八年级统考期中）一大门的栏杆如图所示，BA 垂直地面 AE 于点 A，CD 平行于地面 AE，则$\angle ABC+\angle BCD=$____.



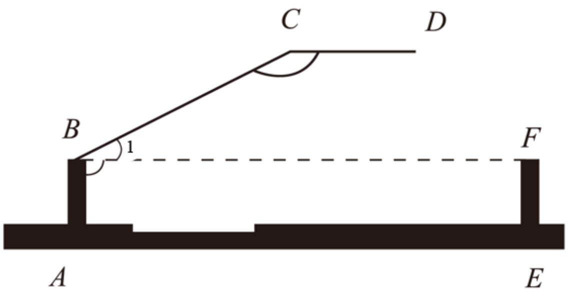
【答案】270°

【分析】过 B 作 $BF\parallel AE$，则 $CD\parallel BF\parallel AE$．根据平行线的性质即可求解.

【详解】过 B 作 $BF\parallel AE$，

$\because CD\parallel AE$，

则 $CD\parallel BF\parallel AE$，



$\therefore \angle BCD+\angle 1=180°$，

又$\because AB\perp AE$，

$\therefore AB\perp BF$，

$\therefore \angle ABF=90°$，

$\therefore \angle ABC+\angle BCD=90°+180°=270°$.

故答案为：270.

【点睛】本题主要考查了平行线的性质，两直线平行，同旁内角互补．正确作出辅助线是解题的关键.

3．（2023下·陕西西安·八年级西安市第八十三中学校联考期中）如图1所示的是一个由齿轮、轴承、托架等元件构成的手动变速箱托架，其主要作用是动力传输．如图2所示的是手动变速箱托架工作时某一时刻的示意图，已知$AB\parallel CD$，$CG\parallel EF$，$\angle BAG=150°$，$\angle DEF=130°$，则$\angle AGC$的度数是_____.

图1

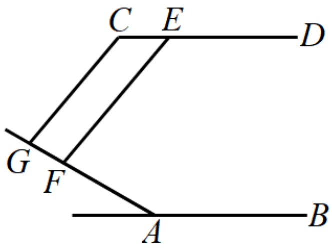
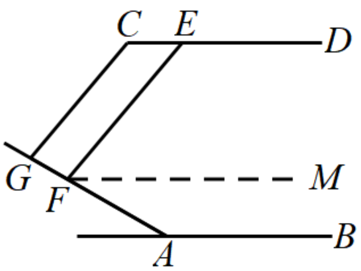


图2

【答案】80°

【分析】过点 F 作$FM\parallel CD$，因为$AB\parallel CD$，所以$AB\parallel CD\parallel FM$，再根据平行线的性质可以求出$\angle MFA$，$\angle EFM$，进而可求出$\angle EFA$，再根据平行线的性质即可求得$\angle AGC$.

【详解】解：如图，过点 F 作$FM\parallel CD$，



$\because AB\parallel CD$，

$\therefore AB\parallel CD\parallel FM$，

$\therefore \angle DEF+\angle EFM=180°$，$\angle MFA+\angle BAG=180°$，

$\because \angle BAG=150°$，$\angle DEF=130°$，

$\therefore \angle MFA=30°$，$\angle EFM=50°$，

$\therefore \angle EFA=\angle EFM+\angle AFM=80°$，

$\because CG\parallel EF$，

$\therefore \angle AGC=\angle EFA=80°$.

故答案为80°.

【点睛】本题考查平行线的性质，解题关键是结合图形利用平行线的性质进行角的转化和计算.

4．（2023下·广东东莞·八年级东莞市长安实验中学校考期中）如图，已知$AB\parallel CD$.

