

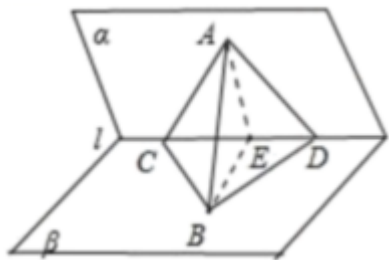
重难点突破 05 立体几何中最值、范围问题

一. 选择题 (共 5 小题)

1. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 $\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$, $A \in \alpha, B \in \beta, C \in l, D \in l, AB \perp l$, AB 与平面 β 所成角为 $\frac{\pi}{3}$. 记 $\triangle ACD$ 的面积为 S_1 , $\triangle BCD$ 的面积为 S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围为 ()

- A. $[\frac{1}{2}, 1)$ B. $[\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ C. $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$ D. $[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$

【解答】解：作 $AE \perp CD$, 垂足为 E , 连接 BE ,



Q $AB \perp l$, 即 $AB \perp CD$, $AE \cap AB = A$, $AE, AB \subset$ 平面 AEB ,

$\therefore CD \perp$ 平面 AEB , $BE \subset$ 平面 AEB ,

$\therefore CD \perp BE$, 又 $CD \subset \beta$, 故平面 $AEB \perp \beta$, 平面 $AEB \cap \beta = BE$,

$\therefore BE$ 为 AB 在 β 内的射影, 则 $\angle ABE$ 为 AB 与平面 β 所成角, 即 $\angle ABE = \frac{\pi}{3}$,

Q $AE \perp CD$, $CD \perp BE$,

$\therefore \angle AEB$ 为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角, 即 $\angle AEB = \theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} AE \times CD}{\frac{1}{2} BE \times CD} = \frac{AE}{BE},$$

在 $\triangle ABE$ 中, 由正弦定理有:

$$\begin{aligned} \frac{AE}{\sin \angle ABE} &= \frac{BE}{\sin \angle BAE} = \frac{AB}{\sin \angle AEB}, \\ \therefore \frac{AE}{BE} &= \frac{\sin \angle ABE}{\sin \angle BAE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sin \angle BAE}, \\ \therefore \angle BAE &= \pi - \frac{\pi}{3} - \theta = \frac{2\pi}{3} - \theta, \text{ 又 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\therefore \angle BAE \in (\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}), \therefore \sin \angle BAE \in (\frac{1}{2}, 1], \text{ 又 } \angle ABE = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{\sin \angle ABE}{\sin \angle BAE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sin \angle BAE} \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}), \text{ 即 } \frac{S_1}{S_2} \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}).$$

故选：C.

2. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 为棱 AB 上的动点，则 A_1M 与平面 ABC_1D_1 所成角的取值范围为()

- A. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ B. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ C. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ D. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$

【解答】解：设 $AD_1 \cap A_1D = O$ ，连接 OM ，则 $AD_1 \perp A_1D$ ，

因为在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB \perp$ 平面 ADD_1A_1 ， $A_1D \subset$ 平面 ADD_1A_1 ，

所以 $AB \perp AD_1$ ，

因为 $AD_1 \perp AB = A$ ， $AD_1 \perp AB \subset$ 平面 ABC_1D_1 ，

所以 $A_1O \perp$ 平面 ABC_1D_1 ，

所以 $\angle A_1MO$ 即为 A_1M 与平面 ABC_1D_1 所成角 θ 。

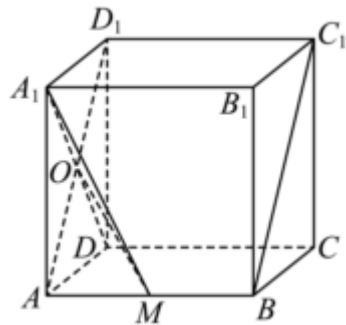
$$\text{设 } AA_1 = 2, \tan \theta = \frac{A_1O}{OM} = \frac{\sqrt{2}}{OM},$$

因为 $\sqrt{2} \leq OM \leq \sqrt{6}$ ，

$$\text{所以 } \tan \theta \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, 1],$$

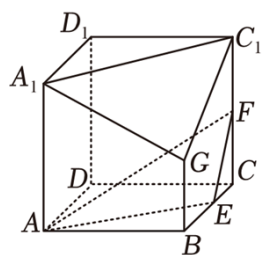
因为 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，所以 $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 。

故选：C.



