

2023-2024 学年广东省湛江市高三毕业班下学期摸底联考数学试题试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\log_3 a_n + 1 = \log_3 a_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 且 $a_2 + a_4 + a_6 = 9$, 则 $\log_{\frac{1}{3}}(a_3 + a_5 + a_7)$ 的值是()

- A. 5 B. -3 C. 4 D. $\frac{9}{91}$

2. 已知函数 $f(x) = \frac{k}{x}$ ($k \in \mathbb{N}_+$), $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x-1}$, 若对任意的 $c > 1$, 存在实数 a, b 满足 $0 < a < b < c$, 使得

$g(a) = f(b) = g(c)$, 则 k 的最大值是()

- A. 3 B. 2 C. 4 D. 5

3. 一个由两个圆柱组合而成的密闭容器内装有部分液体，小圆柱底面半径为 r_1 , 大圆柱底面半径为 r_2 , 如图 1 放置容

器时，液面以上空余部分的高为 h_1 , 如图 2 放置容器时，液面以上空余部分的高为 h_2 , 则 $\frac{h_1}{h_2} =$ ()



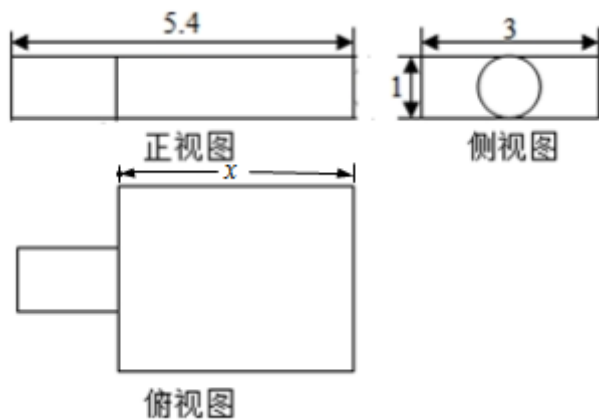
图 1



图 2

- A. $\frac{r_2}{r_1}$ B. $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$ C. $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$ D. $\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$

4. 中国古代数学名著《九章算术》中记载了公元前 344 年商鞅督造的一种标准量器——商鞅铜方升，其三视图如图所示（单位：寸），若 π 取 3，当该量器口密闭时其表面积为 42.2（平方寸），则图中 x 的值为()



- A. 3 B. 3.4 C. 3.8 D. 4

5. 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha \parallel \beta$ 的充要条件是

- A. α 内有无数条直线与 β 平行
 B. α 内有两条相交直线与 β 平行
 C. α, β 平行于同一条直线
 D. α, β 垂直于同一平面

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{(x-1)\pi}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 2f(x-2), & 3 < x \leq 100 \end{cases}$, 若函数 $f(x)$ 的极大值点从小到大依次记为 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 并记相应的极大值为 $b_1, b_2, \dots, b_n$, 则 $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$ 的值为 ()

- A. $2^{50} + 2449$ B. $2^{50} + 2549$ C. $2^{49} + 2449$ D. $2^{49} + 2549$

7. 已知 $\cos(2019\pi + \alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, 则 $\sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) =$ ()

- A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{5}{9}$ C. $-\frac{5}{9}$ D. $-\frac{7}{9}$

8. 在直角坐标系中, 已知 $A(1, 0), B(4, 0)$, 若直线 $x + my - 1 = 0$ 上存在点 P , 使得 $|PA| = 2|PB|$, 则正实数 m 的最小值是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

9. 已知平行于 x 轴的直线分别交曲线 $\ln y = 2x + 1, y^2 = 2x - 1 (y \geq 0)$ 于 A, B 两点, 则 $4|AB|$ 的最小值为 ()

- A. $5 + \ln 2$ B. $5 - \ln 2$ C. $3 + \ln 2$ D. $3 - \ln 2$

10. 2021年部分省市将实行“3+1+2”的新高考模式, 即语文、数学、英语三科必选, 物理、历史二选一, 化学、生物、政治、地理四选二, 若甲同学选科没有偏好, 且不受其他因素影响, 则甲同学同时选择历史和化学的概率为

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{2}$

11. 给出下列三个命题：

①“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - 2x_0 + 1 \leq 0$ ”的否定；

②在 $\triangle ABC$ 中，“ $B > 30^\circ$ ”是“ $\cos B < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ”的充要条件；

③将函数 $y = 2\cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

其中假命题的个数是（ ）

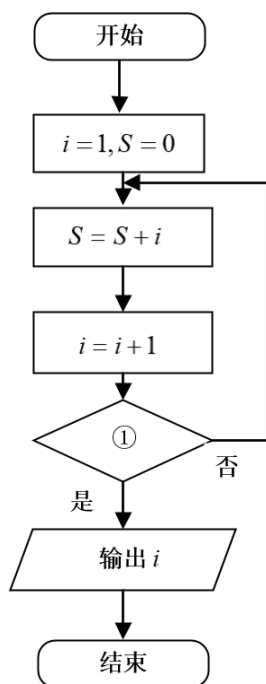
A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

12. 执行如图所示的程序框图，若输出的值为8，则框图中①处可以填（ ）.

