

2023 届蒙古北京八中乌兰察布分校高三数学试题下学期期末联考试卷

注意事项

1. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回.
2. 答题前, 请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置.
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符.
4. 作答选择题, 必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑; 如需改动, 请用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案. 作答非选择题, 必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答, 在其他位置作答一律无效.
5. 如需作图, 须用 2B 铅笔绘、写清楚, 线条、符号等须加黑、加粗.

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_3 = \frac{1}{5}, a_n - a_{n+1} = 2a_n a_{n+1}$, 则数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 前 10 项的和为

- A. $\frac{10}{21}$ B. $\frac{20}{21}$ C. $\frac{9}{19}$ D. $\frac{18}{19}$

2. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右焦点, O 是坐标原点, 过点 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线, 垂足为 P . 若 $|PF_1| = \sqrt{6}|OP|$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

3. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 15$ 且 $3a_{n+1} = 3a_n - 2$, 则使 $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ 的 k 的值为 ()

- A. 21 B. 22 C. 23 D. 24

4. 从 5 名学生中选出 4 名分别参加数学, 物理, 化学, 生物四科竞赛, 其中甲不能参加生物竞赛, 则不同的参赛方案种数为

- A. 48 B. 72 C. 90 D. 96

5. 已知 $\sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1, \alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 则 $\frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

6. 对于函数 $f(x)$, 定义满足 $f(x_0) = x_0$ 的实数 x_0 为 $f(x)$ 的不动点, 设 $f(x) = \log_a x$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 若 $f(x)$ 有且仅有一个不动点, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $0 < a < 1$ 或 $a = \sqrt{e}$ B. $1 < a < \sqrt{e}$
C. $0 < a < 1$ 或 $a = e^{\frac{1}{e}}$ D. $0 < a < 1$

7. 已知 EF 为圆 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 的一条直径, 点 $M(x, y)$ 的坐标满足不等式组 $\begin{cases} x-y+1 \leq 0, \\ 2x+y+3 \geq 0, \\ y \leq 1. \end{cases}$ 则 $\vec{ME} \cdot \vec{MF}$ 的

取值范围为 ()

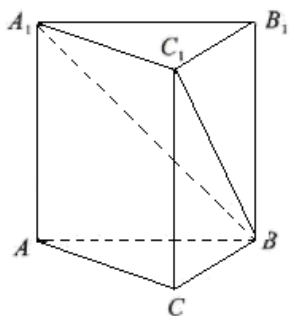
A. $\left[\frac{9}{2}, 13\right]$

B. $[4, 13]$

C. $[4, 12]$

D. $\left[\frac{7}{2}, 12\right]$

8. 《九章算术》中记载, 堑堵是底面为直角三角形的直三棱柱, 阳马指底面为矩形, 一侧棱垂直于底面的四棱锥. 如图, 在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$, $AA_1 = 2$, 当阳马 $B-ACC_1A_1$ 体积的最大值为 $\frac{4}{3}$ 时, 堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的体积为 ()



A. $\frac{4}{3}\pi$

B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

C. $\frac{32}{3}\pi$

D. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$

9. 已知 i 是虚数单位, 若 $\frac{z}{1-i} = 2i+1$, 则 $|z| =$ ()

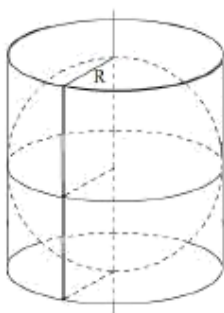
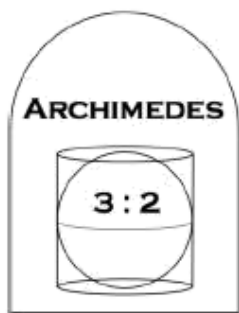
A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $\sqrt{10}$

D. 10

10. 阿基米德 (公元前 287 年—公元前 212 年) 是古希腊伟大的哲学家、数学家和物理学家, 他和高斯、牛顿并列被称为世界三大数学家. 据说, 他自己觉得最为满意的一个数学发现就是“圆柱内切球体的体积是圆柱体积的三分之二, 并且球的表面积也是圆柱表面积的三分之二”. 他特别喜欢这个结论, 要求后人在他的墓碑上刻着一个圆柱容器里放了一个球, 如图, 该球顶天立地, 四周碰边, 表面积为 54π 的圆柱的底面直径与高都等于球的直径, 则该球的体积为 ()