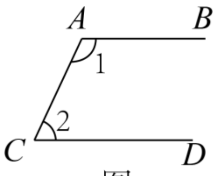


图 1

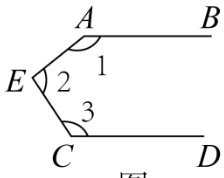


图 2

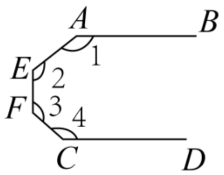


图 3

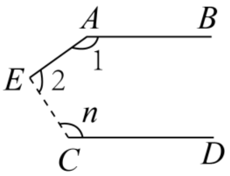


图 4

（1）如图 1 所示，∠1+∠2＝_____；

（2）如图 2 所示，∠1+∠2+∠3＝_____；并写出求解过程．

（3）如图 3 所示，∠1+∠2+∠3+∠4＝_____；

（4）如图 4 所示，试探究∠1+∠2+∠3+∠4+…+∠n＝_____．

【答案】（1）180°；（2）360°；（3）540°；（4）（n-1）×180°

【分析】（1）由两直线平行，同旁内角互补，可得答案；

（2）过点 E 作 AB 的平行线，转化成两个图 1，同理可得答案；

（3）过点 E，点 F 分别作 AB 的平行线，转化成 3 个图 1，可得答案；

（4）由（2）（3）类比可得答案．

【详解】解：（1）如图 1，∵AB∥CD，

∴∠1+∠2=180°（两直线平行，同旁内角互补）．

故答案为：180°；

（2）如图 2，过点 E 作 AB 的平行线 EF，

∵AB∥CD，

∴AB∥EF，CD∥EF，

∴∠1+∠AEF=180°，∠FEC+∠3=180°，

∴∠1+∠2+∠3=360°；

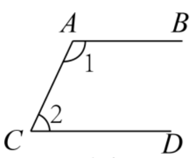


图 1

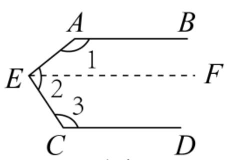


图 2

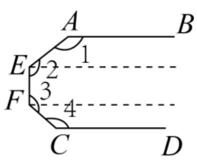


图 3

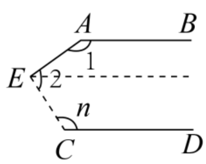


图 4

（3）如图 3，过点 E，点 F 分别作 AB 的平行线，

类比（2）可知∠1+∠2+∠3+∠4=180°×3=540°，

故答案为：540°；

（4）如图 4 由（2）和（3）的解法可知∠1+∠2+∠3+∠4+…+∠n=（n-1）×180°，

故答案为：（n-1）×180°．

【点睛】此题考查了平行线的性质．注意掌握辅助线的作法是解此题的关键．

5．（2020 下·江苏淮安·八年级统考期末）问题情境：如图 1，$AB\parallel CD$，$\angle PAB=130°$，$\angle PCD=120°$，求$\angle APC$的度数．

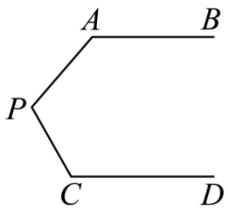


图1

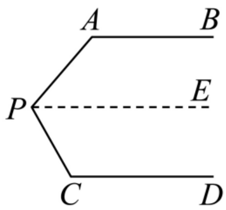


图2

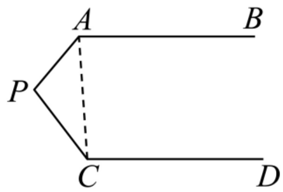


图3

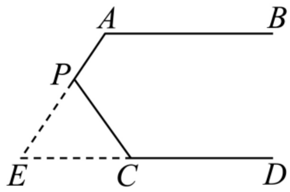


图4

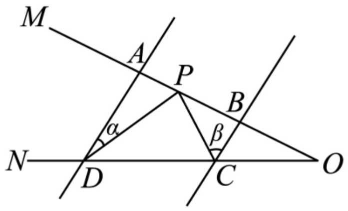
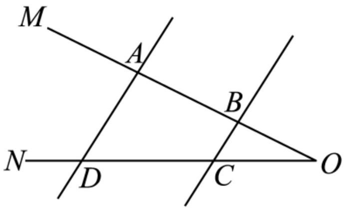
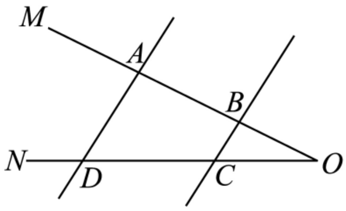


