

2023-2024 学年安徽省池州市东至县第二中学高三第一次（4 月）诊断数学试题

注意事项:

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设点 A, B, C 不共线, 则“ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \perp \overrightarrow{BC}$ ”是“ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ ” ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件

2. 已知 x 与 y 之间的一组数据:

x	1	2	3	4
y	m	3.2	4.8	7.5

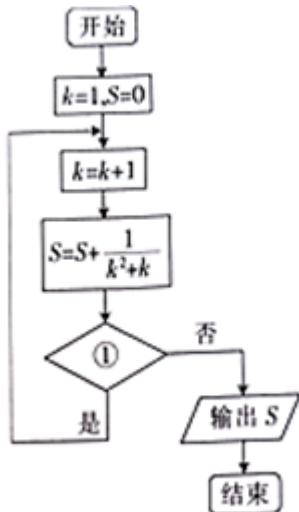
- 若 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 2.1x - 0.25$ ，则 m 的值为 ()

- A. 1.5 B. 2.5 C. 3.5 D. 4.5**

3. 设直线 l 的方程为 $x - 2y + m = 0 (m \in \mathbf{R})$, 圆的方程为 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$, 若直线 l 被圆所截得的弦长为 $2\sqrt{5}$, 则实数 m 的取值为

- A. -9 或 11 B. -7 或 11 C. -7 D. -9

4. 执行如图所示的程序框图，若输出的 $S = \frac{3}{10}$ ，则①处应填写（ ）



- A. $k < 3$? B. $k, 3$? C. $k, 5$? D. $k < 5$?

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 7, a_{10} + a_7 = 0$, 则 $a_3 + a_4 =$ ()

- A. 20 B. 18 C. 16 D. 14

6. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的周期为 4, 当 $x \in [-2, 2)$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - x - 4$, 则 $f(-\log_3 6) + f(\log_3 54) =$ ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2} - \log_3 2$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3} + \log_3 2$

7. 若点 $P(-3, 4)$ 是角 α 的终边上一点, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

- A. $-\frac{24}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $\frac{16}{25}$ D. $\frac{8}{5}$

8. 设复数 z 满足 $|z - 3| = 2$, z 在复平面内对应的点为 $M(a, b)$, 则 M 不可能为 ()

- A. $(2, \sqrt{3})$ B. $(3, 2)$ C. $(5, 0)$ D. $(4, 1)$

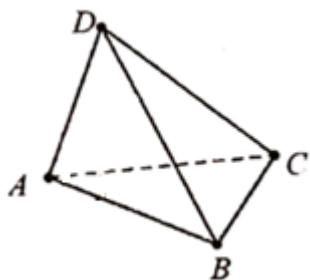
9. 正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 和为 S_n , 已知 $a_3 + a_7 - a_5^2 + 15 = 0$, 则 $S_9 =$ ()

- A. 35 B. 36 C. 45 D. 54

10. 已知奇函数 $f(x)$ 是 R 上的减函数, 若 m, n 满足不等式组 $\begin{cases} f(m) + f(n-2) \geq 0 \\ f(m-n-1) \geq 0 \\ f(m) \leq 0 \end{cases}$, 则 $2m-n$ 的最小值为 ()

- A. -4 B. -2 C. 0 D. 4

11. 如图, 已知三棱锥 $D-ABC$ 中, 平面 $DAB \perp$ 平面 ABC , 记二面角 $D-AC-B$ 的平面角为 α , 直线 DA 与平面 ABC 所成角为 β , 直线 AB 与平面 ADC 所成角为 γ , 则 ()



- A. $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ B. $\beta \geq \alpha \geq \gamma$ C. $\alpha \geq \gamma \geq \beta$ D. $\gamma \geq \alpha \geq \beta$

12. $(1+2x)(1+x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 ()

- A. 5 B. 10 C. 20 D. 30

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = -x^3 + x + a, x \in [\frac{1}{e}, e]$ 与 $g(x) = 3\ln x - x - 1$ 的图象上存在关于 x 轴对称的点, 则 a 的取值范围为_____.