- A. 4π B. 16π C. 36π D. $\frac{64\pi}{3}$

11. 给出下列三个命题:

①“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - 2x_0 + 1 \leq 0$ ”的否定;

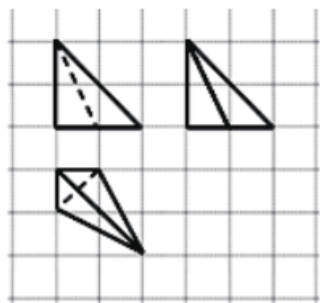
②在 $\triangle ABC$ 中, “ $B > 30^\circ$ ”是“ $\cos B < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ”的充要条件;

③将函数 $y = 2\cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $y = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

其中假命题的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

12. 网格纸上小正方形边长为 1 单位长度, 粗线画出的是某几何体的三视图, 则此几何体的体积为 ()



- A. 1 B. $\frac{4}{3}$ C. 3 D. 4

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \ln x + x^2$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为_____.

14. 曲线 $y = x \cos x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处的切线的斜率为_____.

15. 在棱长为 6 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是 BC 的中点, 点 P 是面 DCC_1D_1 所在平面内的动点, 且满足 $\angle APD = \angle MPC$, 则三棱锥 $P - BCD$ 的体积的最大值是_____.

16. 函数 $f(x) = x \cos x + \sin x$ 在 $x = \pi$ 处的切线方程是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x+2| + |x-4|$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 3x$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \geq k|x-1|$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

18. (12 分) 为迎接 2022 年冬奥会, 北京市组织中学生开展冰雪运动的培训活动, 并在培训结束后对学生进行了考核. 记 X 表示学生的考核成绩, 并规定 $X \geq 85$ 为考核优秀. 为了了解本次培训活动的效果, 在参加培训的学生中随机抽取了 30 名学生的考核成绩, 并作成如下茎叶图:



(I) 从参加培训的学生中随机选取 1 人, 请根据图中数据, 估计这名学生考核优秀的概率;

(II) 从图中考核成绩满足 $X \in [80, 89]$ 的学生中任取 2 人, 求至少有一人考核优秀的概率;

(III) 记 $P(a \leq X \leq b)$ 表示学生的考核成绩在区间 $[a, b]$ 的概率, 根据以往培训数据, 规定当 $P\left(\left|\frac{x-85}{10}\right| \leq 1\right) \geq 0.5$ 时培训有效. 请根据图中数据, 判断此次中学生冰雪培训活动是否有效, 并说明理由.

19. (12 分) 设前 n 项积为 T_n 的数列 $\{a_n\}$, $a_n = \lambda - T_n$ (λ 为常数), 且 $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$ 是等差数列.

(I) 求 λ 的值及数列 $\{T_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且 $b_n = (2n+3)T_n$, 求 $S_{2n} - S_n - 2n$ 的最小值.

20. (12 分) 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$, 集合 $B = \{x | 2x^2 + (2k+5)x + 5k < 0\}$, $k \in \mathbf{R}$.

(1) 求集合 B ;

(2) 记 $M = A \cap B$, 且集合 M 中有且仅有一个整数, 求实数 k 的取值范围.

21. (12 分) 随着互联网金融的不断发展, 很多互联网公司推出余额增值服务产品和活期资金管理服务产品, 如蚂蚁金服旗下的“余额宝”, 腾讯旗下的“财富通”, 京东旗下“京东小金库”. 为了调查广大市民理财产品的选择情况, 随机抽取 1200 名使用理财产品的市民, 按照使用理财产品的情况统计得到如下频数分布表:

分组	频数 (单位: 名)
使用“余额宝”	x

使用“财富通”	y
使用“京东小金库”	30
使用其他理财产品	50
合计	1200

已知这 1200 名市民中，使用“余额宝”的人比使用“财富通”的人多 160 名.