图5



备用图1



备用图2

思路点拨：

小明的思路是：如图 2，过 P 作$PE\parallel AB$，通过平行线性质，可分别求出$\angle APE$、$\angle CPE$的度数，从而可求出$\angle APC$的度数；

小丽的思路是：如图 3，连接AC，通过平行线性质以及三角形内角和的知识可求出$\angle APC$的度数；

小芳的思路是：如图 4，延长AP交DC的延长线于 E，通过平行线性质以及三角形外角的相关知识可求出$\angle APC$的度数．

问题解决：请从小明、小丽、小芳的思路中任选一种思路进行推理计算，你求得的$\angle APC$的度数为_____°；

问题迁移：

（1）如图 5，$AD\parallel BC$，点 P 在射线OM上运动，当点 P 在 A、B 两点之间运动时，$\angle ADP=\angle\alpha$，$\angle BCP=\angle\beta$．$\angle CPD$、$\angle\alpha$、$\angle\beta$之间有何数量关系？请说明理由；

（2）在（1）的条件下，如果点 P 在 A、B 两点外侧运动时（点 P 与点 A、B、O 三点不重合），请你直接写出$\angle CPD$、$\angle\alpha$、$\angle\beta$间的数量关系．

【答案】110；（1）$\angle CPD=\angle\alpha+\angle\beta$，理由见解析；（2）$\angle CPD=\angle\beta-\angle\alpha$或$\angle CPD=\angle\alpha-\angle\beta$，理由见解析

【分析】小明的思路是：过 P 作$PE\parallel AB$，构造同旁内角，利用平行线性质，可得$\angle APC=110°$.

（1）过 P 作$PE\parallel AD$交CD于 E，推出$AD\parallel PE\parallel BC$，根据平行线的性质得出$\angle \alpha=\angle DPE$，$\angle \beta=\angle CPE$，即可得出答案；

（2）画出图形（分两种情况：①点 P 在BA的延长线上，②点 P 在AB的延长线上），根据平行线的性质得出$\angle \alpha=\angle DPE$，$\angle \beta=\angle CPE$，即可得出答案.

【详解】解：小明的思路：如图 2，过 P 作$PE\parallel AB$，

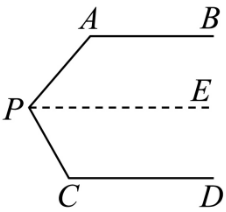


图2

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore PE\parallel AB\parallel CD$，

$\therefore \angle APE=180°-\angle A=50°$，$\angle CPE=180°-\angle C=60°$，

$\therefore \angle APC=50°+60°=110°$，

故答案为：110；

（1）$\angle CPD=\angle \alpha+\angle \beta$，理由如下：

如图 5，过 P 作$PE\parallel AD$交CD于 E，

$\because AD\parallel BC$，

$\therefore AD\parallel PE\parallel BC$，

$\therefore \angle \alpha=\angle DPE$，$\angle \beta=\angle CPE$，

$\therefore \angle CPD=\angle DPE+\angle CPE=\angle \alpha+\angle \beta$；

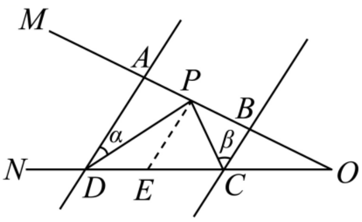


图5

（2）当 P 在BA延长线时，$\angle CPD=\angle \beta-\angle \alpha$；

理由：如图 6，过 P 作$PE\parallel AD$交CD于 E，

$\because AD\parallel BC$，

$\therefore AD\parallel PE\parallel BC$，

$\therefore \angle\alpha = \angle DPE$，$\angle\beta = \angle CPE$，

$\therefore \angle CPD = \angle CPE - \angle DPE = \angle\beta - \angle\alpha$；

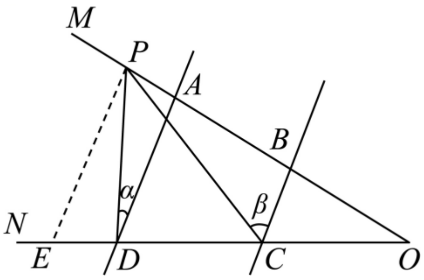


图6

当 P 在 BO 之间时，$\angle CPD = \angle\alpha - \angle\beta$.