3. 在如图所示的几何体中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， AA_1 ， BG ， CC_1 ， DD_1

均与底面 $ABCD$ 垂直，且 $AA_1 = CC_1 = DD_1 = 2BG = 2$ ，点 E ， F 分别为线段 BC ， CC_1 的中点，则下列说法错误的是()



- A. 直线 A_1G 与平面 AEF 平行
- B. 三棱锥 $G-ACD$ 的外接球的表面积是 9π
- C. 点 C_1 到平面 AEF 的距离为 $\frac{2}{3}$
- D. 若点 P 在线段 AD_1 上运动，则异面直线 EF 和 CP 所成角的取值范围是 $(0, \frac{\pi}{3}]$

【解答】解：如图建立空间直角坐标系，可得 $A(2, 0, 0)$ ， $B(2, 2, 0)$ ， $C(0, 2, 0)$ ，

$D(0, 0, 0)$ ，

$A_1(2, 0, 2)$ ， $G(2, 2, 1)$ ， $C_1(0, 2, 2)$ ， $D_1(0, 0, 2)$ ， $E(1, 2, 0)$ ， $F(0, 2, 1)$ ，

对于 A： $\vec{A_1G} = (0, 2, -1)$ ，

设平面 AEF 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，

$\vec{AE} = (-1, 2, 0)$ ， $\vec{AF} = (-2, 2, 1)$ ，

所以 $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + z = 0 \end{cases}$ ，

令 $y = 1$ ，得 $x = 2$ ， $z = 2$ ，

所以 $\vec{m} = (2, 1, 2)$ ，

所以 $\vec{A_1G} \cdot \vec{m} = (0, 2, -1) \cdot (2, 1, 2) = 0$ ，

所以直线 A_1G 与平面 AEF 平行，选项 A 正确；

对于 B：三棱锥 $G-ACD$ 的外接球的球心为 $Q(x, y, z)$ ，

则 $|QA| = |QC| = |QD| = |QG|$ ，

$$\text{所以 } (x-2)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2,$$

$$\text{解得 } x=y=1, \quad z=\frac{1}{2},$$

$$R^2 = (1-2)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

$$\text{所以三棱锥 } G-ACD \text{ 的外接球的体积为 } 4\pi \cdot \frac{9}{4} = 9\pi, \text{ 选项 } B \text{ 正确};$$

$$\text{对于 } C: AE = \sqrt{(2-1)^2 + (0-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5},$$

$$AF = \sqrt{(2-0)^2 + (0-2)^2 + (0-1)^2} = 3,$$

$$EF = \sqrt{(1-0)^2 + (2-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos \angle EAF = \frac{|EA|^2 + |FA|^2 - |EF|^2}{2|EA||FA|} = \frac{5+9-2}{2\sqrt{5} \cdot 3} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \sin \angle EAF = \sqrt{1 - \cos^2 \angle EAF} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} |AE| |AF| \sin \angle EAF = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 3 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{2},$$

$$S_{V_{C_1EF}} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } V_{C_1-AEF} = V_{A-C_1EF},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{3} \times S_{\triangle AEF} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2,$$

$$\text{所以 } h = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以点 } C_1 \text{ 到平面 } AEF \text{ 的距离为 } \frac{2}{3}, \text{ 选项 } C \text{ 正确};$$

$$\text{对于 } D: \text{ 设 } P(t, 0, 2-t), \quad t \in (0,1)$$

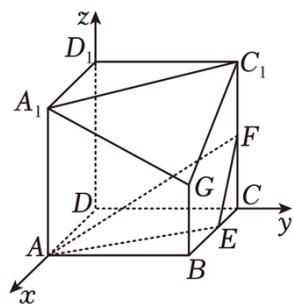
$$\overrightarrow{CP} = (t, -2, 2-t), \quad \overrightarrow{EF} = (-1, 0, 1),$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{CP}, \overrightarrow{EF} \rangle = \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{CP}| |\overrightarrow{EF}|} = \frac{-t+2-t}{\sqrt{t^2+4+(2-t)^2} \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}t}{\sqrt{2t^2-4t+8}}$$

$$= \frac{1-t}{\sqrt{t^2-2t+4}} = \sqrt{\frac{(1-t)^2}{t^2-2t+4}} = \sqrt{\frac{(1-t)^2}{(t-1)^2+3}} = \sqrt{1-\frac{3}{(t-1)^2+3}} \in (0, \frac{1}{2}],$$