14. 函数 $f(x) = \frac{2 + \ln 2x}{x^2}$ 的图象在 $x = \frac{e}{2}$ 处的切线方程为_____.

15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , O 为坐标原点, 点 M 为双曲线右支上一点, 若 $|F_1F_2| = 2|OM|$, $\tan \angle MF_2F_1 \geq 2$, 则双曲线 C 的离心率的取值范围为_____.

16. 曲线 $f(x) = (x^2 + x)\ln x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某单位准备购买三台设备, 型号分别为 A, B, C 已知这三台设备均使用同一种易耗品, 提供设备的商家规定: 可以在购买设备的同时购买该易耗品, 每件易耗品的价格为 100 元, 也可以在设备使用过程中, 随时单独购买易耗品, 每件易耗品的价格为 200 元. 为了决策在购买设备时应购买的易耗品的件数. 该单位调查了这三种型号的设备各 60 台, 调查每台设备在一个月中使用的易耗品的件数, 并得到统计表如下所示.

每台设备一个月中使用的易耗品的件数		6	7	8
频数	型号 A	30	30	0
	型号 B	20	30	10
	型号 C	0	45	15

将调查的每种型号的设备频率视为概率, 各台设备在易耗品的使用上相互独立.

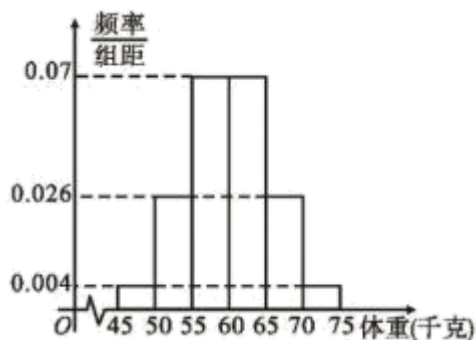
- (1) 求该单位一个月中 A, B, C 三台设备使用的易耗品总数超过 21 件的概率;
- (2) 以该单位一个月购买易耗品所需总费用的期望值为决策依据, 该单位在购买设备时应同时购买 20 件还是 21 件易耗品?

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足对任意 $n \in N^*$ 都有 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 其前 n 项和为 S_n , 且 $S_7 = 49$, a_3 是 a_1 与 a_{13} 的等比中项, $a_1 < a_2$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;
- (2) 已知数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 2^{a_n+1}$, $c_n = a_n b_n$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 $\frac{9T_n - 20}{6n - 5}$ 大于 1000 的最小的正整数 n 的值.

19. (12 分) 某学校为了解全校学生的体重情况, 从全校学生中随机抽取了 100

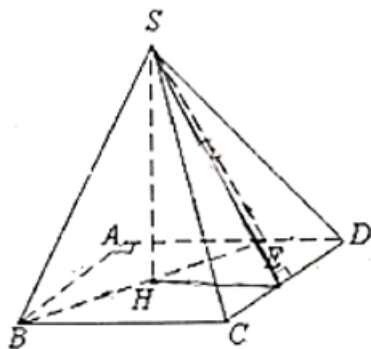
人的体重数据，得到如下频率分布直方图，以样本的频率作为总体的概率。



- (1) 估计这 100 人体重数据的平均值 μ 和样本方差 σ^2 ；(结果取整数，同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)
- (2) 从全校学生中随机抽取 3 名学生，记 X 为体重在 $[55, 65)$ 的人数，求 X 的分布列和数学期望；
- (3) 由频率分布直方图可以认为，该校学生的体重 Y 近似服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。若

$P(\mu - 2\sigma \leq Y < \mu + 2\sigma) > 0.9544$ ，则认为该校学生的体重是正常的。试判断该校学生的体重是否正常？并说明理由。

20. (12 分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $BC = 3$ ，点 E 是边 AD 上一点，且 $AE = 2ED$ ，点 H 是 BE 的中点，将 $\triangle ABE$ 沿着 BE 折起，使点 A 运动到点 S 处，且满足 $SC = SD$ 。