理由：如图 7，过 P 作 $PE \parallel AD$ 交 CD 于 E，

$\because AD \parallel BC$，

$\therefore AD \parallel PE \parallel BC$，

$\therefore \angle\alpha = \angle DPE$，$\angle\beta = \angle CPE$，

$\therefore \angle CPD = \angle DPE - \angle CPE = \angle\alpha - \angle\beta$.

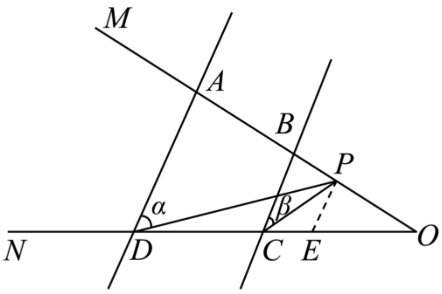


图7

【点睛】本题考查了三角形的内角和定理，平行线的判定和性质，主要考查学生的推理能力，解决问题的关键是作辅助线构造内错角以及同旁内角.

6．（2020 下·内蒙古·八年级校考期中）综合与探究：

（1）问题情境：如图 1，$AB \parallel CD, \angle PAB = 130°, \angle PCD = 120°$．求 $\angle APC$ 的度数．

小明想到一种方法，但是没有解答完：

如图 2，过 P 作 $PE \parallel AB$，$\therefore \angle APE + \angle PAB = 180°$.

$\therefore \angle APE = 180° - \angle PAB = 180° - 130° = 50°$.

$\because AB \parallel CD$．$\therefore PE \parallel CD$.

…………

请你帮助小明完成剩余的解答.

（2）问题探究：请你依据小明的思路，解答下面的问题：

如图 3，$AD \parallel BC$，点 P 在射线OM上运动，$\angle ADP=\angle\alpha, \angle BCP=\angle\beta$. 当点 P 在 A，B 两点之间时，$\angle CPD, \angle\alpha, \angle\beta$ 之间有何数量关系？请说明理由.

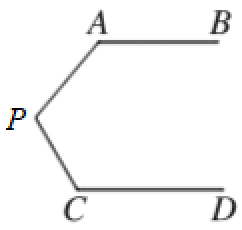


图1

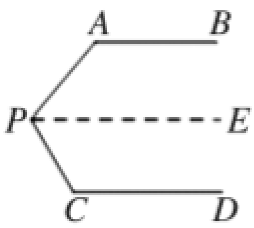


图2

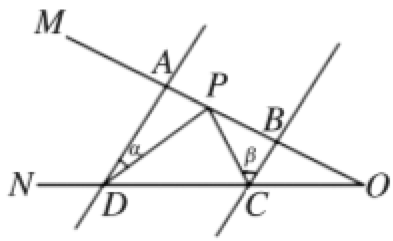


图3

【答案】（1）110°；（2）$\angle CPD=\angle\alpha+\angle\beta$，理由见解析

【分析】（1）过 P 作 $PE//AB$，构造同旁内角，通过平行线性质，可得$\angle APC$=50°+60°=110°.

（2）过 P 作 $PE//AD$ 交 CD 于 E，推出 $AD//PE//BC$，根据平行线的性质得出$\angle\alpha=\angle DPE$，$\angle\beta=\angle CPE$，即可得出答案.

【详解】解：（1）过 P 作$PE \parallel AB$，

$\therefore \angle APE+\angle PAB=180°$，

$\therefore \angle APE=180°-\angle PAB=180°-130°=50°$.