A. $S \geq 7$?B. $S \geq 21$?C. $S \geq 28$?D. $S \geq 36$?

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

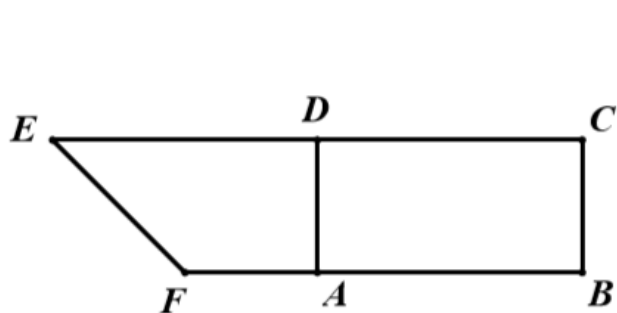
13. 假设10公里长跑，甲跑出优秀的概率为 $\frac{2}{3}$ ，乙跑出优秀的概率为 $\frac{1}{2}$ ，丙跑出优秀的概率为 $\frac{1}{4}$ ，则甲、乙、丙三人同时参加10公里长跑，刚好有2人跑出优秀的概率为_____.

14. 在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， P 、 Q 是面对角线 A_1C_1 上两个不同的动点.以下四个命题：①存在 P 、 Q 两点，使 $BP \perp DQ$ ；②存在 P 、 Q 两点，使 BP 、 DQ 与直线 B_1C 都成 45° 的角；③若 $|PQ|=1$ ，则四面体 $BDPQ$ 的体积一定是定值；④若 $|PQ|=1$ ，则四面体 $BDPQ$

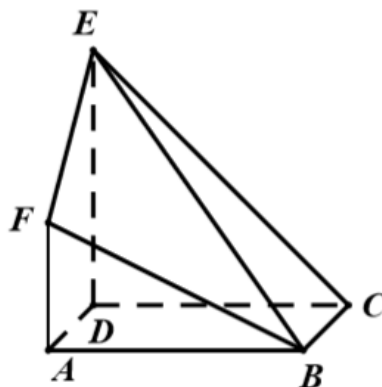
在该正方体六个面上的正投影的面积的和为定值.其中为真命题的是_____.

15. 设变量 x, y, z 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 3 \\ x-y \geq -1 \\ 2x-y \leq 3 \end{cases}$, 则目标函数 $z = 2x + 3y$ 的最小值是_____.

16. 如图所示, 在直角梯形 $BCDF$ 中, $\angle CBF = \angle BCE = 90^\circ$, A, D 分别是 BF, CE 上的点, $AD \parallel BC$, 且 $AB = DE = 2BC = 2AF$ (如图①). 将四边形 $ADEF$ 沿 AD 折起, 连接 BE, BF, CE (如图②). 在折起的过程中, 则下列表述:



图①



图②

- ① $AC \parallel$ 平面 BEF ;
- ② 四点 B, C, E, F 可能共面;
- ③ 若 $EF \perp CF$, 则平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$;
- ④ 平面 BCE 与平面 BEF 可能垂直. 其中正确的是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 设函数 $f(x) = a \ln x + x^2 - (a+2)x$, 其中 $a \in R$.

(I) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 求 a 的值;

(II) 已知导函数 $f'(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上存在零点, 证明: 当 $x \in (1, e)$ 时, $f(x) > -e^2$.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{a}{2}x^2 - x$, $a \in R$, $e \approx 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数.

(1) 若 $a = -e$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 求 a 的取值范围, 并证明: $x_1 x_2 > x_1 + x_2$.

19. (12 分) 已知 $f(x) = |ax+2|$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) > 3x$ 的解集;

(2) 若 $f(1), M, f(2), M$, 证明: $M \leq \frac{2}{3}$.

20. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1=1, a_2=3$, 且 $a_{n+2} = (-1)^n (a_n - 1) + 2a_n + 1, n \in \mathbb{N}^*$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $S_n \leq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$.

21. (12 分) 已知命题 $P: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + m > 0$; 命题 Q : 函数 $f(x) = \ln x - \frac{m}{2}x$ 无零点.