所以异面直线 EF 和 CP 所成角的取值范围是 $[\frac{\pi}{3}, \pi)$ 。选项 D 错误。

故选： D 。



4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长为 2，平面 α 经过点 A ，且满足直线 AA_1 与平面 α 所成角为 45° ，过点 A_1 作平面 α 的垂线，垂足为 H ，则 CH 长度的取值范围为()

- A. $[\sqrt{10-4\sqrt{2}}, \sqrt{10+4\sqrt{2}}]$ B. $[\sqrt{10}, \sqrt{10+4\sqrt{2}}]$ C. $[\sqrt{6}, \sqrt{10}]$
D. $[\sqrt{10}, \sqrt{14}]$

【解答】解：如图所示，连接 A_1H ，因为 $A_1H \perp \alpha$ ，所以 $A_1H \perp AH$ ，

又因为直线 AA_1 与平面 α 所成角为 45° ，即 $\angle A_1AH = 45^\circ$ ，所以 $AH = \sqrt{2}$ ，

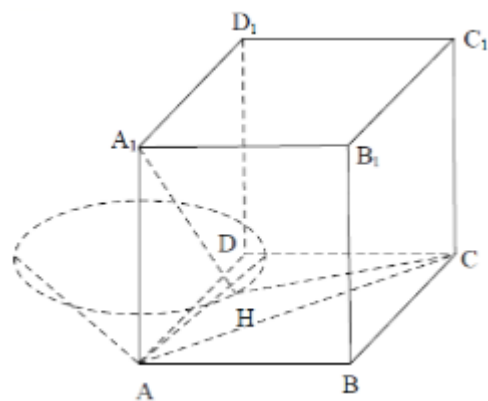
所以 H 在如图所示的圆锥底面上，所以 $CH^2 = CA^2 + AH^2 + 2CA \times AH \times \cos \angle CAA_1$ ，

易知 $CA = 2\sqrt{2}$ ， $\angle CAA_1 \in [45^\circ, 135^\circ]$ ，

所以 $CH^2 = 10 + 8\cos \angle CAA_1 \in [10 - 4\sqrt{2}, 10 + 4\sqrt{2}]$ ，

所以 $CH \in [\sqrt{10-4\sqrt{2}}, \sqrt{10+4\sqrt{2}}]$ 。

故选： A 。



5. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = AD = 2$ ， $AA_1 = 3$ ， O 是 AC 的中点，点 P 在线段

A_1C_1 上（包含端点），若直线 OP 与平面 AB_1C 所成的角为 θ ，则 $\sin \theta$ 的取值范围是（ ）

- A. $[\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ B. $[\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}]$ C. $[\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ D. $[\frac{3\sqrt{2}}{11}, \frac{\sqrt{22}}{11}]$

【解答】解：以 D 为原点，分别以 DA ， DC ， DD_1 所在直线为 x ， y ， z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，

则 $D(0, 0, 0)$ ， $A(2, 0, 0)$ ， $C(0, 2, 0)$ ， $O(1, 1, 0)$ ， $B_1(2, 2, 3)$ ，

设 $\vec{A_1P} = a\vec{A_1C_1}$ ($0 \leq a \leq 1$)，则 $P(2-2a, 2a, 3)$ ，

则 $\vec{OP} = (1-2a, 2a-1, 3)$ ， $\vec{AB_1} = (0, 2, 3)$ ， $\vec{AC} = (-2, 2, 0)$ ，

设平面 AB_1C 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则 $\begin{cases} \vec{AB_1} \cdot \vec{n} = 2y + 3z = 0 \\ \vec{AC} \cdot \vec{n} = -2x + 2y = 0 \end{cases}$ ，

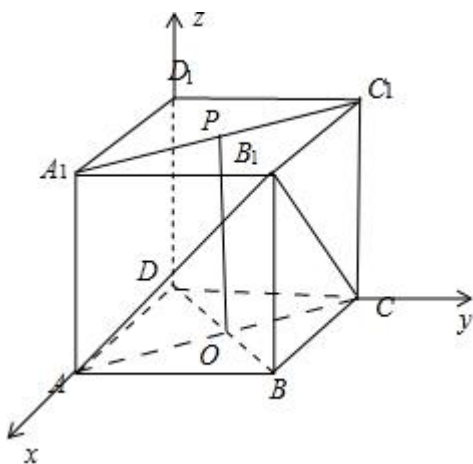
令 $y = 3$ ，得 $x = 3$ ， $z = -2$ ，所以 $\vec{n} = (3, 3, -2)$ ，