$\because AB \parallel CD$，

$\therefore PE \parallel CD$.

$\therefore \angle CPE+\angle PCD=180°$，

$\therefore \angle CPE=180°-120°=60°$，

$\therefore \angle APC=50°+60°=110°$.

（2）$\angle CPD=\angle\alpha+\angle\beta$，

如图 3，过 P 作 $PE//AD$ 交 CD 于 E，

$\because AD//BC$，

$\therefore AD//PE//BC$，

$\therefore \angle\alpha=\angle DPE$，$\angle\beta=\angle CPE$，

$\therefore \angle CPD=\angle DPE+\angle CPE=\angle\alpha+\angle\beta$;

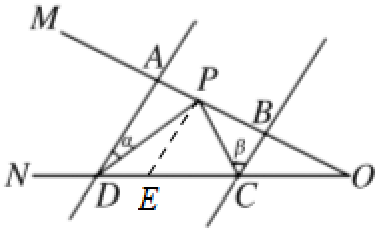


图3

【点睛】本题考查了平行线的性质和判定的应用，主要考查学生的推理能力，解决问题的关键是作辅助线构造内错角以及同旁内角.

7. （2020下·天津滨海新·八年级统考期末）如图1，四边形$MNBD$为一张长方形纸片.

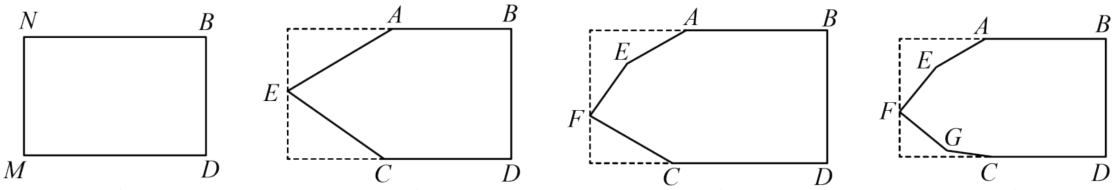


图1 图2 图3 图4

（1）如图2，将长方形纸片剪两刀，剪出三个角（$\angle BAE$、$\angle AEC$、$\angle ECD$），则$\angle BAE+\angle AEC+\angle ECD=$________°.

（2）如图3，将长方形纸片剪三刀，剪出四个角（$\angle BAE$、$\angle AEF$、$\angle EFC$、$\angle FCD$），则$\angle BAE+\angle AEF+\angle EFC+\angle FCD=$________°.

（3）如图4，将长方形纸片剪四刀，剪出五个角（$\angle BAE$、$\angle AEF$、$\angle EFG$、$\angle FGC$、$\angle GCD$），则$\angle BAE+\angle AEF+\angle EFG+\angle FGC+\angle GCD=$________°.

（4）根据前面探索出的规律，将本题按照上述剪法剪n刀，剪出$(n+1)$个角，那么这$(n+1)$个角的和是________°.

【答案】（1）360；（2）540；（3）720；（4）$180n$.

【分析】（1）过点E作EH∥AB，再根据两直线平行，同旁内角互补即可得到三个角的和等于180°的2倍；

（2）分别过E、F分别作AB的平行线，根据两直线平行，同旁内角互补即可得到四个角的和等于180°的三倍；

（3）分别过E、F、G分别作AB的平行线，根据两直线平行，同旁内角互补即可得到四个角的和等于180°的三倍；

（4）根据前三问个的剪法，剪n刀，剪出n+1个角，那么这n+1个角的和是180n度.

【详解】（1）过E作EH∥AB（如图②）.