(1) 求频数分布表中 x ， y 的值；

(2) 已知 2018 年“余额宝”的平均年化收益率为 2.8%， “财富通”的平均年化收益率为 4.2% .若在 1200 名使用理财产品的市民中，从使用“余额宝”和使用“财富通”的市民中按分组用分层抽样方法共抽取 7 人，然后从这 7 人中随机选取 2 人，假设这 2 人中每个人理财的资金有 10000 元，这 2 名市民 2018 年理财的利息总和为 X ，求 X 的分布列及数学期望.注：平均年化收益率，也就是我们所熟知的利息，理财产品“平均年化收益率为 3%”即将 100 元钱存入某理财产品，一年可以获得 3 元利息.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = e^{\frac{x}{1-x}}$,

(1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减;

(2) 证明: 对任意的 $x \in (0,1)$ 有 $e^{\frac{x}{1-x}} < 1-x < e^{-x}$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

分析：通过对 $a_n - a_{n+1} = 2a_n a_{n+1}$ 变形可知 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2$ ，进而可知 $a_n = \frac{1}{2n-1}$ ，利用裂项相消法求和即可.

详解： $\because a_n - a_{n+1} = 2a_n a_{n+1}$ ， $\therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2$ ，

又 $\because \frac{1}{a_3} = 5$ ，

$$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_3} + 2(n-3) = 2n-1, \text{ 即 } a_n = \frac{1}{2n-1},$$

$$\therefore a_n a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\therefore \text{数列 } \{a_n a_{n+1}\} \text{ 前10项的和为 } \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{10}{21},$$

故选 A.

点睛：裂项相消法是最难把握的求和方法之一，其原因是有时很难找到裂项的方向，突破这一难点的方法是根据式子

$$\text{的结构特点，常见的裂项技巧：(1) } \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right); \text{ (2) } \frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n}); \text{ (3)}$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right); \text{ (4) } \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]; \text{ 此外，需注意裂项}$$

之后相消的过程中容易出现丢项或多项的问题，导致计算结果错误.

2、B

【解析】

$$\text{设过点 } F_2(c, 0) \text{ 作 } y = \frac{b}{a}x \text{ 的垂线，其方程为 } y = -\frac{a}{b}(x-c), \text{ 联立方程，求得 } x = \frac{a^2}{c}, y = \frac{ab}{c}, \text{ 即 } P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right), \text{ 由}$$

$$|PF_1| = \sqrt{6}|OP|, \text{ 列出相应方程，求出离心率.}$$

【详解】

$$\text{解：不妨设过点 } F_2(c, 0) \text{ 作 } y = \frac{b}{a}x \text{ 的垂线，其方程为 } y = -\frac{a}{b}(x-c),$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = -\frac{a}{b}(x-c) \end{cases} \text{ 解得 } x = \frac{a^2}{c}, y = \frac{ab}{c}, \text{ 即 } P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right),$$

$$\text{由 } |PF_1| = \sqrt{6}|OP|, \text{ 所以有 } \frac{a^2 b^2}{c^2} + \left(\frac{a^2}{c} + c \right)^2 = 6 \left(\frac{a^4}{c^2} + \frac{a^2 b^2}{c^2} \right),$$

$$\text{化简得 } 3a^2 = c^2, \text{ 所以离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}.$$

故选：B.

【点睛】

本题主要考查双曲线的概念、直线与直线的位置关系等基础知识，考查运算求解、推理论证能力，属于中档题.

3、C

【解析】

因为 $a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{3}$, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且公差 $d = -\frac{2}{3}$, $a_1 = 15$, 则 $a_n = 15 - \frac{2}{3}(n-1) = -\frac{2}{3}n + \frac{47}{3}$, 所以由题设 $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ 可得 $(-\frac{2}{3}n + \frac{47}{3})(-\frac{2}{3}n + \frac{45}{3}) < 0 \Rightarrow \frac{45}{2} < n < \frac{47}{2}$, 则 $n = 23$, 应选答案 C.

4、D

【解析】

因甲不参加生物竞赛, 则安排甲参加另外 3 场比赛或甲学生不参加任何比赛

①当甲参加另外 3 场比赛时, 共有 $C_3^1 \cdot A_4^3 = 72$ 种选择方案; ②当甲学生不参加任何比赛时, 共有 $A_4^4 = 24$ 种选择方案. 综上所述, 所有参赛方案有 $72+24=96$ 种

故答案为: 96

点睛: 本题以选择学生参加比赛为载体, 考查了分类计数原理、排列数与组合数公式等知识, 属于基础题.

5、B

【解析】

结合 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 求得 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的值, 由此化简所求表达式, 求得表达式的值.