所以 $\sin \theta = |\cos \langle \vec{OP}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{OP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{OP}| |\vec{n}|} = \frac{|3(1-2a) + 3(2a-1) - 2 \times 3|}{\sqrt{22} \times \sqrt{8a^2 - 8a + 11}} = \frac{6}{\sqrt{22} \times \sqrt{8(a - \frac{1}{2})^2 + 9}}$ ，

由于 $0 \leq a \leq 1$ ，所以 $\sqrt{8(a - \frac{1}{2})^2 + 9} \in [3, \sqrt{11}]$ ，

所以 $\sin \theta \in [\frac{3}{11}\sqrt{2}, \frac{\sqrt{22}}{11}]$ 。

故选：D。

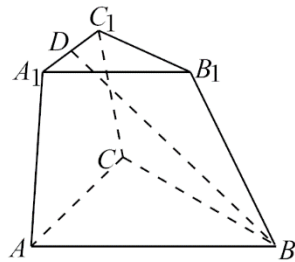


二. 解答题（共 10 小题）

6. 如图 4，在三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，侧面 ACC_1A_1 为等腰梯形，且 $A_1C_1 = AA_1 = 1$ ， D 为 A_1C_1 的中点。

(1) 证明： $AC \perp BD$ ；

(2) 记二面角 A_1-AC-B 的大小为 θ , $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 时, 求直线 AA_1 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值的取值范围.



【解答】(1) 证明: 如图, 作 AC 的中点 M , 连接 DM , BM ,

在等腰梯形 ACC_1A_1 中, D , M 为 A_1C_1 , AC 的中点,

$\therefore AC \perp DM$,

在正 $\triangle ABC$ 中, M 为 AC 的中点,

$\therefore AC \perp BM$,

$\because AC \perp DM$, $AC \perp BM$, $DM \cap BM = M$, $DM, BM \subset$ 平面 BDM ,

$\therefore AC \perp$ 平面 BDM ,

又 $BD \subset$ 平面 BDM , $\therefore AC \perp BD$.

(2) 解: $\because AC \perp$ 平面 BDM ,

在平面 BDM 内作 $Mz \perp BM$, 以 M 为坐标原点, 以 $\vec{MA}$, $\vec{MB}$, $\vec{Mz}$, 分别为 x , y , z , 轴正向, 如图建立空间直角坐标系,

$\because DM \perp AC$, $BM \perp AC$, $\therefore \angle DMB$ 为二面角 A_1-AC-B 的平面角, 即 $\angle DMB = \theta$, $A(1$,

$0, 0)$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$, $C(-1, 0, 0)$, $D(0, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta)$, $C_1(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta)$,

$A_1(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta)$,

设平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, $\vec{CB} = (1, \sqrt{3}, 0)$, $\vec{CC_1} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta)$,

则有, $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{CB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{CC_1} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x + \sqrt{3}y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}z \sin \theta = 0 \end{cases}$, 可得令 $y = \sqrt{3}$, $x = -3$,

$z = \frac{\sqrt{3}(1 - \cos \theta)}{\sin \theta}$,

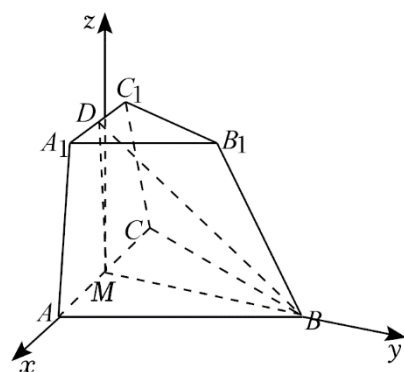
$$\text{即 } \vec{n} = (-3, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{\sin\theta}),$$

$$\text{又 } \vec{AA_1} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta),$$

$$\therefore \sin\alpha = |\cos\langle \vec{AA_1}, \vec{n} \rangle| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4 + \frac{1-2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 + \frac{2}{1+\cos\theta}}},$$

$$\because \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}], \therefore \cos\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],$$