∵原四边形是长方形，

∴AB∥CD，

又∵EH∥AB，

∴CD∥EH（平行于同一条直线的两条直线互相平行）．

∵EH∥AB，

∴∠A+∠1=180°（两直线平行，同旁内角互补）．

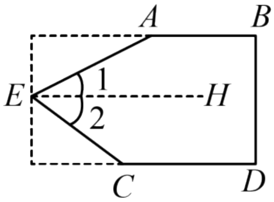
∵CD∥EH，

∴∠2+∠C=180°（两直线平行，同旁内角互补）．

∴∠A+∠1+∠2+∠C=360°，

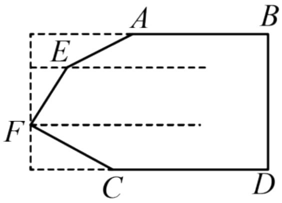
又∵∠1+∠2=∠AEC，

∴∠BAE+∠AEC+∠ECD=360°；



图②

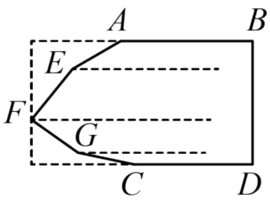
（2）分别过 E、F 分别作 AB 的平行线，如图③所示，



图③

用上面的方法可得∠BAE+∠AEF+∠EFC+∠FCD=540°；

（3）分别过 E、F、G 分别作 AB 的平行线，如图④所示，



图④

用上面的方法可得∠BAE+∠AEF+∠EFG+∠FGC+∠GCD=720°；

（4）由此可得一般规律：剪 n 刀，剪出 n+1 个角，那么这 n+1 个角的和是 180n 度．

故答案为：（1）360；（2）540；（3）720；（4）180n．

【点睛】本题主要考查了多边形的内角和，作平行线并利用两直线平行，同旁内角互补是解本题的关键，总结规律求解是本题的难点．

8．（2023下·浙江·八年级期末）已知$AB//CD$，定点E，F分别在直线AB，CD上，在平行线AB，CD之间有一动点P．

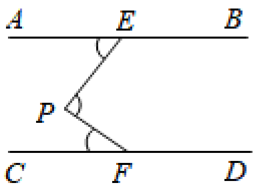
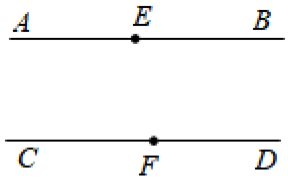
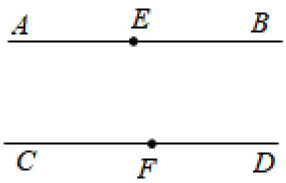


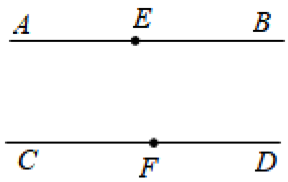
图1



备用图1



备用图2



备用图3

（1）如图1所示时，试问$\angle AEP$，$\angle EPF$，$\angle PFC$满足怎样的数量关系?并说明理由．

（2）除了（1）的结论外，试问$\angle AEP$，$\angle EPF$，$\angle PFC$还可能满足怎样的数量关系?请画图并证明

（3）当$\angle EPF$满足$0° < \angle EPF < 180°$，且QE，QF分别平分$\angle PEB$和$\angle PFD$，

①若$\angle EPF = 60°$，则$\angle EQF =$ __________°．

②猜想$\angle EPF$与$\angle EQF$的数量关系．（直接写出结论）

【答案】(1) $\angle AEP$+$\angle PFC$=$\angle EPF$；(2) $\angle AEP$+$\angle EPF$+$\angle PFC$=360°；(3)①150°或30；②$\angle EPF$+2$\angle EQF$=360°或$\angle EPF$=2$\angle EQF$

【分析】（1）由于点P是平行线AB，CD之间有一动点，因此需要对点P的位置进行分类讨论：如图1，当P点在EF的左侧时，$\angle AEP$，$\angle EPF$，$\angle PFC$满足数量关系为：$\angle EPF = \angle AEP + \angle PFC$；

（2）当P点在EF的右侧时，$\angle AEP$，$\angle EPF$，$\angle PFC$满足数量关系为：$\angle AEP + \angle EPF + \angle PFC = 360°$；

（3）①若当P点在EF的左侧时，$\angle EQF = \angle BEQ + \angle QFD = 150°$；当$P$点在$EF$的右侧时，可求得$\angle BEQ + \angle QFD = 30°$；