(1) 若 $\neg Q$ 为假, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $P \wedge Q$ 为假, $P \vee Q$ 为真, 求实数 m 的取值范围.

22. (10 分) 已知 $a > 0, b > 0$, 函数 $f(x) = |x+a| + |2x-b|$ 的最小值为 1.

(1) 证明: $2a+b=2$.

(2) 若 $a+2b \geq tab$ 恒成立, 求实数 t 的最大值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

由 $\log_3 a_n + 1 = \log_3 a_{n+1}$, 可得 $a_{n+1} = 3a_n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列,

所以 $a_2 + a_4 + a_6 = a_2 + 9a_2 + 81a_2 = 91a_2 = 9$, 则 $a_2 = \frac{9}{91}$,

则 $\log_{\frac{1}{3}}(a_3 + a_5 + a_7) = \log_{\frac{1}{3}}(3a_2 + 27a_2 + 243a_2) = \log_{\frac{1}{3}} 3^3 = -3$, 故选 B.

点睛: 本题考查了等比数列的概念, 等比数列的通项公式及等比数列的性质的应用, 试题有一定的技巧, 属于中档试题, 解决这类问题的关键在于熟练掌握等比数列的有关公式并能灵活运用, 尤其需要注意的是, 等比数列的性质和使用等比数列的前 n 项和公式时, 应该要分类讨论, 有时还应善于运用整体代换思想简化运算过程.

2、A

【解析】

根据条件将问题转化为 $\frac{\ln x + 1}{x-1} > \frac{k}{x}$ ，对于 $x > 1$ 恒成立，然后构造函数 $h(x) = x \cdot \frac{\ln x + 1}{x-1}$ ，然后求出 $h(x)$ 的范围，进一步得到 k 的最大值.

【详解】

Q $f(x) = \frac{k}{x} (k \in \mathbb{N}_+)$, $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x-1}$, 对任意的 $c > 1$, 存在实数 a, b 满足 $0 < a < b < c$, 使得 $g(a) = f(b) = g(c)$,

$\therefore$ 易得 $g(c) = f(b) > f(c)$, 即 $\frac{\ln c + 1}{c-1} > \frac{k}{c}$ 恒成立,

$\therefore \frac{\ln x + 1}{x-1} > \frac{k}{x}$, 对于 $x > 1$ 恒成立,

设 $h(x) = x \cdot \frac{\ln x + 1}{x-1}$, 则 $h'(x) = \frac{x-2-\ln x}{(x-1)^2}$,

令 $q(x) = x-2-\ln x$, $\therefore q'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$ 在 $x > 1$ 恒成立,

Q $q(3) = 3-2-\ln 3 < 0$, $q(4) = 4-2-\ln 4 > 0$,

故存在 $x_0 \in (3, 4)$, 使得 $q(x_0) = 0$, 即 $x_0 - 2 = \ln x_0$,

当 $x \in (1, x_0)$ 时, $q(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $q(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增.

$\therefore h(x)_{\min} = h(x_0) = \frac{x_0 \ln x_0 + x_0}{x_0 - 1}$, 将 $x_0 - 2 = \ln x_0$ 代入得:

$\therefore h(x)_{\min} = h(x_0) = \frac{x_0(x_0 - 2) + x_0}{x_0 - 1} = x_0$,

Q $k \in \mathbb{N}_+$, 且 $k < h(x)_{\min} = x_0$,

$\therefore k \leq 3$

故选: A

【点睛】

本题考查了利用导数研究函数的单调性, 零点存在定理和不等式恒成立问题, 考查了转化思想, 属于难题.

3、B

【解析】

根据空余部分体积相等列出等式即可求解.

【详解】

在图 1 中，液面以上空余部分的体积为 $\pi r_1^2 h_1$ ；在图 2 中，液面以上空余部分的体积为 $\pi r_2^2 h_2$. 因为 $\pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2$

$$, \text{ 所以 } \frac{h_1}{h_2} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2.$$

故选：B

【点睛】

本题考查圆柱的体积，属于基础题.

4、D

【解析】

根据三视图即可求得几何体表面积，即可解得未知数.

【详解】

由图可知，该几何体是由一个长宽高分别为 $x, 3, 1$ 和

一个底面半径为 $\frac{1}{2}$ ，高为 $5.4 - x$ 的圆柱组合而成.

该几何体的表面积为

$$2(x + 3x + 3) + \pi \cdot (5.4 - x) = 42.2,$$

解得 $x = 4$,

故选：D.

【点睛】

本题考查由三视图还原几何体，以及圆柱和长方体表面积的求解，属综合基础题.

5、B

【解析】

本题考查了空间两个平面的判定与性质及充要条件，渗透直观想象、逻辑推理素养，利用面面平行的判定定理与性质定理即可作出判断.