【详解】

由 $\begin{cases} \sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$, 以及 $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 解得 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} &= \frac{1 - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1 - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -2. \end{aligned}$$

故选: B

【点睛】

本小题主要考查利用同角三角函数的基本关系式化简求值, 考查二倍角公式, 属于中档题.

6、C

【解析】

根据不动点的定义，利用换底公式分离参数可得 $\ln a = \frac{\ln x}{x}$ ；构造函数 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，并讨论 $g(x)$ 的单调性与最值，

画出函数图象，即可确定 a 的取值范围.

【详解】

由 $\log_a x = x$ 得， $\ln a = \frac{\ln x}{x}$.

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$,

则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

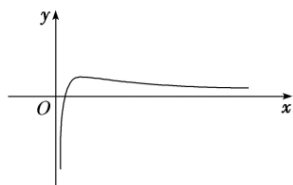
令 $g'(x) = 0$ ，解得 $x = e$ ，

所以当 $x \in (0, e)$ 时， $g'(x) > 0$ ，则 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 内单调递增；

当 $x \in (e, +\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ，则 $g(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 内单调递减；

所以 $g(x)$ 在 $x = e$ 处取得极大值，即最大值为 $g(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ ，

则 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图象如下图所示：



由 $f(x)$ 有且仅有一个不动点，可得 $\ln a < 0$ 或 $\ln a = \frac{1}{e}$ ，

解得 $0 < a < 1$ 或 $a = e^{\frac{1}{e}}$.

故选：C

【点睛】

本题考查了函数新定义的应用，由导数确定函数的单调性与最值，分离参数法与构造函数方法的应用，属于中档题.

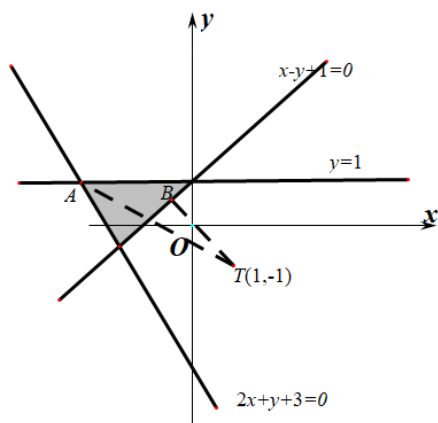
7、D

【解析】

首先将 $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF}$ 转化为 $\overrightarrow{MT}^2 - 1$ ，只需求出 MT 的取值范围即可，而 MT 表示可行域内的点与圆心 $T(1, -1)$ 距离，数形结合即可得到答案.

【详解】

作出可行域如图所示



设圆心为 $T(1, -1)$ ，则 $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = (\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TE}) \cdot (\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TF}) =$
 $(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TE}) \cdot (\overrightarrow{MT} - \overrightarrow{TE}) = \overrightarrow{MT}^2 - \overrightarrow{TE}^2 = \overrightarrow{MT}^2 - 1,$

过 T 作直线 $x - y + 1 = 0$ 的垂线，垂足为 B ，显然 $MB \leq MT \leq MA$ ，又易得 $A(-2, 1)$ ，

所以 $MA = \sqrt{[1 - (-2)]^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{13}$ ， $TB = \frac{|1 - (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，

故 $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MT}^2 - 1 \in [\frac{7}{2}, 12]$ 。

故选：D。

【点睛】

本题考查与线性规划相关的取值范围问题，涉及到向量的线性运算、数量积、点到直线的距离等知识，考查学生转化与划归的思想，是一道中档题。

8、B

【解析】

利用均值不等式可得 $V_{B-ACC_1A_1} = \frac{1}{3} BC \cdot AC \cdot AA_1 = \frac{2}{3} BC \cdot AC \leq \frac{1}{3} (BC^2 + AC^2) = \frac{1}{3} AB^2$ ，即可求得 AB ，进而求得外接球的半径，即可求解。

【详解】

由题意易得 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 ，

所以 $V_{B-ACC_1A_1} = \frac{1}{3} BC \cdot AC \cdot AA_1 = \frac{2}{3} BC \cdot AC \leq \frac{1}{3} (BC^2 + AC^2) = \frac{1}{3} AB^2$ ，

当且仅当 $AC = BC$ 时等号成立，

又阳马 $B-ACC_1A_1$ 体积的最大值为 $\frac{4}{3}$ ，

所以 $AB = 2$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/418046140142006053>