②结合①可得$\angle EPF = 180°-2\angle BEQ + 180°-2\angle DFQ = 360°-2(\angle BEQ + \angle PFD)$，由$\angle EQF = \angle BEQ + \angle DFQ$，得出$\angle EPF + 2\angle EQF = 360°$；可得$EPF = \angle BEP + \angle PFD$，由$\angle BEQ + \angle DFQ = \angle EQF$，得出$\angle EPF = 2\angle EQF$．

【详解】解：（1）如图1，过点P作$PG//AB$，

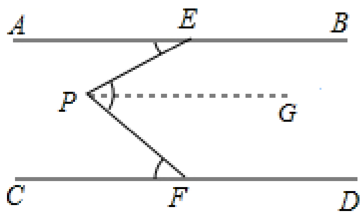


图1

$\because PG//AB$，

$\therefore \angle EPG = \angle AEP$，

$\because AB//CD$，

$\therefore PG//CD$，

$\therefore \angle FPG = \angle PFC$，

$\therefore \angle AEP + \angle PFC = \angle EPF$；

（2）如图 2，当P点在EF的右侧时，$\angle AEP$，$\angle EPF$，$\angle PFC$满足数量关系为：

$\angle AEP + \angle EPF + \angle PFC = 360°$；

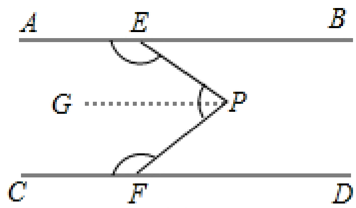


图2

过点P作$PG//AB$，

$\because PG//AB$，

$\therefore \angle EPG + \angle AEP = 180°$，

$\because AB//CD$，

$\therefore PG//CD$，

$\therefore \angle FPG + \angle PFC = 180°$，

$\therefore \angle AEP + \angle EPF + \angle PFC = 360°$；

（3）①如图 3，若当P点在EF的左侧时，

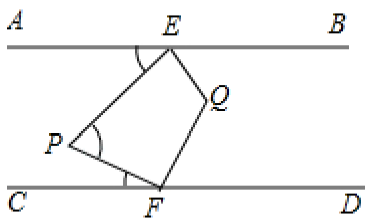


图3

$\because \angle EPF=60°$，

$\therefore \angle PEB+\angle PFD=360°-60°=300°$，

$\because EQ$，FQ分别平分$\angle PEB$和$\angle PFD$，

$\therefore \angle BEQ=\frac{1}{2}\angle PEB$，$\angle QFD=\frac{1}{2}\angle PFD$，

$\therefore \angle EQF=\angle BEQ+\angle QFD=\frac{1}{2}(\angle PEB+\angle PFD)=\frac{1}{2}\times 300°=150°$；

如图 4，当P点在EF的右侧时，

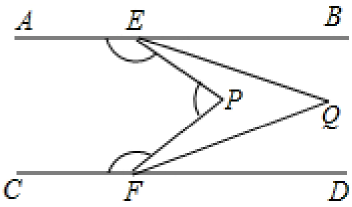


图4

$\because \angle EPF=60°$，

$\therefore \angle PEB+\angle PFD=60°$，

$\therefore \angle BEQ+\angle QFD=\frac{1}{2}(\angle PEB+\angle PFD)=\frac{1}{2}\times 60°=30°$；

故答案为：150°或 30；

②由①可知：$\angle EQF=\angle BEQ+\angle QFD=\frac{1}{2}(\angle PEB+\angle PFD)=\frac{1}{2}(360°-\angle EPF)$，

$\therefore \angle EPF+2\angle EQF=360°$；

$\angle EQF=\angle BEQ+\angle QFD=\frac{1}{2}(\angle PEB+\angle PFD)=\frac{1}{2}\angle EPF$，

$\therefore \angle EPF=2\angle EQF$．

综合以上可得$\angle EPF$与$\angle EQF$的数量关系为：$\angle EPF+2\angle EQF=360°$或$\angle EPF=2\angle EQF$．