- (1) 证明： $SH \perp$ 平面 $BCDE$ ；
- (2) 求二面角 $C-SB-E$ 的余弦值。

21. (12 分) 设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ ， $z(x+2y) = m$ 。

- (1) 若 $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 的最小值为 4，求 m 的值；
- (2) 若 $x^2 + 4y^2 + \frac{1}{2}z^2 \geq 1$ ，证明： $m \leq -1$ 或 $m \geq 1$ 。

22. (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$ ， $a_1 = 25$ ，且 a_1, a_{11}, a_{13} 成等比数列。

- (1) 求使不等式 $a_n \geq 0$ 成立的最大自然数 n ；

(2) 记数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $-\frac{13}{25} \leq T_n \leq \frac{12}{25}$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

利用向量垂直的表示、向量数量积的运算, 结合充分必要条件的定义判断即可.

【详解】

由于点 A, B, C 不共线, 则

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \perp \overrightarrow{BC} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 \Leftrightarrow \\ |\overrightarrow{AB}| &= |\overrightarrow{AC}|; \end{aligned}$$

故“ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \perp \overrightarrow{BC}$ ”是“ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ ”的充分必要条件.

故选: C.

【点睛】

本小题主要考查充分、必要条件的判断, 考查向量垂直的表示, 考查向量数量积的运算, 属于基础题.

2、D

【解析】

利用表格中的数据, 可求解得到 $\bar{x} = 2.5$, 代入回归方程, 可得 $\bar{y} = 5$, 再结合表格数据, 即得解.

【详解】

利用表格中数据, 可得 $\bar{x} = 2.5$,

$$\text{又 } \bar{y} = 2.1\bar{x} - 0.25, \therefore \bar{y} = 5,$$

$$\therefore m + 3.2 + 4.8 + 7.5 = 20.$$

解得 $m = 4.5$

故选: D

【点睛】

本题考查了线性回归方程过样本中心点的性质，考查了学生概念理解，数据处理，数学运算的能力，属于基础题.

3、A

【解析】

圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ 的圆心坐标为 $(1, 1)$ ，该圆心到直线 l 的距离 $d = \frac{|m-1|}{\sqrt{5}}$ ，结合弦长公式得

$$2\sqrt{25 - \left(\frac{|m-1|}{\sqrt{5}}\right)^2} = 2\sqrt{5}, \text{ 解得 } m = -9 \text{ 或 } m = 11, \text{ 故选 A.}$$

4、B

【解析】

模拟程序框图运行分析即得解.

【详解】

$$k=1, S=0; k=2, S=0 + \frac{1}{2^2+2} = \frac{1}{6};$$

$$k=3, S=\frac{1}{6} + \frac{1}{3^2+3} = \frac{1}{4}; k=4, S=\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2+4} = \frac{3}{10}.$$

所以①处应填写“ $k, 3?$ ”

故选：B

【点睛】

本题主要考查程序框图，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

5、A

【解析】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，再利用基本量法与题中给的条件列式求解首项与公差，进而求得 $a_3 + a_4$ 即可.

【详解】

$$\text{设等差数列 } \{a_n\} \text{ 的公差为 } d. \text{ 由 } \begin{cases} a_5 = 7, \\ a_{10} + a_7 = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} a_1 + 4d = 7, \\ a_1 + 9d + a_1 + 6d = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 15, \\ d = -2 \end{cases} \text{ 所以}$$

$$a_3 + a_4 = 2a_1 + 5d = 2 \times 15 + 5 \times (-2) = 20.$$

故选：A

【点睛】

本题主要考查了等差数列的基本量求解，属于基础题.

6、A

【解析】

因为给出的解析式只适用于 $x \in [-2, 2)$ ，所以利用周期性，将 $f(\log_3 54)$ 转化为 $f(\log_3 \frac{2}{3})$ ，再与 $f(-\log_3 6)$ 一起代入解析式，利用对数恒等式和对数的运算性质，即可求得结果.