$$\therefore \sin\alpha \in [\frac{\sqrt{21}}{7}, \frac{3\sqrt{13}}{13}].$$

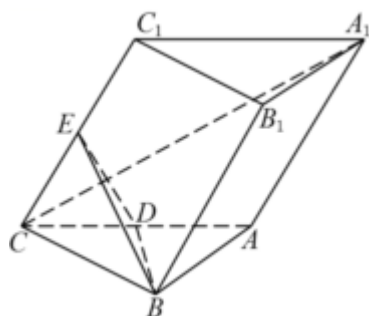


7. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面是边长为 2 的等边三角形， $CC_1=2$ ， D ， E 分别是线段 AC ， CC_1 的中点， C_1 在平面 ABC 内的射影为 D 。

(1) 求证： $A_1C \perp$ 平面 BDE ；

(2) 若点 F 为棱 B_1C_1 的中点，求点 F 到平面 BDE 的距离；

(3) 若点 F 为线段 B_1C_1 上的动点（不包括端点），求锐二面角 $F-BD-E$ 的余弦值的取值范围。



【解答】证明：(1) 法一：连结 AC_1 ， $\triangle ABC$ 为等边三角形， D 为 AC 中点，

$$\therefore BD \perp AC,$$

$$\text{又 } C_1D \perp \text{平面 } ABC, BD \subset \text{平面 } ABC, \therefore C_1D \perp BD$$

$$\text{Q } AC \cap C_1D = D, AC, C_1D \subset \text{平面 } AA_1C_1C$$

$$\therefore BD \perp \text{平面 } AA_1C_1C, \text{又 } A_1C \subset \text{平面 } AA_1C_1C, \therefore BD \perp A_1C,$$

$$\text{由题设知四边形 } AA_1C_1C \text{ 为菱形, } \therefore A_1C \perp AC_1,$$

$$\text{Q } D, E \text{ 分别为 } AC, CC_1 \text{ 中点, } \therefore DE \parallel AC_1, \therefore A_1C \perp DE,$$

$$\text{Q } BD \cap DE = D, BD \cap DE = D, BD, DE \subset \text{平面 } BDE,$$

$$\therefore A_1C \perp \text{平面 } BDE.$$

$$\text{法二: 由 } C_1D \perp \text{平面 } ABC, BD, AC \subset \text{平面 } ABC, \therefore C_1D \perp BD, C_1D \perp AC,$$

$$\text{又 } \triangle ABC \text{ 为等边三角形, } D \text{ 为 } AC \text{ 中点, } \therefore BD \perp AC,$$

则以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC_1}$ 所在直线为 x, y, z 轴, 可建立如图所示空间直角坐标系,

$$\text{则 } D(0,0,0), B(\sqrt{3},0,0), C(0,-1,0), C_1(0,0,\sqrt{3}), E(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}), B_1(\sqrt{3},1,\sqrt{3}), A_1(0,2,\sqrt{3}),$$

$$\therefore \overrightarrow{DB} = (\sqrt{3},0,0), \overrightarrow{DE} = (0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{A_1C} = (0,-3,-\sqrt{3}),$$

$$\text{Q } \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0, \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0,$$

$$\therefore BD \perp A_1C, DE \perp A_1C$$

$$\text{又 Q } BD \cap DE = D, BD \cap DE = D, BD, DE \subset \text{平面 } BDE, \therefore A_1C \perp \text{平面 } BDE.$$

$$\text{解: (2) 由 (1) 坐标法得 } F(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}),$$

$$\text{平面 } BDE \text{ 的一个法向量为 } \vec{r}_m = \overrightarrow{CA_1} = (0,3,\sqrt{3}),$$

$$\text{Q } \overrightarrow{DF} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3})$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 到平面 } BDE \text{ 的距离 } d = \frac{|\vec{r}_m \cdot \overrightarrow{DF}|}{|\vec{r}_m|} = \frac{\frac{3}{2} + 3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{解: (3) Q } \overrightarrow{C_1B_1} = (\sqrt{3},1,0), \overrightarrow{CA_1} = (0,3,\sqrt{3}),$$

设 $F(x, y, z)$, $\vec{C_1F} = \lambda \vec{C_1B_1}$ ($0 < \lambda < 1$), 则 $(x, y, z - \sqrt{3}) = (\sqrt{3}\lambda, \lambda, 0)$,