【点睛】本题主要考查了平行线的性质，平行公理和及推论等知识点，作辅助线后能求出各个角的度数，是解此题的关键．

9．（2023 下·浙江宁波·八年级统考期中）如图，$AB//CD$，定点E，F分别在直线AB，CD上，在平行线AB，CD之间有一个动点P，满足$0°<\angle EPF<180°$．

（1）试问：$\angle AEP$，$\angle EPF$，$\angle PFC$满足怎样的数量关系？

解：由于点P是平行线AB，CD之间一动点，因此需对点P的位置进行分类讨论．如图 1，当点P在EF的左侧时，易得$\angle AEP$，$\angle EPF$，$\angle PFC$满足的数量关系为$\angle AEP+\angle PFC=\angle EPF$；如图 2，当点$P$在$EF$的右侧时，写出$\angle AEP$，$\angle EPF$，$\angle PFC$满足的数量关系_________．

（2）如图 3，QE，QF分别平分$\angle PEB$和$\angle PFD$，且点P在EF左侧.

①若$\angle EPF=100°$，则$\angle EQF$的度数为______；

②猜想$\angle EPF$与$\angle EQF$的数量关系，并说明理由；

③如图 4，若$\angle BEQ$与$\angle DFQ$的角平分线交于点Q_1，$\angle BEQ_1$与$\angle DFQ_1$的角平分线交于点Q_2，$\angle BEQ_2$与$\angle DFQ_2$的角平分线交于点Q_3，以此类推，则$\angle EPF$与$\angle EQ_{2020}F$满足怎样的数量关系？（直接写出结果）

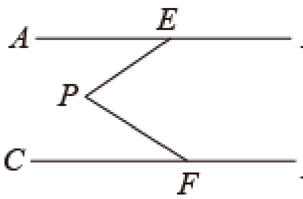


图1

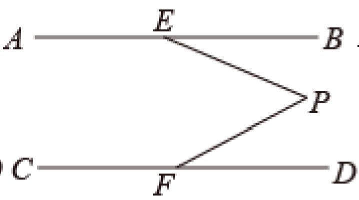


图2

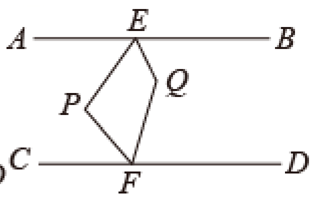


图3

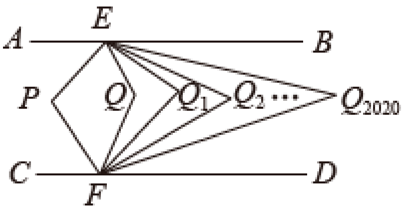


图4

【答案】（1）$\angle AEP+\angle EPF+\angle PFC=360°$；（2）①130°；②$\angle EPF+2\angle EQF=360°$，见解析；③$\angle EPF+2^{2021}\angle EQ_{2020}F=360°$

【分析】（1）过点 P 作 $PH//AB$，利用平行线的性质即可求解；

（2）根据（1）的结论结合角平分线的定义，平角的定义，运用整体思想即可求解.

【详解】解：（1）如图 2，当点 P 在 EF 的右侧时，过点 P 作 $PM//AB$，则 $PM//CD$，

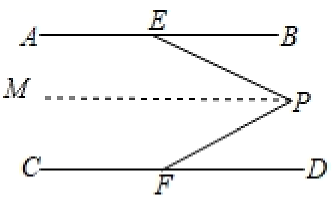


图 2

∴$\angle AEP+\angle EPM=180°$，$\angle PFC+\angle MPF=180°$，

∴$\angle AEP+\angle EPM+\angle PFC+\angle MPF=360°$，

即：$\angle AEP+\angle EPF+\angle PFC=360°$；

故答案为：$\angle AEP+\angle EPF+\angle PFC=360°$；

（2）①由（1）得：$\angle DFQ+\angle BEQ=\angle EQF$，$\angle PEA+\angle PFC=\angle EPF$，

∵$\angle EPF=100°$，