【详解】

Q 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的周期为 4

$$\therefore f(\log_3 54) = f(\log_3 54 - 4) = f(\log_3 \frac{2}{3}),$$

Q 当 $x \in [-2, 2)$ 时， $f(x) = (\frac{1}{3})^x - x - 4$,

$$-\log_3 6 \in [-2, 2), \log_3 \frac{2}{3} \in [-2, 2),$$

$$\therefore f(-\log_3 6) + f(\log_3 54)$$

$$= (\frac{1}{3})^{-\log_3 6} - (-\log_3 6) - 4 + (\frac{1}{3})^{\log_3 \frac{2}{3}} - \log_3 \frac{2}{3} - 4$$

$$= (\frac{1}{3})^{\log_1 6} + (\frac{1}{3})^{\log_1 \frac{3}{2}} + (\log_3 6 - \log_3 \frac{2}{3}) - 8$$

$$= 6 + \frac{3}{2} + \log_3 (6 \times \frac{3}{2}) - 8$$

$$= \frac{3}{2}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查了利用函数的周期性求函数值，对数的运算性质，属于中档题.

7、A

【解析】

根据三角函数的定义，求得 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ，再由正弦的倍角公式，即可求解.

【详解】

由题意，点 $P(-3, 4)$ 是角 α 的终边上一点，

根据三角函数的定义，可得 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ，

$$\text{则 } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times (-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}, \text{ 故选 A.}$$

【点睛】

本题主要考查了三角函数的定义和正弦的倍角公式的化简、求值，其中解答中根据三角函数的定义和正弦的倍角公式，准确化简、计算是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

【解析】

依题意，设 $z = a + bi$ ，由 $|z - 3| = 2$ ，得 $(a - 3)^2 + b^2 = 4$ ，再一一验证.

【详解】

设 $z = a + bi$ ，

因为 $|z - 3| = 2$ ，

所以 $(a - 3)^2 + b^2 = 4$ ，

经验证 $M(4, 1)$ 不满足，

故选：D.

【点睛】

本题主要考查了复数的概念、复数的几何意义，还考查了推理论证能力，属于基础题.

9、C

【解析】

由等差数列 $\{a_n\}$ 通项公式得 $a_3 + a_7 - a_5^2 + 15 = 0$ ，求出 a_5 ，再利用等差数列前 n 项和公式能求出 S_9 .

【详解】

Q 正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ，

$$a_3 + a_7 - a_5^2 + 15 = 0,$$

$$\therefore a_5^2 - 2a_5 - 15 = 0,$$

解得 $a_5 = 5$ 或 $a_5 = -3$ (舍)，

$$\therefore S_9 = \frac{9}{2}(a_1 + a_9) = 9a_5 = 9 \times 5 = 45, \text{ 故选 C.}$$

【点睛】

本题主要考查等差数列的性质与求和公式，属于中档题. 解等差数列问题要注意应用等差数列的性质

$a_p + a_q = a_m + a_n = 2a_r$ ($p + q = m + n = 2r$) 与前 n 项和的关系.

10、B

【解析】

根据函数的奇偶性和单调性得到可行域，画出可行域和目标函数，根据目标函数的几何意义平移得到答案.

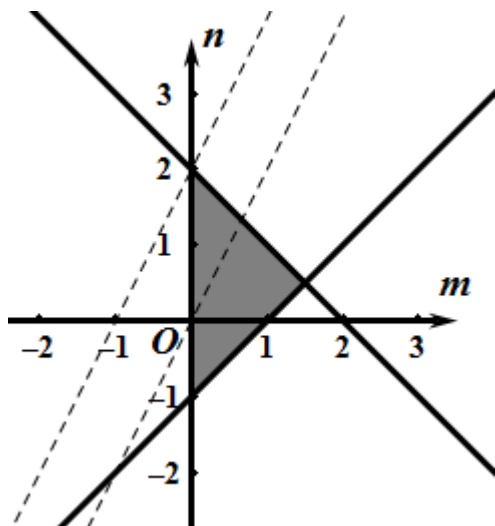
【详解】

奇函数 $f(x)$ 是 R 上的减函数, 则 $f(0)=0$, 且 $\begin{cases} m \leq 2-n \\ m-n-1 \leq 0 \\ m \geq 0 \end{cases}$, 画出可行域和目标函数,

$z = 2m - n$, 即 $n = 2m - z$, z 表示直线与 y 轴截距的相反数,

根据平移得到: 当直线过点 $(0, 2)$, 即 $m = 0, n = 2$ 时, $z = 2m - n$ 有最小值为 -2 .