$\therefore x = \sqrt{3}\lambda, y = \lambda, z = \sqrt{3}$, $\therefore F(\sqrt{3}\lambda, \lambda, \sqrt{3})$, $\therefore \vec{DF} = (\sqrt{3}\lambda, \lambda, \sqrt{3})$;

由 (1) 知 $A_1C \perp$ 平面 BDE ,

$\therefore$ 平面 BDE 的一个法向量 $\vec{m} = \vec{CA_1} = (0, 3, \sqrt{3})$

设平面 FBD 的法向量 $\vec{n} = (a, b, c)$,

则 $\vec{n} \cdot \vec{DB} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{DF} = 0$, 即 $\begin{cases} \sqrt{3}a = 0 \\ \sqrt{3}\lambda a + \lambda b + \sqrt{3}c = 0 \end{cases}$, 令 $b = \sqrt{3}$, 则 $a = 0$, $c = -\lambda$, $\therefore$

$\vec{n} = (0, \sqrt{3}, -\lambda)$,

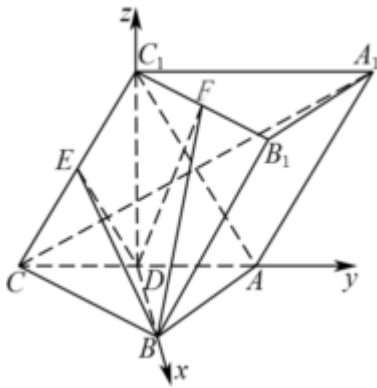
$$\therefore |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{|3\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda|}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 + \lambda^2}} = \frac{|3 - \lambda|}{2\sqrt{3 + \lambda^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(3 - \lambda)^2}{3 + \lambda^2}},$$

令 $3 - \lambda = t \in (2, 3)$, 则 $\lambda = 3 - t$,

$$\therefore |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(3 - \lambda)^2}{3 + \lambda^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{t^2}{12 - 6t + t^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{12}{t^2} - \frac{6}{t} + 1}},$$

$$\because \frac{1}{t} \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), \therefore \frac{12}{t^2} - \frac{6}{t} + 1 \in (\frac{1}{3}, 1), \therefore |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| \in (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}),$$

即锐二面角 $F - BD - E$ 的余弦值的取值范围为 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.



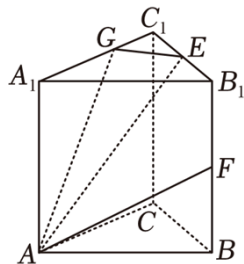
8. 在棱长均为 2 的正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, E 为 B_1C_1 的中点. 过 AE 的截面与棱 BB_1 , A_1C_1 分别交于点 F , G .

(1) 若 F 为 BB_1 的中点, 试确定点 G 的位置, 并说明理由;

(2) 在 (1) 的条件下, 求截面 $AGEF$ 与底面 ABC 所成锐二面角的正切值;

(3) 设截面 $AFEG$ 的面积为 S_0 , $\triangle AEG$ 面积为 S_1 , $\triangle AEF$ 面积为 S_2 , 当点 F 在棱 BB_1 上变

动时, 求 $\frac{S_0^2}{S_1 S_2}$ 的取值范围.



【解答】解: (1) 在平面 BCC_1B_1 内延长 CC_1 , FE 相交于点 P ,

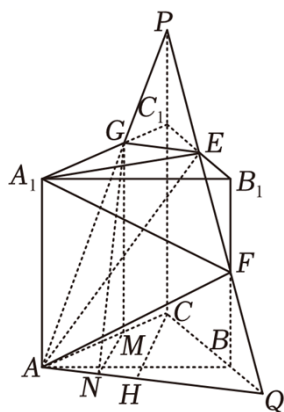
则 $P \in$ 平面 $AGEF$, 又 $P \in CC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

则有平面 $AGEF \cap$ 平面 $ACC_1A_1 = AG$, $P \in AG$, 即 A, G, P 三点共线,

因为 E 为 B_1C_1 的中点, F 为 BB_1 的中点, 所以 $PC_1 = B_1F = \frac{1}{2}CC_1$, 所以 $\frac{PC_1}{PC} = \frac{1}{3}$,

又因为 $GC_1 \parallel AC$, 所以 $\frac{GC_1}{AC} = \frac{PC_1}{PC} = \frac{1}{3}$,

所以 $GC_1 = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}A_1C_1 = \frac{2}{3}$, 即点 G 为棱 A_1C_1 上靠近点 C_1 的三等分点.