【详解】

由面面平行的判定定理知： α 内两条相交直线都与 β 平行是 $\alpha // \beta$ 的充分条件，由面面平行性质定理知，若 $\alpha // \beta$ ，

则 α 内任意一条直线都与 β 平行，所以 α 内两条相交直线都与 β 平行是 $\alpha // \beta$ 的必要条件，故选 B.

【点睛】

面面平行的判定问题要紧扣面面平行判定定理，最容易犯的错误为定理记不住，凭主观臆断，如：“若

$a \subset \alpha, b \subset \beta, a // b$ ，则 $\alpha // \beta$ ”此类的错误.

6、C

【解析】

对此分段函数的第一部分进行求导分析可知，当 $x=2$ 时有极大值 $f(2)=1$ ，而后一部分是前一部分的定义域的循环，而值域则是每一次前面两个单位长度定义域的值域的 2 倍，故此得到极大值点 a_n 的通项公式 $a_n=2n$ ，且相应极大值 $b_n=2^{n-1}$ ，分组求和即得

【详解】

$$\text{当 } 1 \leq x \leq 3 \text{ 时, } f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{2}\right),$$

$$\text{显然当 } x=2 \text{ 时有, } f'(x)=0,$$

∴经单调性分析知

$x=2$ 为 $f(x)$ 的第一个极值点

$$\text{又} \because 3 < x \leq 100 \text{ 时, } f(x) = 2f(x-2)$$

∴ $x=4, x=6, x=8, \dots$ ，均为其极值点

∴函数不能在端点处取得极值

$$\therefore a_n = 2n, \quad 1 \leq n \leq 49, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \text{对应极值 } b_n = 2^{n-1}, \quad 1 \leq n \leq 49, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{49} (a_i + b_i) = \frac{(2+98) \times 49}{2} + \frac{1 \times (1-2^{49})}{1-2} = 2^{49} + 2449$$

故选：C

【点睛】

本题考查基本函数极值的求解，从函数表达式中抽离出相应的等差数列和等比数列，最后分组求和，要求学生对数列和函数的熟悉程度高，为中档题

7、C

【解析】

利用诱导公式得 $\cos(2019\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ ， $\sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \cos 2\alpha$ ，再利用倍角公式，即可得答案.

【详解】

$$\text{由 } \cos(2019\pi + \alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ 可得 } \cos(\pi + \alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \frac{2}{9} - 1 = -\frac{5}{9}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查诱导公式、倍角公式，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，求解时注意三角函数的符号.

8、D

【解析】

设点 $P(1-my, y)$ ，由 $|PA| = 2|PB|$ ，得关于 y 的方程.由题意，该方程有解，则 $\Delta \geq 0$ ，求出正实数 m 的取值范围，即求正实数 m 的最小值.

【详解】

由题意，设点 $P(1-my, y)$.

$$\text{Q } |PA| = 2|PB|, \therefore |PA|^2 = 4|PB|^2,$$

$$\text{即 } (1-my-1)^2 + y^2 = 4[(1-my-4)^2 + y^2],$$

$$\text{整理得 } (m^2+1)y^2 + 8my + 12 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = (8m)^2 - 4(m^2+1) \times 12 \geq 0, \text{ 解得 } m \geq \sqrt{3} \text{ 或 } m \leq -\sqrt{3}.$$

$$\text{Q } m > 0, \therefore m \geq \sqrt{3}, \therefore m_{\min} = \sqrt{3}.$$

故选：D.

【点睛】

本题考查直线与方程，考查平面内两点间距离公式，属于中档题.

9、A

【解析】

设直线为 $y = a(a > 0)$, $A(x_1, y_1)B(x_2, y_2)$ ，用 a 表示出 x_1, x_2 ，求出 $4|AB|$ ，令 $f(a) = a^2 + 2 - \ln a$ ，利用导数求出单调区间和极小值、最小值，即可求出 $4|AB|$ 的最小值.

【详解】

$$\text{解：设直线为 } y = a(a > 0), A(x_1, y_1)B(x_2, y_2), \text{ 则 } \ln a = 2x_1 + 1, \therefore x_1 = \frac{1}{2}(\ln a - 1),$$

$$\text{而 } x_2 \text{ 满足 } a^2 = 2x_2 - 1, \therefore x_2 = \frac{a^2 + 1}{2}$$

$$\text{那么 } 4|AB| = 4(x_2 - x_1) = 4\left[\frac{a^2 + 1}{2} - \frac{1}{2}(\ln a - 1)\right] = 2(a^2 + 2 - \ln a)$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/425134243044011332>