故选: B.



【点睛】

本题考查了函数的单调性和奇偶性, 线性规划问题, 意在考查学生的综合应用能力, 画出图像是解题的关键.

11、A

【解析】

作 $DD' \perp AB$ 于 D' , $DE \perp AC$ 于 E , 分析可得 $\alpha = \angle DED'$, $\beta = \angle DAD'$, 再根据正弦的大小关系判断分析得 $\alpha \geq \beta$,

再根据线面角的最小性判定 $\beta \geq \gamma$ 即可.

【详解】

作 $DD' \perp AB$ 于 D' , $DE \perp AC$ 于 E .

因为平面 $DAB \perp$ 平面 ABC , $DD' \perp$ 平面 ABC . 故 $AC \perp DE$, $AC \perp DD'$,

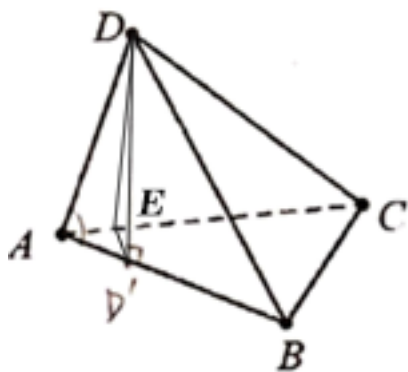
故 $AC \perp$ 平面 DED' . 故二面角 $D-AC-B$ 为 $\alpha = \angle DED'$.

又直线 DA 与平面 ABC 所成角为 $\beta = \angle DAD'$, 因为 $DA \geq DE$,

故 $\sin \angle DED' = \frac{DD'}{DE} \leq \frac{DD'}{DA} = \sin \angle DAD'$. 故 $\alpha \geq \beta$, 当且仅当 A, E 重合时取等号.

又直线 AB 与平面 ADC 所成角为 γ , 且 $\beta = \angle DAD'$ 为直线 AB 与平面 ADC 内的直线 AD 所成角, 故 $\beta \geq \gamma$, 当且仅当 $BD \perp$ 平面 ADC 时取等号.

故 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.



故选：A

【点睛】

本题主要考查了线面角与线线角的大小判断,需要根据题意确定角度的正弦的关系,同时运用线面角的最小性进行判定.属于中档题.

12、C

【解析】

由 $(1+2x)(1+x)^5 = (1+x)^5 + 2x(1+x)^5$ 知, 展开式中 x^2 项有两项, 一项是 $(1+x)^5$ 中的 x^2 项, 另一项是 $2x$ 与 $(1+x)^5$ 中含 x 的项乘积构成.

【详解】

由已知, $(1+2x)(1+x)^5 = (1+x)^5 + 2x(1+x)^5$, 因为 $(1+x)^5$ 展开式的通项为 $C_5^r x^r$, 所以

展开式中 x^2 的系数为 $C_5^2 + 2C_5^1 = 20$.

故选：C.

【点睛】

本题考查求二项式定理展开式中的特定项, 解决这类问题要注意通项公式应写准确, 本题是一道基础题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 $[2, e^3 - 2]$

【解析】

两函数图象上存在关于 x 轴对称的点的等价命题是方程 $-x^3 + x + a = -3\ln x + x + 1$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e]$ 上有解, 化简方程

$a-1 = x^3 - 3\ln x$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e]$ 上有解, 构造函数, 求导, 求出单调区间, 利用函数性质得解.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/418041026111006113>