(2) 在平面 BCC_1B_1 内延长 CB , EF 相交于点 Q , 连接 AQ ,

则平面 $AGEF \cap$ 平面 $ABC = AQ$,

在平面 ACC_1A_1 内作 $GM \perp AC$ 于点 M , 则 $GM \perp$ 平面 ABC ,

又 $AQ \subset$ 平面 ABC , 所以 $GM \perp AQ$,

在平面 ABC 内作 $MN \perp AQ$ 于点 N , 连接 GN ,

又 GM , $MN \subset$ 平面 GMN , $GM \perp MN = M$, 所以 $AQ \perp$ 平面 GMN ,

$GN \subset$ 平面 GMN , 所以 $AQ \perp GN$,

所以 $\angle GNM$ 为截面 $AGEF$ 与底面 ABC 所成锐二面角的平面角,

在 $\triangle AQC$ 中, 作 $CH \perp AQ$ 于点 H , $BQ = C_1E = 1$, $AC = 2$, $CQ = 3$, $\angle ACB = 60^\circ$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} , \quad S_{\triangle AQC} = \frac{3\sqrt{3}}{2} ,$$

由余弦定理可得: $AQ^2 = AC^2 + CQ^2 - 2AC \cdot CQ \cdot \cos \angle ACQ = 4 + 9 - 6 = 7$, 则 $AQ = \sqrt{7}$,

$$S_{\triangle AQC} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} AQ \cdot CH , \quad \text{可得 } CH = \frac{3\sqrt{21}}{7} , \quad \text{所以 } MN = \frac{2}{3} CH = \frac{2\sqrt{21}}{7} ,$$

$$\text{又 } GM = AA_2 = 2 , \quad \text{所以 } \tan \angle GNM = \frac{GM}{MN} = \frac{\sqrt{21}}{3} ,$$

故截面 $AGEF$ 与底面 ABC 所成锐二面角的正切值为 $\frac{\sqrt{21}}{3}$;

$$(3) \text{ 设 } GC_1 = m , \quad \text{则 } m \in [0, 1] , \quad \frac{PG}{GA} = \frac{m}{2-m} ,$$

$$\text{设 } \triangle PGE \text{ 的面积为 } S , \quad \text{所以 } \frac{S}{S_1} = \frac{m}{2-m} ,$$

$$\text{又因为 } S_2 = S + S_1 , \quad \text{所以 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{2-m}{2} , \quad \text{且 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{2-m}{2} \in [\frac{1}{2}, 1] ,$$

$$\text{故 } \frac{S_0^2}{S_1 S_2} = \frac{(S_1 + S_2)^2}{S_1 S_2} = \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} + 2 , \quad \text{令 } t = \frac{S_1}{S_2} , \quad \text{则 } t \in [\frac{1}{2}, 1] ,$$

$$\text{设 } g(t) = t + \frac{1}{t} + 2 (t \in [\frac{1}{2}, 1]) ,$$

$$\text{当 } \frac{1}{2} \leq t_1 < t_2 \leq 1 \text{ 时, } g(t_1) - g(t_2) = t_1 + \frac{1}{t_1} - t_2 - \frac{1}{t_2} = (t_1 - t_2) \frac{(t_1 t_2 - 1)}{t_1 t_2} ,$$

由 $t_1 - t_2 < 0$, $t_1 t_2 > 0$, $t_1 t_2 - 1 < 0$, 可得 $g(t_1) - g(t_2) > 0$, 即 $g(t_1) > g(t_2)$,

所以 $g(t) = t + \frac{1}{t} + 2$ 在 $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递减,

$$\text{所以 } g(t)_{\min} = g(1) = 4 , \quad g(t)_{\max} = g(\frac{1}{2}) = \frac{9}{2} , \quad \text{所以 } g(t) \in [4, \frac{9}{2}] ,$$

$$\text{所以 } \frac{S_0^2}{S_1 S_2} = \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} + 2 \in [4, \frac{9}{2}] .$$

9. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 60^\circ$, 四边形 $ACFE$ 为矩形, 平面 $ACFE \perp$ 平面 $ABCD$, $AD = CD = BC = CF = 1$.

(1) 求证: $BC \perp$ 平面 $ACFE$;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/418054046067006130>